ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том II, № 5 РАДИОФИЗИКА 1959

СИНТЕЗ СВЯЗАННЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ И СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Е. И. Баранчук

Метод Винера для определения оптимальных характеристик фильтров, находящихся под воздействием стационарных случайных процессов, распространен на связанные регулируемые и следящие системы с большим числом входов и выходов. Для определения параметров отдельных систем, входящих в связанную, использованы специальные характеристики, зависящие от свойств синтезируемой системы, управляющих и возмущающих процессов, действующих на всех входах. Приведен пример определения оптимальных характеристик связанной системы.

Синтезу сложных взаимосвязанных систем, исходящихся под воздействием случайных процессов, посвящено весьма ограниченное число работ. В [1] теория оптимальных фильтров Винера [2] применяется для отыскания оптимальных характеристик двухканальных фильтров. Задачи определения оптимальных характеристик систем автоматического управления, находящихся под воздействием случайных процессов, рассматривались в работах Пугачева [3,4]. Однако, результаты указанных работ, как отмечает автор, принципиально не могут решить задачу синтеза ([1], стр. 491) любых регулируемых систем, которая состоит из 1) определения оптимальных характеристик и 2) определения параметров отдельных элементов, при помощи которых оптимальные характеристики могут быть реализованы. В настоящей статье теория оптимальных фильтров Винера распространена на широкий класс связанных регулируемых систем с любым (одинаковым) числом входов и выходов и систем, которые могут быть к ним приведены. Полученные результаты применяются для решения второй части задачи синтеза.

1. УРАВНЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ СИНТЕЗА СИСТЕМ СВЯЗАННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Проблема осуществления оптимальных характеристик систем с любым числом входов и выходов (рис. 1) остается до настоящего времени нерешенной из-за ряда принципиальных и расчетных затруднений. Одно из затруднений состоит в выборе исходных уравнений для систем связанного регулирования. В общем случае число управляющих и возмущающих воздействий, приложенных ко всем входам сложных связанных систем, не равно числу выходных отклонений. Получающиеся при этом системы

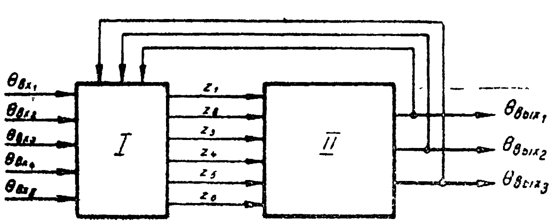

Рис. 1.

уравнений могут иметь различное число входных и выходных переменных (при использовании матричной формы записи в уравнения будут входить матрицы типа $m \times n$, где $m \neq n$). В таком случае возникает задача о математической осуществимости связанных систем, которая рассматривалась в работах Каванна [5].

Трудности с математической осуществимостью связанных систем регулирования (т. е. с разрешимостью систем уравнений с различным числом неизвестных и независимых переменных) иногда можно обойти, принимая в качестве исходных уравнения с квадратными матрицами типа n^2, приведенные в [6]. Для того, чтобы воспользоваться указанными уравнениями при условии, что число входных управляющих и возмущающих воздействий не равно числу выходных отклонений, необходимо искусственно ввести в синтезируемой системе некоторое дополнительное число условных входов или выходов. Условные входы и выходы можно вводить только тогда, когда намечена развернутая структурная схема всей регулируемой системы, т. е. указаны измерительные и исполнительные органы, установлены связи и т. д.

Рассмотрим в качестве примера следящую систему с двумя входами и одним выходом * (рис. 2), которой посвящена вторая глава

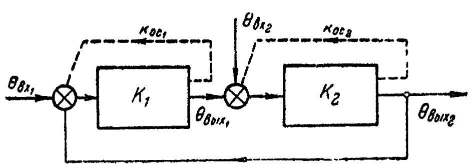

Рис. 2.

книги Пелегрэна [7]. Уравнения, связывающие входные и выходные отклонения такой системы, и ошибки описываются неквадратными матрицами с одной строкой и двумя столбцами. Однако можно считать, что рассматриваемая система является каскадной (см. рис. 2) с условно введенными обратными связями ($k_{ос1} = k_{ос2} = 0$). Основные матрицы такой системы при $r_{12в} = -1$, $r_{21в} = 1$ [6]:

$$\widehat{K}_{13}(p) = \begin{pmatrix} [1 + k_1(p)\,k_{ос1}(p)] & r_{12в}k_1(p) \\ r_{12в}k_2(p) & [1 + k_2(p)\,k_{ос2}(p)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k_1(p) \\ k_2(p) & 1 \end{pmatrix};$$

$$\widehat{K}_{11}(p) = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}; \quad \widehat{\Theta}_{вх}(p) = \begin{pmatrix} \Theta_{вх1} \\ \Theta_{вх2} \end{pmatrix},$$

где $\widehat{K}_{13}(p)$ — матрица возвратной разности, $\widehat{\Theta}_{вх}(p)$ — матрица - столбец входных воздействий, $k_1(p)$, $k_2(p)$ — функции передачи отдельных систем.

Воспользовавшись уравнениями, связывающими входные и выходные отклонения [6],

$$\widehat{\Theta}_{вых}(p)\ \widehat{K}_{13}(p) = \widehat{K}_{11}(p)\ \widehat{\Theta}_{вх}(p), \tag{1}$$

получим

$$\Theta_{вых2} = \frac{k_1(p)\,k_2(p)\,\Theta_{вх1} + k_2(p)\,\Theta_{вх2}}{1 + k_1(p)\,k_2(p)}.$$

Легко показать, что в рассматриваемом случае существуют n^2 функций передач и функций передач ошибок, для определения которых можно воспользоваться формулами, приведенными в [6]. Если основные уравнения связанных систем приводятся к уравнениям с квадратными

* Рассматриваемая система не относится к связанным системам; определение ее оптимальной характеристики другим способом выполнено в [8].

матрицами, то при помощи формулы (1) определяются функции передачи отдельных систем в разомкнутом состоянии:

$$k_i(p) = k_1(p)\Big\{[r_{i1} - (r_{i1} + r_{i1\text{в}})\,k_1(p)\,k_{\text{ос}i}(p)]\,\frac{\Theta_{\text{вх}1}(p)}{\Theta_{\text{вх}i}(p)} + \ldots + [1 - k_1(p)\,k_{\text{ос}i}(p)] + \ldots + [r_{in} - (r_{in} + r_{in\text{в}})\,k_N(p)\,k_{\text{ос}i}(p)] \times \times \frac{\Theta_{\text{вх}n}(p)}{\Theta_{\text{вх}i}(p)}\Big\}^{-1}, \tag{2}$$

где

$$k_1(p) = \frac{\Theta_{\text{вых}i}(p)}{\Theta_{\text{вх}i}(p)} = k_{i1}(p)\,\frac{\Theta_{\text{вх}1}(p)}{\Theta_{\text{вх}i}(p)} + \ldots + k_{ii}(p) + \ldots + k_{in}(p)\,\frac{\Theta_{\text{вх}n}(p)}{\Theta_{\text{вх}i}(p)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

$k_{ij}(p)$ — собственные и взаимные функции передачи, $\Theta_{\text{вх}i}(p)$ — изображения входных отклонений, $\Theta_{\text{вых}i}(p)$—изображения выходных отклонений, r_{ij}—коэффициенты взаимных связей по ошибкам, $r_{ij\text{в}}$ — коэффициенты взаимных связей по выходным отклонениям, $k_{\text{ос}i}(p)$ — функции передачи цепей обратной связи. Все обозначения приняты такими же, как и в [6].

При выводе формул (2) предположено, что помехи приведены к месту приложения управляющих сигналов:

$$\Theta_{\text{вх}i}(p) = \Theta_{hi}(p) + \Theta_{nxi}(p), \tag{4}$$

где $\Theta_{hi}(p)$ — изображение сигналов, подлежащих воспроизведению, $\Theta_{nxi}(p)$—изображение помех.

Характеристики (3) несколько необычные, так как они зависят не только от свойств рассматриваемой системы, но и от управляющих и возмущающих сигналов, действующих на всех входах. Тем не менее, как будет видно из дальнейшего, без этих характеристик невозможно осуществить синтез.

Так как рассматриваемые возмущения являются стационарными случайными функциями, то перейдем в формулах (3) к их статистическим характеристикам. Для этого найдем спектральную плотность выходного отклонения:

$$S_{\text{вых}i}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\,|\Theta_{\text{вых}i}(j\omega)\,\Theta^*_{\text{вых}i}(j\omega)| = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\,\big|\{\Theta_{\text{вх}1}(j\omega)\,k_{i1}(j\omega) + \Theta_{\text{вх}2}(j\omega)\,k_{i2}(j\omega) + \ldots + \Theta_{\text{вх}n}(j\omega)\,k_{in}(j\omega)\}\{\Theta^*_{\text{вх}1}(j\omega)\,k^*_{i1}(j\omega) + \Theta^*_{\text{вх}2}(j\omega)\,k^*_{i2}(j\omega) + \ldots + \Theta^*_{\text{вх}n}(j\omega)\,k^*_{in}(j\omega)\}\big| = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\,|\{k_1(j\omega) \times \Theta_{\text{вх}i}(j\omega)\}\{k^*_1(j\omega)\,\Theta^*_{\text{вх}i}(j\omega)\}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где (*) указывает на комплексно-сопряженную функцию.

После выполнения всех операций с (5) получим:

$$S_{\text{вых}i}(\omega) = |\{(k_{i1}(j\omega)\,\psi_1(j\omega) + k_{i2}(j\omega)\,\psi_2(j\omega) + \ldots + k_{in}(j\omega) \times \psi_n(j\omega)\}\{k^*_{i1}(j\omega)\,\psi^*_1(j\omega) + k^*_{i2}(j\omega)\,\psi^*_2(j\omega) + \ldots + k^*_{in}(j\omega) \times \psi^*_n(j\omega)\}| = |\Psi_{\text{вых}i}(j\omega)\,\Psi^*_{\text{вых}i}(j\omega)| = |k_1(j\omega) \times \psi_i(j\omega)|\,|k^*_1(j\omega)\,\psi^*_i(j\omega)| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

где спектральные плотности входных сигналов

$$\psi_i(j\omega)\,\psi_i^*(j\omega) = S_{\text{вх}i}(\omega) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Характеристики (3), выраженные через статистические характеристики входных воздействий, могут быть представлены в виде:

$$k_1(j\omega) = k_{i1}(j\omega)\frac{\psi_1(j\omega)}{\psi_i(j\omega)} + \ldots + k_{ii}(j\omega) + \ldots + k_{in}(j\omega)\times$$
$$\times\frac{\psi_n(j\omega)}{\psi_i(j\omega)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Последние формулы дают возможность определять передаточные функции (3) при помощи статистических характеристик стационарных случайных процессов (через функции $\psi_i(j\omega)$ — аналитические и ограниченные в нижней полуплоскости). В формулах (2) также можно заменить отношение случайных функций отношениями соответствующих функций $\psi_i(j\omega)$.

При использовании формул (6) и (8) предполагается, что все управляющие и возмущающие воздействия взаимно и попарно коррелированы [9].

2. ПОСТАНОВКА ВИНЕРОВСКИХ ЗАДАЧ СИНТЕЗА В СИСТЕМАХ СВЯЗАННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И СЛЕЖЕНИЯ

Задача определения оптимальных характеристик связанных систем может быть сформулирована следующим образом: по характеристикам всех управляющих и возмущающих воздействий найти n передаточных функций (операторов) отдельных систем, обеспечивающих наивысшую точность воспроизведения и преобразования управляющих сигналов. При такой постановке синтеза, как указывалось выше, предполагается, что структура всей связанной системы и некоторые элементы отдельных систем известны.

Точность воспроизведения каждой из систем будем характеризовать их среднеквадратичными ошибками; тогда оптимальной является такая связанная система, у которой ошибка каждой из систем, в нее входящей в связанном состоянии, минимальная. Ошибка воспроизведения отдельных систем определяется разностью между комбинацией подлежащих воспроизведению сигналов на каждом входе и величиной отклонения на соответствующем выходе.

Для многомерных следящих систем (рис. 3)

$$\varepsilon_i(t) = H_i(t) - \int_0^\infty L_i(t-\tau)d\tau = [r_{i1}\Theta_{h1} + r_{i2}\Theta_{h2} + \ldots + r_{in}\Theta_{hn}] -$$
$$- \int_0^\infty \{\Theta_{\text{вх}1}(t-\tau)\,k_{i1}(\tau) + \ldots + \Theta_{\text{вх}n}(t-\tau)\,k_{in}(\tau)\}\,d\tau \tag{9}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где r_{ij} — коэффициенты взаимных связей по ошибкам, Θ_{hi} — сигналы, подлежащие воспроизведению.

Для каскадных регулируемых систем, связанных через объект регулирования (рис. 4), воспроизводящих только управляющие воздействия на собственных входах и фильтрующих управляющие и возмущающие воздействия остальных регуляторов,

$$\varepsilon_i(t) = \Theta_{hi}(t) - \int_0^\infty [\Theta_{\text{вх}1}(t-\tau)\,k_{i1}(\tau) + \ldots + \Theta_{\text{вх}n}(t-\tau)\,k_{in}(\tau)]\,d\tau \tag{10}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

В общем случае под H_i подразумеваются идеальные операторы, подлежащие воспроизведению на выходе каждой из систем, под L_i — выходные отклонения каждой из систем, отличающиеся от идеальных из-за действия помех и неидеальных характеристик отдельных устройств. Конкретные формы отдельных идеальных операторов воспроизводящих устройств различных типов необходимо устанавливать,

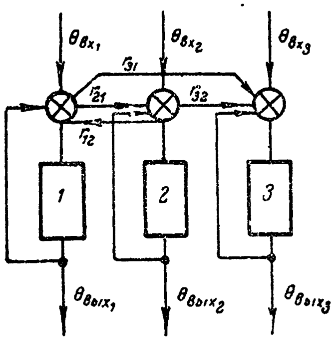

Рис. 3.

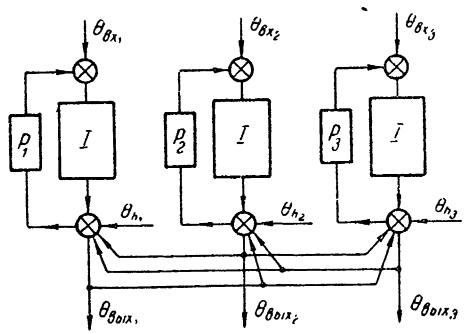

Рис. 4.

анализируя задачи, для решения которых данная система предназначается.

Среднее значение квадратов ошибок $\overline{\varepsilon_i^2}$ получим, воспользовавшись формулой:

$$\overline{\varepsilon_i^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left\{H_i(t) - \int_{-\infty}^{\infty} L_i(t-\tau)\,d\tau\right\}^2 dt \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{11}$$

Для определения оптимальных передаточных функций образуем n^2 функций:

$$k_{ij}(\tau) + \gamma_{ij}\varkappa_i(\lambda), \tag{12}$$

где γ_{ij}—параметр, не зависящий от λ, и $\varkappa_i(\lambda)$—произвольные функции λ.

Для того, чтобы функция $\overline{\varepsilon_i^2}$ имела минимум, необходимо, чтобы все частные производные по γ_{ij} обращались в нули при $\gamma_{i1} = \gamma_{i2} = \dots = \gamma_{in} = 0$ [10]. Очевидно, что выбранные условия минимума совпадут с условиями минимума третьей нормы вектора СКО связанной системы в целом. Возьмем частные производные от уравнений (10) по γ_{ij}. Тогда каждое уравнение дает систему из n уравнений:

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon_i^2}}{\partial\gamma_{ij}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\{-\int_{-T}^{+T} H_i(t)\,\Theta_{\text{вх}j}(t-\tau)\,dt + \int_{-T}^{+T} L_i(t-\tau)\,dt \times \right.$$
$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta_{\text{вх}j}(\tau)\,d\tau\right\} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{13}$$

Используя корреляционные функции

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} H_i(t)\Theta_{\text{вх}j}(t-\tau)\,dt = R_{Hi\varphi j}(\tau) = r_{i1}R_{h1\varphi j}(\tau) + r_{i2}R_{h2\varphi j}(\tau) + \dots +$$
$$+ R_{hj\varphi j}(\tau) + \dots + r_{in}R_{hn\varphi j}(\tau); \tag{14}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T}\Theta_{\text{вх}k}(t)\,\Theta_{\text{вх}j}(t-\tau)\,dt = R_{\varphi kj}(\tau)\,, \tag{15}$$

представим (13) в виде систем интегральных уравнений Винера—Хопфа:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty k_{i1}(\tau)\,R_{\varphi 11}(t-\tau)\,d\tau + \int\limits_0^\infty k_{i2}(\tau)R_{\varphi 12}(t-\tau)\,d\tau + \ldots + \\ + \int\limits_0^\infty k_{in}(\tau)\,R_{\varphi 1n}(t-\tau)d\tau = R_{Hi\varphi 1}(\tau)\,; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int\limits_0^\infty k_{i1}(\tau)\,R_{\varphi n1}(t-\tau)\,d\tau + \int\limits_0^\infty k_{i2}(\tau)\,R_{\varphi n2}(t-\tau)\,d\tau + \ldots + \\ + \int\limits_0^\infty k_{in}(\tau)\,R_{\varphi nn}(t-\tau)\,d\tau = R_{Hi\varphi n}(\tau) \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ \tau > 0)\,.\end{gathered} \tag{16}$$

В результате имеем n систем уравнений (16) с n^2 неизвестными.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА

Системы интегральных уравнений (16) можно принципиально решить: 1) аналитическим методом теории функций комплексного переменного, 2) методом Бодэ и Шеннона, 3) разложением корреляционных функций в степенные ряды [11]. В настоящей работе мы воспользуемся аналитическим методом, для чего запишем матрицы корреляционных функций в развернутом виде, а каждый элемент указанных матриц представим в виде произведения двух функций, одна из которых аналитическая и ограниченная в нижней полуплоскости, а другая аналитическая и ограниченная в верхней полуплоскости:

$$\widehat{R}_\varphi(\tau) = \begin{bmatrix} R_{\varphi 11}(\tau) & R_{\varphi 12}(\tau) & \ldots & R_{\varphi 1n}(\tau) \\ R_{\varphi 21}(\tau) & R_{\varphi 22}(\tau) & \ldots & R_{\varphi 2n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ R_{\varphi n1}(\tau) & R_{\varphi n2}(\tau) & \ldots & R_{\varphi nn}(\tau)\end{bmatrix}; \tag{17}$$

$$R_{\varphi ij}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_j(\tau-\lambda)\,\psi_i(\lambda)\,d\lambda \qquad (-\infty < \tau < +\infty)\,; \tag{18}$$

$$\widehat{R}_{h\varphi}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{h1\varphi 1}(\tau) & R_{h1\varphi 2}(\tau) & \ldots & R_{h1\varphi n}(\tau) \\ R_{h2\varphi 1}(\tau) & R_{h2\varphi 2}(\tau) & \ldots & R_{h2\varphi n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ R_{hn\varphi 1}(\tau) & R_{hn\varphi 2}(\tau) & \ldots & R_{hn\varphi n}(\tau)\end{bmatrix}; \tag{19}$$

$$R_{hi\varphi j}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_j(\tau - \lambda)\,\psi_i^*(\lambda)\,d\lambda \qquad (20)$$

$$(-\infty < \tau < +\infty),$$

где

$$\psi_i(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau < 0; \quad \tilde{\psi}_i(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau > 0;$$

$$h_j(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau < 0; \quad \tilde{h}_j(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau > 0;$$

$$\psi_i(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau}\psi_i(\tau)\,d\tau; \quad \psi_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega\tau}\,\psi_i(\tau)\,d\tau. \qquad (21)$$

Матрицы спектральной плоскости:

$$\hat{S}_\varphi(\omega) = \begin{bmatrix} S_{\varphi 11}(\omega) & S_{\varphi 12}(j\omega) & \ldots & S_{\varphi 1n}(j\omega) \\ S_{\varphi 21}(j\omega) & S_{\varphi 22}(\omega) & \ldots & S_{\varphi 2n}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ S_{\varphi n1}(j\omega) & S_{\varphi n2}(j\omega) & \ldots & S_{\varphi nn}(\omega) \end{bmatrix}; \qquad (22)$$

$$\hat{S}_{h\varphi}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{h1\varphi 1}(\omega) & S_{h1\varphi 2}(j\omega) & \ldots & S_{h1\varphi n}(j\omega) \\ S_{h2\varphi 1}(j\omega) & S_{h2\varphi 2}(\omega) & \ldots & S_{h2\varphi n}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ S_{hn\varphi 1}(j\omega) & S_{hn\varphi 2}(j\omega) & \ldots & S_{hn\varphi n}(j\omega) \end{bmatrix}, \qquad (23)$$

где

$$S_{\varphi ii}(\omega) = \psi_i(j\omega)\,\psi_i^*(j\omega); \quad S_{\varphi ij}(j\omega) = \psi_j(j\omega)\,\psi_i^*(j\omega);$$

$$S_{hi\varphi i}(\omega) = h_i(j\omega)\,h_i^*(j\omega); \quad S_{hi\varphi j}(j\omega) = h_j(j\omega)\,h_i^*(j\omega).$$

Правые части уравнений (16) представим следующим образом:

$$R_{Hi\varphi j}(\tau) = \int_{-\infty}^{0} B_l(\tau - \lambda)\,\psi_j(\lambda)\,d\lambda \quad (-\infty < \tau < +\infty). \qquad (24)$$

Подставив все элементы матрицы (17) и (24) в (16), с учетом (21) получим:

$$\int_{-\infty}^{0}\psi_1(\lambda)\,d\lambda\int_0^{\infty}[\psi_1(\tau-\lambda-\nu)\,k_{i1}(\nu)] + \psi_2(\tau-\lambda-\nu)\,k_{i2}(\nu) + \ldots +$$

$$+\psi_n(\tau-\lambda-\nu)\,k_{in}(\nu)]\,d\nu = \int_{-\infty}^{0} B_l(\tau-\lambda)\,\psi_1^*(\lambda)\,d\lambda;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{0}\psi_n^*(\lambda)\,d\lambda\int_0^{\infty}[\psi_1(\tau-\lambda-\nu)\,k_{i1}(\lambda) + \psi_n(\tau-\lambda-\nu)\,k_{i2}(\nu) + \ldots +$$

$$+\psi_n(\tau-\lambda-\nu)\,k_{in}(\nu)]\,d\nu=\int\limits_{-\infty}^{0}B_i(\tau-\lambda)\,\psi_n^*(\lambda)\,d\lambda.$$

$$(i=1,2,\ldots,n;\ \tau\geqslant 0;\ \lambda<0).$$

После сокращения в уравнениях (25) и замены переменных получим n систем уравнений с n^2 неизвестными, из которых только n уравнений будут независимыми:

$$\int\limits_0^\infty [k_{i1}(\lambda)\,\psi_1(\tau-\lambda)+k_{i2}(\lambda)\,\psi_2(\tau-\lambda)+\ldots+k_{in}(\lambda)\times \times\psi_n(\tau-\lambda)]\,d\lambda=B_i(\tau)\qquad (i=1,2,\ldots,n).\tag{26}$$

Умножив каждый член систем (26) на $e^{-j\omega\tau}$, проинтегрировав от 0 до ∞ и произведя соответствующие преобразования переменных, запишем:

$$k_{i1}(j\omega)\,\psi_1(j\omega)+k_{i2}(j\omega)\,\psi_2(j\omega)+\ldots+k_{in}(j\omega)\,\psi_n(j\omega)=B_i(j\omega)\qquad (i=1,2,\ldots,n).\tag{27}$$

Умножив (24) на $e^{-j\omega t}$, проинтегрировав от $-\infty$ до $+\infty$, заменив переменные и т. д., получим:

$$B_i(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_{Hi\varphi j}(j\omega)}{\psi_i^*(j\omega)}\,e^{j\omega\tau}\,d\omega\quad(\tau\geqslant 0);\tag{28}$$

$$B_i(j\omega)=\int\limits_0^\infty B_i(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau.\tag{29}$$

Разделим каждую строку системы (27) на $\psi_i(j\omega)$:

$$k_{i1}(j\omega)\frac{\psi_1(j\omega)}{\psi_i(j\omega)}+k_{i2}(j\omega)\frac{\psi_2(j\omega)}{\psi_i(j\omega)}+\ldots+k_{ii}(j\omega)+\ldots+ +k_{in}(j\omega)\frac{\psi_n(j\omega)}{\psi_i(j\omega)}=\frac{B_i(j\omega)}{\psi_i(j\omega)}\qquad(i=1,2,\ldots,n).\tag{30}$$

Из (8) следует, что левая часть уравнений (30) является соответствующей характеристикой связанной системы; поэтому можно записать:

$$k_i(j\omega)=B_i(j\omega)\,/\,\psi_i(j\omega)\qquad(i=1,2,\ldots,n).\tag{31}$$

В результате вместо системы уравнений, состоявшей из n уравнений с n^2 неизвестными, получаем систему из n независимых уравнений с n неизвестными, которую можно записать, используя (27), в виде:

$$k_i(j\omega)=\frac{1}{2\pi\psi_i(j\omega)}\int\limits_0^{+\infty}e^{-j\omega t}\,dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_{Hi\varphi j}(j\omega)}{\psi_i^*(j\omega)}\,e^{j\omega t}\,d\omega\qquad(i=1,2,\ldots,n).\tag{32}$$

Все функции $\psi_i(j\omega)$ и $B_i(j\omega)$ имеют нули и полюсы в верхней полуплоскости, поэтому они являются аналитическими и ограниченными в нижней полуплоскости. В то же время все $\psi_i^*(j\omega)$ — аналитические и ограниченные в верхней полуплоскости, и все функции $k_i(j\omega)$ будут также аналитическими и ограниченными в нижней полуплоскости.

Для многомерных регулируемых и следящих систем в развернутом виде

$$k_{\mathrm{I}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi_i(j\omega)} \int\limits_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\psi_i^{*}(j\omega)]^{-1} [r_{i1} S_{hi\varphi i}(j\omega) + \dots + S_{hi\varphi i}(\omega) + \dots + r_{in} S_{hi\varphi n}(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega \tag{33}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Для каскадных систем, ошибки которых определяются формулами (10).

$$k_{\mathrm{I}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi_i(j\omega)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-j\omega t} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{hi\varphi i}(\omega)}{\psi_i^{*}(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega \tag{34}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Формулы (32), (33) и (34) по своей структуре подобны известной формуле для оптимальной передаточной функции, полученной Винером для простейшего фильтра с одним входом и выходом. Для определения оптимальных характеристик отдельных систем следует применять формулы (1).

Предложенный метод синтеза связанных систем не содержит каких-либо принципиальных затруднений, кроме обычных расчетных осложнений, связанных с представлением и разложением спектральных плотностей в виде рациональных спектров. Определение СКО каждой из систем в связанном состоянии можно выполнить при помощи формул, приведенных в [6].

4. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

Рассмотрим синтез двухмерной следящей системы (рис. 5). Элементы матрицы спектральной плотности входных сигналов равны

$$S_{h1\varphi1}(\omega) = a_1^2 / \omega^2 (a_2^2 + \omega^2);$$

$$S_{nx1} = c_1^2;$$

$$S_{h2\varphi2}(\omega) = b_1^2 / (b_2^2 + \omega^2);$$

$$S_{nx2} = c_2^2.$$

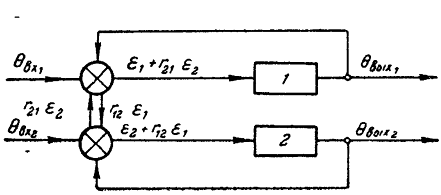

Рис. 5.

Взаимная корреляция между помехами и сигналами, подлежащими воспроизведению на отдельных входах, отсутствует *. Диагональные элементы матрицы (22) будут равны:

$$S_{11\varphi}(\omega) = c_1^2 + a_1^2 / \omega^2 (a_2^2 + \omega^2) = c_1^2 (\omega^4 + a_2^2 \omega^2 + a_1^2 / c_1^2) / \omega^2 (a_2^2 + \omega^2);$$

$$S_{22\varphi}(\omega) = c_2^2 + b_1^2 / (b_2^2 + \omega^2) = c_2^2 [\omega^2 + (b_2^2 + b_1^2 / c_2^2)] / (b_2^2 + \omega^2);$$

$$\psi_1(j\omega) = c_1[(j\omega)^2 + j\omega m_1 + m_2)] / j\omega(a_2 + j\omega);$$

$$\psi_1^{*}(j\omega) = c_1[(j\omega)^2 - j\omega m_1 + m_2] / (-j\omega)(a_2 - j\omega);$$

* Указанное условие является необходимым условием определения оптимальных передаточных функций при помощи метода Винера.

$$\psi_2(j\omega) = c_2(j\omega + n_1) / (b_2 + j\omega);$$
$$\psi_2^*(j\omega) = c_2(-j\omega + n_1) / (b_2 - j\omega),$$

где

$$m_1 = \sqrt{a_2^2 + 2a_1/c_1}; \quad m_2 = a_1/c_1;$$
$$n_1 = \sqrt{b_2^2 + b_1^2/c_2}.$$

Диагональные элементы матрицы входных сигналов, подлежащих воспроизведению, можно разложить следующим образом:

$$h_1(j\omega) = a_1 / j\omega(a_2 + j\omega); \quad h_2(j\omega) = b_1/(b_2 + j\omega);$$
$$h_1^*(j\omega) = a_1/(-j\omega)(a_2 - j\omega); \quad h_2^*(j\omega) = b_1/(b_2 - j\omega).$$

Построим затем все недиагональные элементы матрицы (23):

$$S_{h1\varphi 2}(j\omega) = a_1 b_1 / (-j\omega)(b_2 + j\omega)(a_2 - j\omega);$$
$$S_{h2\varphi 1}(j\omega) = a_1 b_1 / (j\omega)(a_2 + j\omega)(b_2 - j\omega)$$

и составим подынтегральные выражения уравнения (33):

$$r_{11}\frac{S_{h1\varphi 1}(\omega)}{\psi_1^*(j\omega)} + r_{12}\frac{S_{h2\varphi 1}(j\omega)}{\psi_1^*(j\omega)} = \frac{r_{11}a_1^2}{c_1}\frac{1}{(j\omega)(a_2+j\omega)[(j\omega)^2-j\omega m_1+m_2]} +$$
$$+\frac{a_1b_1r_{12}}{c_1}\frac{(j\omega - a_2)}{(b_2-j\omega)(a_2+j\omega)[(j\omega)^2-j\omega m_1+m_2]}; \tag{35}$$

$$r_{21}\frac{S_{h1\varphi 2}(j\omega)}{\psi_2^*(j\omega)} + r_{22}\frac{S_{h2\varphi 2}(j\omega)}{\psi_2^*(j\omega)} =$$
$$= \frac{r_{21}a_1b_1(j\omega - b_2)}{(j\omega)(b_2+j\omega)(a_2-j\omega)(n_1-j\omega)} + \frac{r_{22}b_1^2}{(b_2+j\omega)(n_1-j\omega)}. \tag{36}$$

Разложение (35) и (36) на простые дроби имеет вид:

$$r_{11}\frac{a_1^2}{c_1}\left[\frac{A_1}{j\omega} + \frac{B_1}{(a_2+j\omega)} + \frac{C_1 j\omega + D_1}{(j\omega)^2 - j\omega m_1 + m_2}\right];$$
$$r_{12}\frac{a_1b_1}{c_1}\left[\frac{B_2}{(a_2+j\omega)} + \frac{N_2}{(b_2-j\omega)} + \frac{C_2 j\omega + D_2}{(j\omega)^2 - j\omega m_1 + m_2}\right];$$
$$r_{21}\frac{a_1b_1}{c_2}\left[\frac{A_3}{j\omega} + \frac{B_3}{(b_2+j\omega)} + \frac{C_3}{(a_2-j\omega)} + \frac{D_3}{(n_1-j\omega)}\right]; \tag{37}$$
$$r_{22}\frac{b_1^2}{c_2}\left[\frac{A_4}{(b_2+j\omega)} + \frac{C_4}{(n_1-j\omega)}\right].$$

Из (35), (36) и (37) получаем значения постоянных:

$$A_4 = \frac{1}{n_1 + b_2}; \quad A_3 = -\frac{1}{n_1 a_2};$$

$$B_3 = \frac{b_2(2a_2 + b_2 - 4n_1)}{n_1[n_1^2(b_2 - a_2) + n_1^2(a_2^2 + b_2^2) - a_2b_2(a_2 + b_2)]};$$

$$A_1 = \frac{1}{a_2 m_2}; \quad B_1 = -\frac{m_2 - 2a_2m_1 + 2a_2^2}{a_2m_2(a_2^2 + m_2 + m_1a_2)};$$

$$B_2 = 2a_2\left(m_1b_2 - m_2 - b_2^2\right) / \left(2m_2a_2b_2 - m_1a_2^2b_2^2 + m_1^2a_2^2b_2 - m_2^2b_2^2 + \right.$$
$$+ a_2m_2^2 + b_2m_2^2 - a_2^2m_1m_2 - m_1^2a_2b_2^2 + 2m_1m_2b_2a_2^2 - m_2b_2^3 -$$
$$\left. - a_2b_2^2m_1m_2 + m_2^2a_2^2\right).$$

Подставив (37) в (32), найдем после интегрирования:

$$k_I(j\omega) = \frac{j\omega(a_2 + j\omega)}{c_1^2[(j\omega)^2 + m_1 j\omega + m_2]}\left\{r_{11}a_1^2\left[\frac{A_1}{j\omega} + \frac{B_1}{(a_2 + j\omega)}\right] + \right.$$
$$\left. + r_{12}\frac{a_1b_1B_2}{(a_2 + j\omega)}\right\} = \frac{[j\omega(A_1' + B_1' + B_2') + A_2'a_2]}{c_1^2[(j\omega)^2 + j\omega m_1 + m_2]}; \qquad (38)$$

$$k_{II}(j\omega) = \frac{(b_2 + j\omega)}{c_2^2(n_1 + j\omega)}\left\{r_{21}a_1b_1\left[\frac{A_3}{j\omega} + \frac{B_3}{(b_2 + j\omega)}\right] + \right.$$
$$\left. + r_{22}b_1^2\left[\frac{A_4}{(b_2 + j\omega)}\right]\right\} = \frac{j\omega(A_3' + B_3' + A_4') + A_3'b_2}{c_2^2(j\omega)(n_1 + j\omega)}, \qquad (39)$$

где

$$A_1' = r_{11}A_1a_1^2; \quad B_1' = r_{11}B_1a_1^2;$$
$$B_2' = r_{12}B_2a_1b_1; \quad A_3' = r_{21}A_3a_1b_1; \quad B_3' = r_{21}B_3a_1b_1.$$

При помощи формул (1) и (8) находим функции передачи отдельных систем в разомкнутом состоянии:

$$k_1(p) = \frac{k_I(p)}{[1 - k_I(p)] + [\psi_2(p)/\psi_1(p)]\, r_{12}[1 - k_{II}(p)]}; \qquad (40)$$

$$k_2(p) = \frac{k_{II}(p)}{[1 - k_{II}(p)] + [\psi_1(p)/\psi_2(p)]\, r_{21}[1 - k_I(p)]}, \qquad (41)$$

которые после подстановки передаточных функций (38) и (39) в (40) и (41) запишутся следующим образом:

$$k_1(p) = [p^2\Gamma_1 + p(\Gamma_2 + \Gamma_1b_2) + \Gamma_2b_2] / \{p^3(1 + r_{12}c_2/c_1) + p^2[m_1 -$$
$$-\Gamma_1 + b_2 + r_{12}(c_2/c_1)(n_1 - \Gamma_3 + a_2)] + p[m_2 - \Gamma_2 + b_2m_1 - b_2\Gamma_1 + \qquad (42)$$
$$+ r_{12}(c_2/c_1)(n_1a_2 - \Gamma_3a_2 - \Gamma_4)] + b_2(m_2 - \Gamma_2) - r_{12}(c_2/c_1)a_2\Gamma_4\};$$

$$k_2(p) = [p^2\Gamma_3 + p(\Gamma_4 + a_2\Gamma_3) + a_2\Gamma_4] / \{p^3(1 + r_{12}c_1/c_2 +$$
$$+ p^2[n_1 - \Gamma_3 + a_2 + r_{21}(c_1/c_2)(b_2 + m_1 - \Gamma_1)] + p[n_1a_2 - a_2\Gamma_3 -$$
$$- \Gamma_4 + r_{21}(c_1/c_2)(b_2m_1 + m_2 - \Gamma_2 - b_2\Gamma_1)] - a_2\Gamma_4 + \qquad (43)$$
$$+ r_{21}(c_1/c_2)b_2(m_2 - \Gamma_2)\},$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{A_1' + B_2' + B_1'}{c_1^2}; \quad \Gamma_2 = \frac{A_1'a_2}{c_1^2}; \quad \Gamma_3 = \frac{A_3' + B_3' + A_4'}{c_2^2};$$
$$\Gamma_4 = \frac{A_3'b_2'}{c_2^2}.$$

Примем для примера следующие значения постоянных: $a_1 = 0,06$ $сек^{-1}$; $a_2 = 0,1$ $сек^{-1}$; $c_1 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ $сек$; $c_2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ $сек$; $r_{11} = 1$; $r_{22} = 1$; $r_{12} = 0,7$; $r_{21} = -0,6$; $b_1 = 0,05$ $сек^{-1}$; $b_2 = 0,15$ $сек^{-1}$; тогда: $m_1 = 9$;

$$m_2=40;\ n_1=33{,}4;\ A_1=0{,}25;\ B_1=-0{,}234;\ B_2=-0{,}024;\ B_3=-0{,}0105;$$
$$A_3=-0{,}3;\ A_4=0{,}03;\ A_1'=9\cdot10^{-4};\ B_1'=-8{,}4\cdot10^{-4};\ B_2'=-7{,}2\,r_{12}10^{-5};$$
$$A_3'=-9\cdot10^{-4};\ B_3'=-r_{21}\,3\cdot10^{-5};\ A_4'=7{,}5\cdot10^{-5};\ \Gamma_1=26{,}7-32\,r_{12};$$
$$\Gamma_2=40;\ \Gamma_3=44{,}5-23\,r_{21};\ \Gamma_4=-80.$$

После подстановки этих значений в (42) и (43) получим:

$$k_1(p)=\frac{4{,}3\,p^2+41{,}6\,p+6}{1{,}605\,p^3-9{,}45\,p^2+0{,}55\,p-2{,}92}; \tag{44}$$

$$k_2(p)=\frac{58{,}3\,p^2+54\,p+4{,}8}{0{,}31\,p^3-28{,}3\,p^2+45{,}65\,p-4{,}8}. \tag{45}$$

Если разложить (44) и (45) на сомножители, то получим уравнения для элементов, при помощи которых оптимальная система может быть реализована. Очевидно, что в каждую из систем должны булут входить неустойчивые элементы; последнее, однако, не является специфичной особенностью связанных систем, а связано с выбором постоянных в приведенном примере.

Если рассматривать какую-либо из систем как несвязанную ($r_{12}=r_{21}=0$), то легко убедиться, что при выбранных постоянных отдельные системы реализуются как оптимальные также при помощи неустойчивых (в разомкнутом состоянии) элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Westcott, Transactions of the ASME, 2, 172 (1958).
2. N. Wiener, Extrapolation Interpolation and Smoothing time series, New Jork, 1949,
3. В. С. Пугачев, Автоматика и телемеханика, 17, 289 (1956).
4. В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, ГИТТЛ, М., 1957.
5. R. J. Kavanagh, J. Franklin Inst., 5, 262 (1956).
6. Е. И. Баранчук, Научн. докл. высш. шк. - Электромеханика и автоматика 1, 165 (1958).
7. М. Пелегрэн, Статистический расчет следящих систем, ИЛ, М., 1957.
8. Х. Джеймс, Н. Никольс, Р. Филлипс, Теория следящих систем, ИЛ, М., 1951.
9. А. М. Яглом, УМН, 7, 5 (1952).
10. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, ГИТТЛ, Л.— М., 4, 1941.
11. Д. Лэннинг и Р. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958.

Поступила в редакцию
7 февраля 1959 г.