

## ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВИБРАЦИЙ ПРИ СВЕРЛЕНИИ

Ю. И. Городецкий

С помощью геометрической схемы связей дается классификация работ, посвященных изучению вибраций резца при токарной обработке, и выделяются основные механизмы возбуждения вибраций при сверлении. Исследуется устойчивость сверлильного станка в дискретной и распределенной идеализациях. Области безвибрационных режимов сверления при помощи метода  $D$ -разбиения выделяются в пространстве параметров, характеризующих основные механизмы возбуждения.

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вибрации, возникающие при работе на сверлильных станках, приводят к ряду вредных явлений: снижению точности и качества обработки, снижению производительности станка, его преждевременному износу, снижению стойкости инструмента, выкрашиванию его режущих кромок, а при глубоком сверлении — к поломке сверла или борштанги [18, 20]. Исследованию возбуждения вибраций при резании посвящено много работ [1-23]; тем не менее, проблема вибраций продолжает оставаться весьма актуальной и требует дальнейшего изучения.

Сверлильный станок представляет собой сложную динамическую систему со многими степенями свободы. При глубоком сверлении или растачивании глубоких отверстий дискретная идеализация становится недостаточной, и приходится учитывать упругие волны в сверле или борштанге.

При резании можно указать несколько различных механизмов возбуждения, недостаточное разграничение которых приводит при исследовании к большим затруднениям. С этим отчасти связаны трудности в согласовании теоретических результатов с экспериментальными [19]. Поэтому при изучении подобного рода задач прежде всего необходимо выделить основные механизмы возбуждения вибраций и выяснить те условия, в которых они являются определяющими. В данной работе это делается в основном с помощью геометрической схемы связей, предложенной в 1951 г. в работе Неймарка [26]. Согласно [26], парциальные осцилляторы  $x, y, z, \varphi, s, \dots$  системы на геометрической схеме связей (см., например, рис. 1) условно изображаются точками, направленные силы (связи), соответственно направлению их действия, — направленными отрезками, взаимные силы (упругие, инерционные, гироскопические) — ненаправленными отрезками. Замкнутый контур без самопересечений, составленный из ненаправленных отрезков и, по крайней мере, одного направленного, проходимо-го в каком-либо одном направлении, называется циклом. Если система статически устойчива (потенциальная энергия положительна), то для линейного механизма возбуждения колебаний необходимо наличие

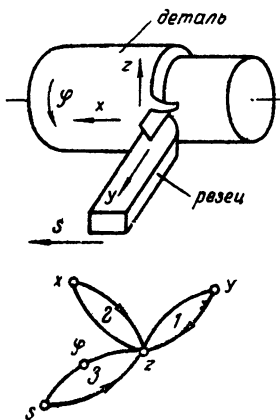


Рис. 1. Схема токарной обработки и геометрическая схема связей.

Замкнутый контур без самопересечений, составленный из ненаправленных отрезков и, по крайней мере, одного направленного, проходимо-го в каком-либо одном направлении, называется циклом. Если система статически устойчива (потенциальная энергия положительна), то для линейного механизма возбуждения колебаний необходимо наличие

отрицательного трения или цикла. Более того, соответственным выбором параметров всегда можно добиться неустойчивости системы.

В качестве примера в [26] рассмотрены основные механизмы возбуждения вибраций резца при токарной обработке. Причиной возбуждения здесь могут быть отрицательное трение по  $\varphi$  и  $u$  и циклы 1, 2 и 3 (рис. 1). Отрицательное трение по  $\varphi$  и  $u$  было изучено в работах [1-3], циклы 1 и 2 — в работах [6, 7], цикл 3 еще не рассматривался. Направленные силы возможны только в результате работы двигателя станка. Устранение упругих связей в циклах 1 и 2 приводит к устранению двух важных механизмов возбуждения.

Кроме рассмотренных механизмов возбуждения, имеющих место при резании по чистому, существенную роль в возбуждении вибраций играют силы с запаздыванием, равным времени полного оборота детали [7-11, 22]\*, а также переменные составляющие сил, возникающие при изменении истинных углов режущего инструмента [1, 2, 11, 12], обусловленные действием направленных связей по скорости.

Хотя рассмотренная линейная модель не отражает всей сложности задачи (она не учитывает такие нелинейные факторы как срыв нароста [13, 14], образование факел износа по задней поверхности резца [2, 15], а также неоднозначную зависимость усилия резания при врезании и оттапливании резца [16]), тем не менее, она позволяет выделить области безвибрационных режимов резания в пространстве основных параметров станка, что в конечном счете является наиболее важным.

Целью настоящей работы является выделение в пространстве параметров станка методом  $D$ -разбиения [24] областей безвибрационных режимов резания применительно к сверлению, торцевому фрезерованию, поперечному и торцевому резанию (в предположении жесткой характеристики двигателя). Вибрации детали при этом не учитываются.

## 2. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Принципиальная схема сверлильного станка изображена на рис. 2. В станке можно выделить две основные колебательные системы: к первой относится шпиндель с механизмами привода вращения (осциллятор  $\varphi$ ), ко второй — весь шпиндельный узел (осциллятор  $s$ ).

Полагая сверло абсолютно жестким, выделим основные механизмы возбуждения, имеющие место при сверлении. В процессе сверления изменение подачи  $s$  и скорости подачи  $s$  приводит к изменению величины крутящего момента  $M_\varphi$ , а изменение угловой скорости вращения сверла  $\dot{\varphi}$  — к изменению осевой составляющей усилия резания  $P_x$ . Это означает, что со стороны осциллятора  $s$  на  $\varphi$  действуют направленные связи по координате и скорости, а со стороны осциллятора  $\varphi$  на  $s$  — направленная связь по скорости.

Из геометрической схемы связей (рис. 3) следует, что причинами

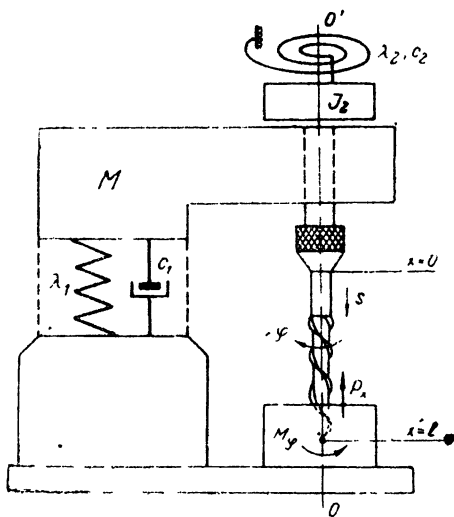


Рис 2 Принципиальная схема сверлильного станка.

\* Впервые на это указал Дроздов [8], затем тщательно исследовал Амосов [9].

возбуждения вибраций в станке могут быть отрицательное трение по  $\varphi$ , цикл 1, образованный направленными связями по координате и скорости, и цикл 2, образованный направленными связями по скорости. Единственным источником энергии, за счет которого возможно действие направленных связей, является мотор станка, остановка которого приводит к прекращению их действия. Другой причиной возбуждения вибраций при сверлении могут быть запаздывающие силы, с запаздыванием, равным времени поворота сверла на  $1/m$  часть полного оборота при наличии на сверле  $m$  режущих кромок. При глубоком сверлении, когда сверло нельзя считать абсолютной жестким, в возбуждении вибраций большую роль играет запаздывание, равное времени пробега упругой волны всей длины сверла.

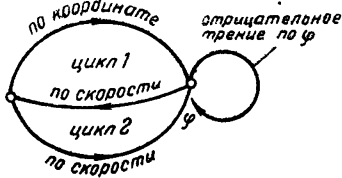


Рис. 3. Геометрическая схема связей при сверлении.

Ниже деталь полагается неподвижной, мотор—вращающимся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , сверло в направлении по-

дачи — абсолютно жестким.

При безвибрационном режиме сверления осевая составляющая усилия резания  $P_x$  и крутящий момент  $M_\varphi$  являются функциями только двух независимых переменных: скорости резания  $v_0 = \Omega r$  (где  $r$ —радиус сверла) и подачи  $s_0$ . Скорость подачи  $\dot{s}_0$  в этом случае связана с  $v_0$  и  $s_0$  зависимостью  $\dot{s}_0 = s_0 \Omega / 2\pi$ . В вибрационном режиме сверления приращение скорости подачи может меняться независимо от приращения скорости резания  $v = r \dot{\varphi}|_{x=l}$  и подачи  $s$ ; поэтому

$$P_x = P_x(s_0 + \Delta s, \dot{s}_0 + \dot{s}, v_0 + v); \quad (1)$$

$$M_\varphi = M_\varphi(s_0 + \Delta s, \dot{s}_0 + \dot{s}, v_0 + v),$$

где  $\Delta s$  — приращение толщины срезаемой стружки, а  $\dot{\varphi}(x, t)|_{x=l}$  — приращение угловой скорости вращения сверла на его конце.

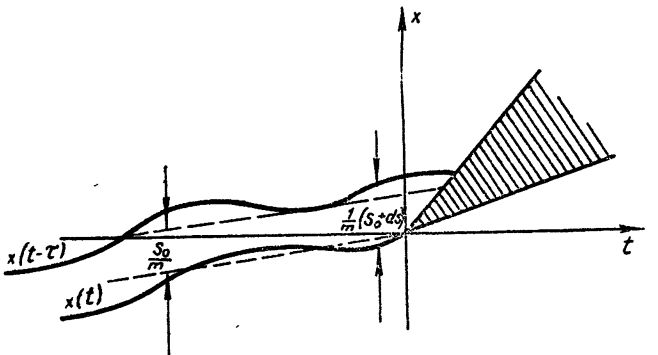


Рис. 4. Изменение толщины срезаемой стружки за  $1/m$  оборота сверла.

Толщина стружки, срезаемая каждой режущей кромкой в данный момент времени, зависит от следа на поверхности, образованного предыдущей кромкой на  $\tau$  сек ранее (рис. 4); поэтому

$$\Delta s = m [s(t) - s(t - \tau)], \quad (2)$$

где  $\tau = 2\pi r / m (v_0 + v)|_{x=l}$ .

При вибрационном режиме сверления приращения составляющих усилия резания в окрестности  $s_0$ ,  $\dot{s}_0$ ,  $v_0$  равны [10]

$$dP_x = k_1 \Delta s + k_2 \dot{\Delta s} + k_3 v(l, t); \quad (3)$$

$$dM_\varphi = n_1 \Delta s + n_2 \dot{\Delta s} + n_3 v(l, t),$$

где

$$k_1 = \left( \frac{\partial P_x}{\partial s} \right)_0, \quad k_2 = \left( \frac{\partial P_x}{\partial \dot{s}} \right)_0, \quad k_3 = \left( \frac{\partial P_x}{\partial v} \right)_0, \quad n_1 = \left( \frac{\partial M_\varphi}{\partial s} \right)_0,$$

$$n_2 = \left( \frac{\partial M_\varphi}{\partial \dot{s}} \right)_0, \quad n_3 = \left( \frac{\partial M_\varphi}{\partial v} \right)_0.$$

Коэффициенты  $k_2$ ,  $k_3$  ( $n_2$ ,  $n_3$ ) легко выражаются через коэффициенты  $k_s$ ,  $k_\Omega$  ( $n_s$ ,  $n_\Omega$ ), являющиеся тангенсами углов наклона к характеристикам резания по подаче и скорости резания, и коэффициент  $k_1$  ( $n_1$ ), методика определения которого дана в [10].

Уравнение колебаний осциллятора  $s$  в процессе сверления имеет вид:

$$M_1 \ddot{s} + c_1 \dot{s} + \lambda_1 s = -dP_x, \quad (4)$$

где  $M_1$  — приведенная к точке  $x=l$  масса всего шпиндельного узла станка,  $c_1$ ,  $\lambda_1$  — коэффициенты сил сопротивления и упругости.

В направлении кручения сверло рассматривается как упругий стержень, жестко закрепленный своим верхним концом в патроне шпинделя. Обозначая через  $\varphi(x, t)$  приращение угла поворота сечения сверла, находящегося на расстоянии  $x$  от точки крепления, и поступающая затем обычным образом [27], приходим к уравнению крутильных колебаний сверла:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t}, \quad (5)$$

где  $a = G/\rho$ ,  $b = \eta/\rho$  ( $\eta$  — коэффициент внутреннего трения,  $G$  — модуль сдвига,  $\rho$  — плотность материала сверла).

Краевое условие при  $x=0$  выводится из предположения жесткой связи сверла с осциллятором  $\varphi$ , характеризуемым приведенным к оси вращения  $OO'$  моментом инерции  $J_2$  и коэффициентами сопротивления и жесткости  $c_2$ ,  $\lambda_2$ ; указанное условие имеет вид:

$$J \frac{\partial}{\partial x} \left( G\varphi + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \Big|_{x=0} = \left( J_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda_2 \varphi \right) \Big|_{x=0}, \quad (6)$$

где  $J$  — полярный момент поперечного сечения сверла. Второе краевое условие при  $x=l$  находится из равенства моментов на конце сверла при резании:

$$J \frac{\partial}{\partial x} \left( G\varphi + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \Big|_{x=l} = -dM_\varphi \Big|_{x=l}. \quad (7)$$

Дифференцируя уравнения (5), (6) и (7) по  $t$ , приходим после подстановки в них  $\dot{\varphi} = v/r$  к уравнению относительно  $v$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \quad (8)$$

с крайевыми условиями

$$\frac{J}{\lambda_2} \left( G \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) \Big|_{x=0} = \left( \frac{1}{\omega_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{c_2}{\lambda_2} \frac{\partial v}{\partial t} + v \right) \Big|_{x=0}; \quad (9)$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} \frac{d^2 s}{dt^2} + \delta_1 \frac{ds}{dt} + s + \frac{k_1 m}{\lambda_1} [s(t) - s(t - \tau)] + \frac{k_3}{\lambda_1} v(l, t) = 0; \quad (10)$$

$$\frac{J}{r} \left( G \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)_{x=l} = - \frac{d}{dt} \left\{ n_1 [s(t) - s(t - \tau)] + \right. \\ \left. + n_2 \frac{ds}{dt} + n_3 v \right\}_{x=l}, \quad (11)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — собственные частоты осцилляторов  $s$  и  $\varphi(0, t)$ ;  $\delta_1 = (c_1 + k_2)/\lambda_1$ ,  $\tau = 2\pi r v_0$ .

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Записывая систему дифференциальных уравнений (8)–(11) в классе изображений функций  $v$  и  $s$ , приходим после несложных преобразований к характеристическому уравнению:

$$Q_1(p) \left\{ \left[ \frac{J^2 \rho^2}{\lambda_2 r} p (G + \eta p) + n_3 Q_2(p) \right] \text{sh } \gamma l + J \sqrt{\rho} \left[ \frac{n_3}{\lambda_2} p + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r} Q_2(p) \right] \sqrt{G + \eta p} \text{ch } \gamma l \right\} - \frac{k_3}{\lambda_1} \left[ \frac{J \sqrt{\rho}}{\lambda_2} p \sqrt{G + \eta p} \text{ch } \gamma l + \right. \\ \left. + Q_2(p) \text{sh } \gamma l \right] Q_3(p) = 0, \quad (12)$$

где

$$\gamma = \pm p \sqrt{\rho} / \sqrt{G + \eta p}; \quad (13)$$

$$Q_1(p) = p^2 / \omega_1^2 + \delta_1 p + 1 + (k_1 m / \lambda_1) (1 - e^{-p\tau}); \quad (14)$$

$$Q_2(p) = p^2 / \omega_2^2 + c_2 p / \lambda_2 + 1; \quad (15)$$

$$Q_3(p) = n_1 (1 - e^{-p\tau}) + n_3 p. \quad (16)$$

Левая часть (12) является нечетной функцией  $\gamma$ , поэтому в (13) достаточно рассмотреть лишь положительные значения корня. Характеристическое уравнение (12) довольно сложно и содержит большое число связанных между собой параметров.

Наше исследование на устойчивость проводится для ряда наиболее интересных частных случаев. Выделение областей безвибрационных режимов сверления в каждом конкретном случае производится в пространстве параметров, характеризующих основные механизмы возбуждения этого случая.

*Дискретная идеализация (сверло абсолютно жесткое,  $G = \infty$ ).* В случае дискретной идеализации речь будет идти только о сверлении; тем не менее, полученные результаты целиком применимы к торцевому фрезерованию, а также к торцевому и поперечному резанию (рис. 5), в предположении, что взаимные связи (см. рис. 1) циклов 1 и 2 устранены.

Рассмотрим следующие основные случаи.

а)  $\lambda_1 = \infty$ . Единственной причиной возбуждения в этом случае является отрицательное трение по  $\varphi$ . Условие устойчивости сводится к требованию, чтобы коэффициент  $\delta_2 = (c_2 + r n_3) / \lambda_2$  был положителен.

б)  $\lambda_2 = \infty^*$ . Основными причинами возбуждения в рассматриваемом случае являются запаздывание  $\tau$  и переменные углы резания. Прира-

\* Этот случай рассматривался в [10].

щение осевой составляющей усилия резания  $dP_x$ , здесь целиком определяется приращением подачи  $\Delta s$  и скорости подачи  $\dot{s}$ , так как  $v=0$ :

$$dP_x = k_1 \Delta s + k_2 \dot{s}. \quad (17)$$

При установившемся процессе сверления

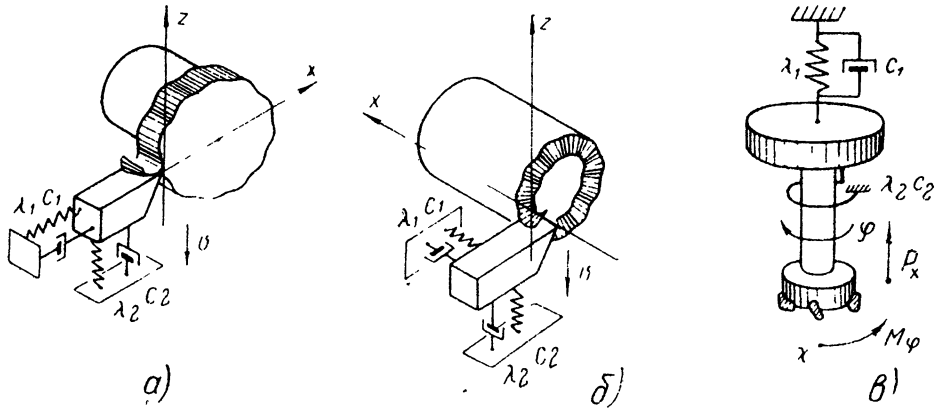


Рис 5 Принципиальные схемы в дискретной идеализации

а) поперечная токарная обработка, б) продольная токарная обработка, в) торцевое фрезерование.

$$\Delta \dot{s}_0 = \Omega \Delta s_0, 2\pi;$$

$$dP_x = \left( k_1 + k_2 \frac{\Omega}{2\pi} \right) \Delta s_0 = k_s \Delta s_0. \quad (18)$$

Отсюда находим, что

$$k_2 = 2\pi (k_s - k_1) \Omega, \quad (19)$$

где  $k_s$  — тангенс угла наклона касательной к кривой  $P_x(s_0)$ , снятой при разных скоростях подачи, т. е. при разных подачах и разных углах резания (рис. 6). Отличие его от  $k_1$  состоит в том, что  $k_1$  опре-

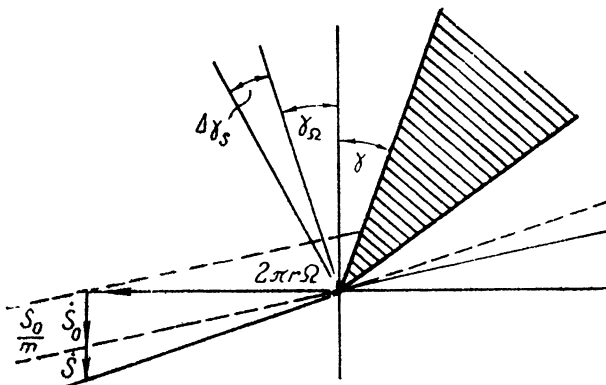


Рис. 6. Изменение переднего угла

$\gamma_0$  — приращение переднего угла при постоянной скорости подачи,  
 $\Delta \gamma_s$  — изменение переднего угла при изменении скорости подачи.

деляется как тангенс угла наклона касательной к кривой  $P_x(s_0)$ , снятой при разных скоростях подачи, но при неизменных действительных углах резания.

Для удобства выделения областей устойчивости по интересующим

нас параметрам в характеристическом уравнении (12) при  $\lambda_2 = \infty$  введем замену  $p\tau = z$ . Тогда

$$\alpha z^2 + (\beta + k)z + 1 + (k_1 m/\lambda_1)(1 - e^{-z}) = 0, \quad (20)$$

где

$$\alpha = 1/\omega_1^2 \tau^2, \quad \beta = c_1/\lambda_1 \tau, \quad k = 2\pi m(k_s - k_1)/\lambda_1.$$

Далее, поступая обычным образом [24, 25], находим параметрическое уравнение кривой  $D$ -разбиения плоскости параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  с  $\Delta = -\omega^3$ , ( $0 \leq \omega < \infty$ ):

$$\alpha = \frac{1 + k_1 m/\lambda_1 (1 - \cos \omega)}{\omega^3};$$

$$\beta = -k - \frac{k_1 m \sin \omega}{\lambda_1 \omega}. \quad (21)$$

При  $\omega = \infty$  имеем особую прямую  $\alpha = 0$ . Окончательный вид  $D$ -разбиения плоскости параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  при  $k = 0$  дан на рис. 7.

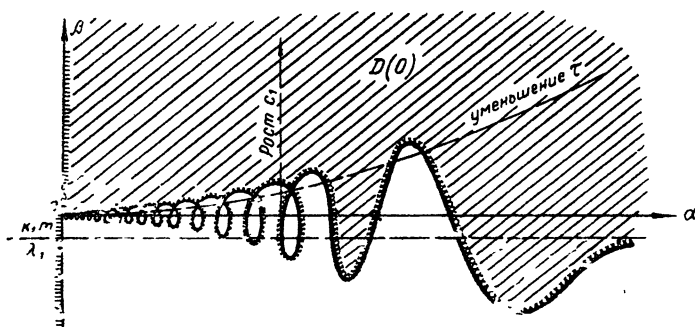


Рис. 7.  $D$ -разбиение плоскости параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\lambda_2 = \infty$ ).

Из системы уравнений (21) при  $k = 0$  легко найти такие значения  $\tau^* \neq 0$ , при которых  $\beta = 0$ :

$$\tau^* = \frac{N \omega_1 \pi}{\sqrt{1 + (k_1 m/\lambda_1) [1 - (-1)^{N+1}]}} \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Из первого уравнения (21) следует, что при любых значениях параметров отношение  $\omega/\omega_1 > 1$ , т. е. частота возбуждаемых колебаний больше частоты собственных колебаний.

Из вида  $D$ -разбиения плоскости параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  (рис. 7) можно сделать следующие выводы.

Область устойчивости зависит от параметра  $k$ . При увеличении параметра  $k$  область устойчивости увеличивается, так как вся кривая  $D$ -разбиения при этом смещается параллельно самой себе вдоль оси  $\beta$  вниз.

Уменьшение запаздывания  $\tau$ , связанное с увеличением скорости резания  $v_0$ , приводит систему к устойчивости. Этот вывод легко следует из зависимости параметров  $\alpha$  и  $\beta$  от  $\tau$ .

Увеличение коэффициента сопротивления  $c_1$  приводит к устойчивым режимам сверления.

в) Запаздывание  $\tau$  мало. При больших скоростях резания, когда запаздывание  $\tau = 2\pi/v_0 t$  становится малым, можно считать, что отношение  $v_0/s_0 \gg 1$  и, следовательно,  $k_2 = n_2 = 0$ .

Основную роль в возбуждении вибраций в этом случае (см. рис. 3) играют параметры  $n_1, k_3$ , характеризующие цикл 1, и параметр  $\delta_2$ , характеризующий наличие отрицательного трения по  $\varphi$ .

Разделив характеристическое уравнение (12) на  $mk_3 n_1/\lambda_1 \lambda_2$  и введя при  $k_2 = n_2 = 0$  параметры

$$\alpha = \lambda_1 \lambda_2 / m n_1 k_3; \quad \beta = \delta_2 \alpha,$$

имеем:

$$\left[ \frac{p^2}{\omega_1^2} + \frac{c_1}{\lambda_1} p + 1 + \frac{k_1 m}{\lambda_1} (1 - e^{-p\tau}) \right] \left[ \left( \frac{p^2}{\omega_2^2} + 1 \right) \alpha + \beta p \right] - p (1 - e^{-p\tau}) = 0. \quad (23)$$

Из системы уравнений, получающейся приравниванием нулю вещественной и мнимой частей характеристического уравнения (23) (при подстановке в него  $p = i\omega$ ), следует, что

$$\alpha = \frac{\omega}{(1 - \omega^2/\omega_1^2)} \alpha_1; \quad \beta = \beta_1, \quad (24)$$

где

$$\alpha_1 = \text{Re } L(i\omega); \quad \beta_1 = \text{Im } L(i\omega);$$

$$L(p) = i\overline{P_1(p)} / |P_1(p)|^2 (1 - e^{-p\tau}). \quad (25)$$

Направление штриховки определяется знаком выражения

$$\Delta = |P_1(i\omega)|^2 \omega (1 - \omega^2/\omega_1^2). \quad (26)$$

Для построения кривой  $D$ -разбиения плоскости параметров  $\alpha, \beta$  поступим следующим образом. Сначала в комплексной плоскости  $\alpha_1, \beta_1$  при  $k_1 m/\lambda_1 \ll 1$  (что практически оправдано [10]) строим вспомогательную кривую  $L(i\omega)$  (рис. 8); затем умножаем  $\text{Re } L(i\omega)$  на выражение  $\omega / (1 - \omega^2/\omega_1^2)$ . Полученная кривая (рис. 9) и является искомым  $D$ -разбиением.

Прямую  $\alpha = 0$  следует штриховать двойной штриховкой, так как она представляет собой две совпавшие особые прямые, соответствующие значениям  $p = 0$  и  $p = \infty$ .

Из  $D$ -разбиения (рис. 9) следует, что при  $\delta_2 < \delta_2^*$  процесс сверления неустойчив при любых значениях параметров  $n_1, k_3$ ; при  $\delta_2 > \delta_2^*$

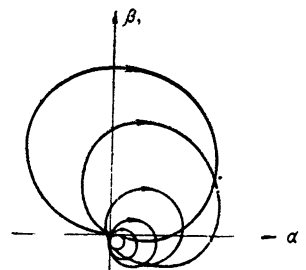


Рис. 8.

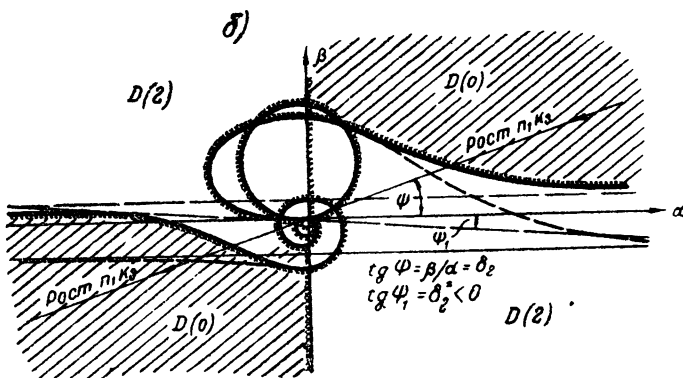


Рис. 9.  $D$ -разбиение плоскости параметров  $\alpha, \beta$  ( $k_2 = n_2 = 0$ ).



с ростом  $|n_1 k_3|$  в станке происходит возбуждение вибраций (последнее ясно из того, что с увеличением произведения  $|n_1 k_3|$  точка плоскости  $\alpha, \beta$  при фиксированных значениях параметров  $\lambda_1, \lambda_2, m$  и  $\delta_2$ , перемещаясь по прямой  $\beta = \delta_2 \alpha$ , входит в область неустойчивости); демпфирование крутильных колебаний при сверлении приводит к демпфированию продольных колебаний.

*Распределенная идеализация (глубокое сверление,  $G \neq \infty$ ).* Сверление принято называть глубоким в том случае, когда длина сверла или борштанги много больше его диаметра. При глубоком сверлении, принципиальная схема которого дана на рис. 10, большую роль в воз-

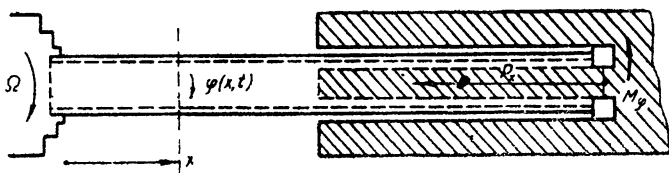


Рис. 10. Принципиальная схема глубокого сверления.

буждении вибраций играет запаздывание  $\tau$ , равное времени пробега крутильной упругой волны сверла длины  $l$ . При  $l/d \gg 1$  ( $d$ —диаметр сверла) отношение  $\tau/r = v_0 m \sqrt{\rho} l / 2\pi \sqrt{G} d$  для обычных режимов сверления также много больше единицы; поэтому роль запаздывания  $\tau$ , равного  $1/m$ -ой части оборота борштанги, в рассматриваемом случае незначительна и в дальнейшем не учитывается. Кроме того, передняя бабка станка в дальнейшем полагается абсолютно жесткой, а шпиндель вращающимся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \infty$ ).

При сделанных выше предположениях характеристическое уравнение (12) примет вид:

$$\sqrt{\rho} \operatorname{sh} \gamma l + \mu \sqrt{G + \eta p} \operatorname{ch} \gamma l = 0, \quad (27)$$

где  $\mu = J\rho/2\pi r n_3$ .

Построение диаграммы Вышнеградского на плоскости параметров  $\mu, l$  произведем численным путем, используя зависимость граничной точки  $\mu^*$   $D$ -разбиения плоскости параметра  $\mu$  от длины борштанги  $l$ . Разрешая характеристическое уравнение (27) относительно параметра  $\mu$ , имеем:

$$\mu = - \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{G + \eta p}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\rho} p}{\sqrt{G + \eta p}} l. \quad (28)$$

Построение  $D$ -разбиения плоскости параметра  $\mu$  при изменении  $\omega$  в интервале  $0 \leq \omega < \infty$  произведем по шагам (рис. 11). Точке  $\mu = \infty$  соответствует неквазиполном  $\sqrt{G + \eta p} \operatorname{ch} \gamma l$ , имеющий столько же корней справа от мнимой оси, сколько их имеет  $\sqrt{G + \eta p}$ . Последний, как видно из построения первого шага кривой (рис. 11а), не имеет ни одного корня справа от мнимой оси. Поэтому заштрихованная область действительно является областью устойчивости. Из построения кривой  $D$ -разбиения по параметру  $\mu$  следует, что с уменьшением затухания  $\eta$  область устойчивости уменьшается, а при  $\eta = 0$  устойчивость возможна лишь при  $\mu > 0$ . Окончательный вид диаграммы Вышнеградского на плоскости параметров  $\mu, l$  при  $\rho = 0,21 \text{ кг} \cdot \text{мин}^2 \cdot \text{м}^{-4}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^{10} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $\eta = 10^1, 10^4 \text{ кг} \cdot \text{мин} \cdot \text{м}^{-2}$  дан на рис. 12. Области устойчивости на диаграмме выделены штриховкой. Зависимость частоты возбуждения от длины борштанги  $l$  дана на рис. 13.

Из диаграммы Вышнеградского следует, что при  $n_3 > 0$  сверление происходит в безвибрационном режиме при любых значениях параметров  $l$  и  $\eta$ ; при  $n_3 < 0$  увеличение длины борштанги  $l$  приводит к возбуждению вибраций, тогда как уменьшение параметра  $\mu$  и увеличение затухания  $\eta$  ведет к их гашению.

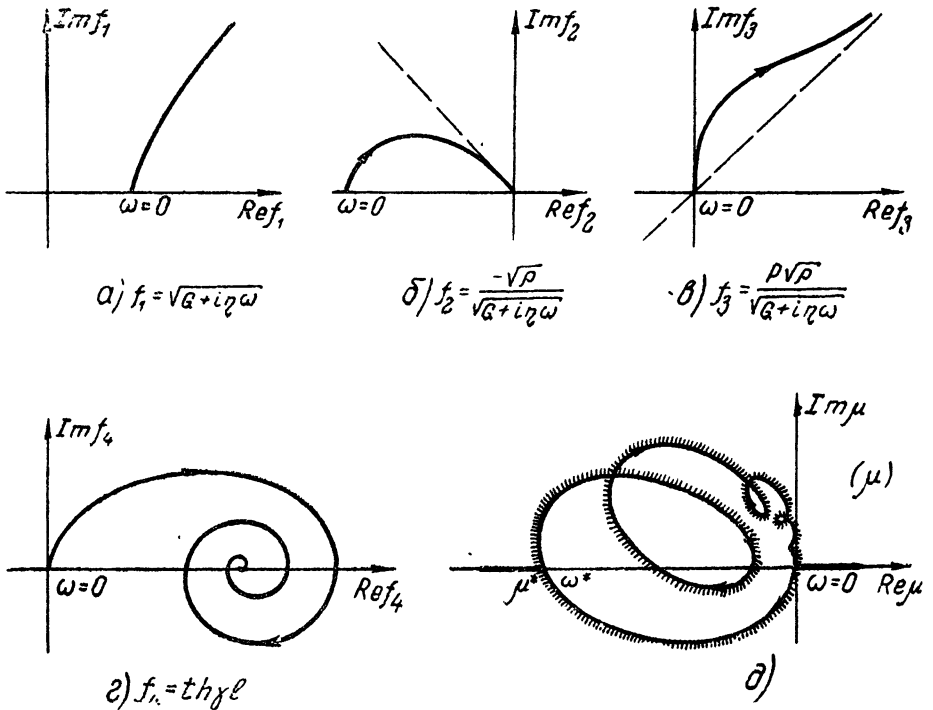


Рис. 11. Построение  $D$ -разбиения плоскости параметра  $\mu$ .

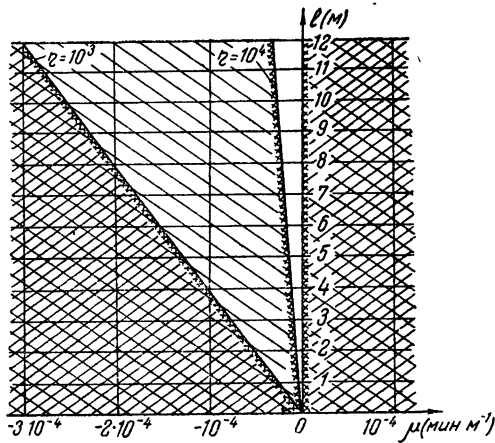


Рис. 12. Диаграмма Вышнеградского по параметрам  $\mu$ ,  $l$ .

Из перечисленных способов гашения вибраций при глубоком сверлении практически наиболее интересен последний (гашение за счет  $\eta$ ). Как известно [21, 23], он с успехом применялся при гашении крутильных колебаний длинных борштанг при глубоком сверлении в Англии и крутильных колебаний шпинделей с анков в Германии.

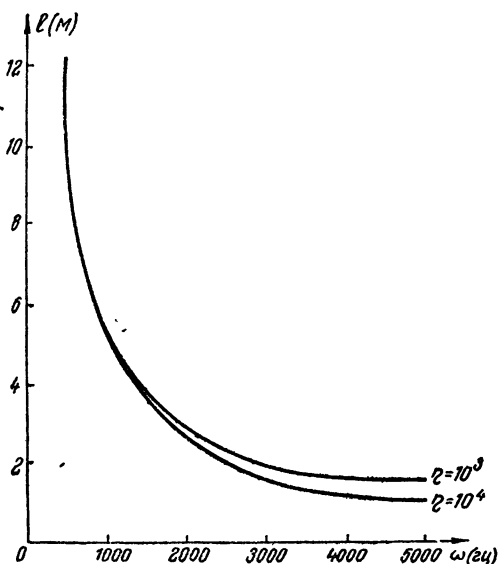


Рис 13. Зависимость частоты возбуждения вибраций от длины борштагни  $l$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Каширин, Исследование вибраций при резании металла, изд. АН СССР, М., 1944.
2. R. N. Arnold, Engineer, **180**, 379, 355 (1945).
3. В. А. Кривоухов, Высокочастотные вибрации резца при точении, Оборонгиз, М., 1956.
4. Л. С. Мурашкин, Автореферат диссертации „Исследование динамики процесса резания“, ЛПИ, 1955.
5. В. В. Зарс, Изв. АН Латв. ССР, **111**, 10, 103 (1956).
6. В. А. Кудинов, Передовая технология машиностроения, изд. АН СССР, М., 355, 1955.
7. И. Тлустый, Автоколебания в металлорежущих станках, Машгиз, М., 1956.
8. Н. А. Дроздов, Станки и инструмент, **22**, 10 (1937).
9. И. С. Амосов, Сб. Точность механической обработки и пути ее повышения, Машгиз, М.—Л., 414, 1951.
10. S. A. Tobias, W. Fishwick, Engineer, **205**, 414 (1958).
11. S. A. Tobias, W. Fishwick, Trans. ASME, **80**, 1079 (1958).
12. И. М. Ильницкий, Колебания в металлорежущих станках и пути их устранения, Машгиз, М., 1958.
13. И. С. Штейнберг, Вестник металлопромышленности, **12—13**, 82 (1936).
14. И. С. Штейнберг, Устранение вибраций, возникающих при резании металлов на токарном станке, Машгиз, М., 1947.
15. Д. Н. Решетов, З. М. Левина, Сб. Исследование колебаний металлорежущих станков при резании металлов, Машгиз, М., 87, 1958.
16. А. П. Соколовский, Жесткость в технологии машиностроения, Машгиз, М.—Л., 1946.
17. К. А. Кудинов, Исследование колебаний металлорежущих станков при резании металлов, Машгиз, М., 29, 251, 1958.
18. Д. И. Рыжков, Передовая технология машиностроения, изд. АН СССР, М., 1955.
19. Д. И. Рыжков, Влияние материала инструмента на вибрации при точении, М., 1958.
20. Н. А. Минский, Диссертация, Станкостр. ин-т, М., 1954.
21. Экспресс-информация, СТС, вып. 203, 3, 1956; СТС, вып. 24, 5, 1957.
22. J. E. Plainevaux, Mécanique, **40**, 382 (1956).
23. F. W. Lucht, Tooling and Prod., **21**, 71 (1956).
24. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛВБК, М., 1949.
25. Ю. И. Неймарк, Прикладная математика и механика, **13**, 349 (1949).
26. Ю. И. Неймарк, Ученые записки ГГУ, **28**, 118 (1955).
27. А. К. Кац, Труды сейсмологического ин-та, изд. АН СССР, М., 75, 11 (1936).