К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

И. Н. Печорина

Если динамика системы регулирования может быть описана уравнениями вида

$$dx/dt = f_1(x) + a_{12}y + a_{13}z;$$
$$dy/dt = f_2(x) + a_{22}y + a_{23}z;$$
$$dz/dt = f_3(x) + a_{32}y + a_{33}z,$$

то, согласно [1], устойчивость данной системы можно проверять при помощи неравенства

$$4k_2c(x)[a(x) - k_1] - \{c(x)(1 + k_2)/k_1 + k_2[a(x) - k_1]k_1 - k_2b(x)\}^2 > 0. \tag{1}$$

Здесь $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — коэффициенты уравнения, составленного на основании матрицы

$$-\begin{vmatrix} \frac{f_1(x)}{x} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ \frac{f_2(x)}{x} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ \frac{f_3(x)}{x} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x);$$

k_1 и k_2 — положительные постоянные числа.

Проверка устойчивости при помощи неравенства (1) может производиться при любых возмущениях системы регулирования. Однако, практическое применение неравенства неудобно. Для исследования устойчивости системы нужно подобрать два числа k_1 и k_2, которые, будучи вставлены в выражение (1), обеспечат неравенство. В настоящей работе произведено преобразование выражения (1) таким образом, что использование этого неравенства для расчетов становится вполне возможным.

Будем считать, что $a(x) > 0$, $b(x) > 0$, $c(x) > 0$. Это условие обычно удовлетворяется на практике. Тогда выражение (1) можно представить в следующем виде:

$$4c(x)A(x)k_2 - \{c(x) + k_2[A(x) - (k_1b(x) - c(x))]\}^2 > 0.$$

Здесь $A(x) = k_1^2[a(x) - k_1]$.

Написанное выше неравенство может существовать, если $A(x) > 0$ и $k_1b(x) - c(x) > 0$. Следовательно, первое условие устойчивости нелинейной системы регулирования третьего порядка заданного класса можно сформулировать в виде неравенства:

$$a(x) > k_1 > c(x)/b(x), \tag{2}$$

т. е. $[a(x)]_{\text{мин}} > [c(x)/b(x)]_{\text{макс}}$. Это выражение аналогично критерию устойчивости Гурвица.

Определение величины постоянного числа k_1, которое разграничивает функции $a(x)$ и $c(x)/b(x)$, не является достаточным для исследования системы регулирования. Для проверки устойчивости необходимо выяснить значение постоянного числа k_2.

Рассмотрим многочлен

$$F(k_2) = 4c(x)A(x)k_2 - \{c(x) + k_2[A(x) - (k_1b(x) - c(x))]\}^2$$

и найдем значения числа k_2, при которых функция $F(\kappa_2) = 0$. Для того, чтобы $F(k_2) = 0$ величина κ_2 должна стать равной

$$k_2' = c(x)\left[\sqrt{k_1^2[a(x) - k_1]} + \sqrt{k_1b(x) - c(x)}\right]^{-2}$$

или

$$k_2'' = c(x)\left[\sqrt{k_1^2[a(x) - k_1]} - \sqrt{k_1b(x) - c(x)}\right]^{-2}.$$

Неравенство $F(k_2) > 0$ возможно только при условии

$$c(x)\left[\sqrt{k_1^2[a(x) - k_1]} + \sqrt{k_1b(x) - c(x)}\right]^{-2} < k_2 <$$
$$< c(x)\left[\sqrt{k_1^2[a(x) - k_1]} - \sqrt{k_1b(x) - c(x)}\right]^{-2}, \tag{3}$$

Если обозначить

$$\varphi_1(x) = k_1^2\,[a(x) - k_1]/c(x);$$
$$\varphi_2(x) = [k_1 b(x) - c(x)]/c(x), \qquad (4)$$

то можно записать:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + 2\sqrt{\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)} > k_2^{-1} > \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - 2\sqrt{\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)}. \qquad (5)$$

Неравенство (5) показывает, что диапазон изменения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в устойчивой системе регулирования ограничен. Использование неравенств (2) и (5) не представляет затруднений и может быть рекомендовано для практических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Красовский, Прикладная математика и механика, **17**, 339 (1953).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
22 января 1959 г.