

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАЧЕСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ „ГРУБОЙ“ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПУТЕМ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ*

Л. Н. Белюстина

Доказывается принципиальная возможность определения конечным числом шагов (операций) качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории для «грубой» динамической системы, исходя из приближенного построения особых траекторий. Предложенный конкретный способ построения особых траекторий позволяет оценить количественные характеристики областей притяжения предельных циклов и состояний равновесия.

Во многих практически важных физических задачах при выяснении возможных режимов работы той или иной системы, а также при определении параметров системы, соответствующих наивыгоднейшим режимам работы, вопрос сводится к качественному исследованию системы дифференциальных уравнений на фазовой плоскости или на фазовой поверхности (например, цилиндрической), которая может быть развернута на плоскость. При этом в первую очередь выясняется вопрос о качественной структуре разбиения плоскости на траектории рассматриваемой системы, а именно, вопрос о существовании особых траекторий (состояний равновесия, полусепаратрис и предельных циклов) и их взаимном расположении. Вместе с тем, при качественном исследовании очень часто представляют интерес количественные характеристики особых траекторий (размер предельных циклов, размеры областей притяжения состояний равновесия и предельных циклов, ограничиваемых полусепаратрисами, и т. д.).

В настоящей работе рассматривается вопрос об определении качественной структуры разбиения плоскости на траектории, исходя из приближенного построения особых траекторий; при этом численный метод качественного интегрирования может быть успешно применен для установления количественных характеристик особых траекторий, в особенности при использовании электронных вычислительных машин.

1. Рассмотрим динамическую систему, определенную двумя уравнениями первого порядка:

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y), \quad (1)$$

и измененную систему

$$dx/dt = P(x, y) + p(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) + q(x, y), \quad (2)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ — функции класса C^1 , определенные в области G плоскости x, y . Указанная область ограничена простой замкнутой кривой g , являющейся циклом без контакта**.

* Доклад на научной конференции Горьковского университета, посвященной 40-летию Великой Октябрьской Социалистической революции (20.XII.1957).

** Без существенных изменений в дальнейшем изложении, границу можно было бы заменить более общим типом границ, а именно, рассмотренной в [1] границей, состоящей из конечного числа чередующихся дуг траекторий и дуг без контакта.

Качественную структуру разбиения фазовой плоскости на траектории, как известно [2], определяют особые (орбитно неустойчивые) траектории: состояния равновесия, сепаратрисы, замкнутые траектории (предельные циклы). Качественная структура разбиения плоскости на траектории системы (1) однозначно определена, если дано описание, в котором перечислены все особые траектории этой системы и указано их взаиморасположение. Такое описание называется „полной схемой“ * [1] разбиения на траектории, определенного системой (1).

В работе [3] (см. также [4]) дано определение „грубых“ динамических систем (1) в отличие от систем „негрубых“.

Будем предполагать систему (1) грубой. Как известно [3, 4], все состояния равновесия и предельные циклы грубой системы—простые и полусепаратрисы не идут из седла в седло, откуда следует, что число особых траекторий системы (1) конечно.

В дальнейшем существенную роль играет понятие канонической окрестности состояния равновесия и предельного цикла, которое дается ниже.

Область σ , содержащая данное состояние равновесия типа фокус или узел (или данный предельный цикл), называется *канонической окрестностью* этого состояния равновесия (этого предельного цикла), если удовлетворяются следующие условия: а) кроме данного состояния равновесия (или соответственно данного предельного цикла) в этой области не лежит целиком ни одной особой траектории, б) если особая траектория входит в эту область при возрастании (убывании) t , то при дальнейшем возрастании (убывании) t она больше уже не может из нее выйти.

Канонической окрестностью состояния равновесия типа седло называется круговая окрестность этого седла, удовлетворяющая указанным выше условиям а) и б).

Дадим геометрические иллюстрации этого определения.

Очевидно, что область, содержащая только один предельный цикл C_0 , не содержащая состояний равновесия и ограниченная двумя циклами без контакта, является канонической окрестностью цикла C_0 . Стремящиеся к этому циклу полусепаратрисы S_1, S_2, S_3 седел показаны на рис. 1а. На рис. 1б представлены каноническая окрестность состояния равновесия A типа фокус или узел и стремящиеся к этому состоянию равновесия полусепаратрисы седел S_1, S_2, S_3 . Каноническую окрестность седла (рис. 1в) не могут пересекать особые траектории, входящие и выходящие из нее, в том числе входящие и выходящие из нее дуги полусепаратрис этого седла. Представленные на рис. 1в окрестности σ_1 и σ_2 являются каноническими окрестностями седла B , а окрестность σ_3 не является канонической.

На границе канонической окрестности может лежать целиком особая траектория. Так, если наряду с C_0 существуют два ближайших к нему цикла C_1 и C_2 , расположенные один внутри цикла C_0 , другой—вне его (рис. 1г), то двусвязная область, ограниченная циклами C_1 и C_2 , будет максимальной канонической окрестностью цикла C_0 . Односвязная область, ограниченная циклом C_1 (рис. 1г), ближайшим к состоянию равновесия A типа фокус или узел, является наибольшей канонической окрестностью этого состояния равновесия.

* Полная схема разбиения на траектории для системы (1) в области с границей, состоящей из конечного числа чередующихся дуг траекторий и дуг без контакта, задана [1], если перечислены все особые траектории и полутраектории, граничные дуги без контакта и граничные дуги траекторий этого разбиения и даны: 1) схема границы области G , 2) так называемые «полные схемы» всех состояний равновесия, 3) «полные схемы» всех ω , α , θ -предельных континуумов, 4) указано взаимное расположение всех так называемых «свободных» ω , α , θ -предельных континуумов.

Согласно [1], описание взаимного расположения особых траекторий, т. е. „полная схема“ разбиения на траектории, определенного „грубой“ системой (1), в области G с границей, являющейся циклом без контакта, дана, если перечислены все состояния равновесия, предельные циклы и полусепаратрисы седел (их число конечно) и известны: 1) „схема“ границы области G (т. е. указан порядок, в котором

ее пересекают* полусепаратрисы седел), 2) „полные схемы“ всех состояний равновесия (т. е. для каждого состояния равновесия указан порядок, в котором полусепаратрисы тех или иных седел пересекают его каноническую окрестность; см., например, рис. 1б), 3) „полные схемы“ всех „несвободных“ циклов (т. е. для каждого предельного цикла, к которому стремится, по крайней мере, одна полусепаратриса, указан порядок, в котором полусепаратрисы пересекают его каноническую окрестность; см., например, рис. 1а), 4) указано взаимное

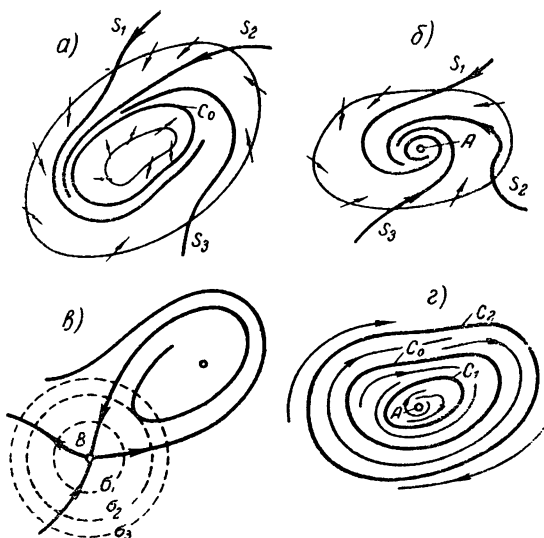


Рис. 1.

расположение всех „свободных“ циклов (т. е. указано взаимное расположение тех предельных циклов, к которым не стремится ни одна полусепаратриса седла).

Наибольшие канонические окрестности для каждого из состояний равновесия и предельных циклов грубой системы (1) обозначим через C_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, \Lambda$), где Λ — общее число состояний равновесия и предельных циклов системы; нижнюю границу наименьших радиусов окрестностей C_λ обозначим через γ^* . Для грубой системы (1) γ^* , очевидно, больше нуля.

Величина γ^* характеризует „грубость“ взаимного расположения особых траекторий данной грубой системы (1). По предположению, границей области G является цикл без контакта g ; стало быть, существует расположенная в G окрестность кривой g радиуса $\gamma^{**} > 0$, не содержащая особых траекторий системы (1), которые бы целиком лежали в ней, либо* которые входили и выходили бы из нее.

Величину

$$\gamma_0 = \inf \{ \gamma^*, \gamma^{**} \} \quad (3)$$

назовем *геометрической мерой грубости* качественной структуры разбиения на траектории данной грубой системы (1) в области G .

По поводу геометрической меры грубости γ_0 заметим следующее. Предположим, что система (1) (система D) такова, что существует последовательность $D_1, D_2, \dots, D_i, \dots$ систем вида (1), для которых с ростом i геометрическая мера грубости γ_{0i} уменьшается. Стремление к нулю γ_{0i} будет означать, что для соответствующей системы D_i

* Мы будем говорить о пересечении траекториями системы (1) границы g области G , имея в виду, что поскольку g — цикл без контакта, а система (1) грубая, то существует некоторая расположенная вне области G и отличная от нуля окрестность g , в которой траектории системы (1) могут быть непрерывно продолжены.

близко к нулю 1) либо расстояние между двумя и более состояниями равновесия или расстояние между состоянием равновесия и предельным циклом (так что состояния равновесия или же состояния равновесия и предельный цикл близки к слиянию в сложное состояние равновесия), 2) либо расстояние между двумя и более предельными циклами (так что эти предельные циклы близки к слиянию в сложный предельный цикл, т. е. цикл кратности ≥ 2), 3) либо расстояние между состоянием равновесия типа седло и особой траекторией, входящей и выходящей из его окрестности (так что близки к слиянию две или более полусепаратрисы в одну сепаратрису, идущую из седла в седло).

Таким образом, при $\gamma_0 \rightarrow 0$ грубая система (1) стремится к негрубой системе (1) степени ≥ 1 [5]*. Для любой негрубой системы считаем $\gamma_0 = 0$.

В настоящей работе не рассматривается вопрос об определении величины геометрической меры грубости из правых частей системы (1). Заметим также, что понятие геометрической меры грубости качественной структуры может быть аналогичным образом введено и в системах с числом степеней свободы, большим одного. Грубость системы (1) также может быть охарактеризована некоторой величиной δ_0 — так называемой „аналитической мерой грубости“ системы (1), но на этом мы здесь останавливаться не будем**.

2. Непрерывную кривую $\Delta(t)$, определенную равенствами $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$, назовем γ -приближением кривой $L(t)$, определенной равенствами $x = x(t)$, $y = y(t)$ в плоскости x, y для $0 \leq t \leq T$, если для всякого $t \leq T$ выполняется неравенство

$$\rho(\Delta, L) \equiv \sqrt{2} |\bar{z} - z| < \gamma, \tag{4}$$

где $|\bar{z} - z|$ есть наибольшее из $|\bar{x} - x|$ и $|\bar{y} - y|$.

Приведем один из возможных способов построения γ -приближения дуги траектории длины $\geq L$, основывающийся на построении ε -решений*** системы (1) ограниченной длины, не расходящихся больше, чем на γ .

Принимая за параметр t длину дуги, для двух ε -решений**** системы (1) длины $\leq L$, определяемых равенствами $x = x(t, x_0)$, $y = y(t, x_0)$ и $\bar{x} = \bar{x}(t, x_0)$, $\bar{y} = \bar{y}(t, x_0)$ и удовлетворяющих начальным условиям $x_0 = x(0, x_0)$, $y_0 = y(0, y_0)$, $\bar{x}_0 = \bar{x}(0, x_0)$, $\bar{y}_0 = \bar{y}(0, y_0)$, оценим величину $|\bar{z} - z|$. Применяя известное неравенство (см. [7], гл. 1), получаем:

$$|\bar{z} - z| \leq (2\varepsilon L + |\bar{z}_0 - z_0|) e^{KL}, \tag{5}$$

* Отметим, что в примечании М. И. Минкевича к переводу [6], (см. [6], стр. 103) дано, по существу, неверное пояснение понятия степени негрубости, введенного в работе [2]. Негрубые системы степени ≥ 1 определяются, согласно [2], как относительно грубые и во всяком случае не могут быть определены, исходя из «порядка малости добавок», о которых говорится в этом примечании.

** Мы скажем, что δ_0 есть аналитическая мера грубости системы (1), если любая система (2), для которой выполняются неравенства

$$|p| < \delta_0, |q| < \delta_0, |p'_x| < \delta_0, |p'_y| < \delta_0, |q'_x| < \delta_0, |q'_y| < \delta_0,$$

является грубой, и не существует значения $\delta^* > \delta_0$, для которого это было бы справедливо

*** ε -решение системы (1) является решением системы (1) с ошибкой ω ($|\omega| < \varepsilon$), т. е. решением системы (2), в которой имеются условия, наложенные только на p и q , а именно, $|p| < \varepsilon$, $|q| < \varepsilon$, и нет условий на их производные.

**** Решение системы (1) есть ε -решение этой системы при $\varepsilon = 0$.

где K — наибольшее из значений первых частных производных правых частей системы (1) и $|\bar{z}_0 - z_0|$ — наибольшее из $|\bar{x}_0 - x_0|$, $|\bar{y}_0 - y_0|$. Выбирая

$$\varepsilon < \gamma / \sqrt{2} (2L + 1) e^{KL}, \quad (6)$$

имеем: $|\bar{z} - z| < \gamma / \sqrt{2}$, как только

$$|\bar{z}_0 - z_0| < \varepsilon. \quad (7)$$

Для построения ε -решения системы (1) можно поступить следующим образом (см. [8], § 1). В части $\bar{\Gamma}$ области G , не содержащей состояний равновесия, вместо системы (1) рассматривается система

$$dx/dt = P(x, y) / \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad dy/dt = Q(x, y) / \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (8)$$

получающаяся из системы (1) заменой переменных $d\tau/dt = \sqrt{P^2 + Q^2} > 0$. Интегральные кривые систем (1) и (8) совпадают. Геометрически правые части системы (8) при $x = x_1$, $y = y_1$ определяют синус и косинус касательной к интегральной кривой систем (1) и (8) в точке $A_1(x_1, y_1)$ (направляющие косинусы поля, задаваемого в $\bar{\Gamma}$ системами (1) и (8)). Согласно [8], для построения в $\bar{\Gamma}$ ε -решений системы (8) достаточно иметь сетку со стороной квадрата d , удовлетворяющей неравенству:

$$3\sqrt{2}d < r_{\varepsilon}(\bar{\Gamma}), \quad (9)$$

и строить ε -решения как ломаные Эйлера. Величина $r_{\varepsilon}(\bar{\Gamma})$ имеет оценку снизу:

$$r_{\varepsilon}(\bar{\Gamma}) \geq \varepsilon m^3 / 4 \sqrt{2} LM^2,$$

где $m^2 = \inf \{1, P^2 + Q^2\}$ в $\bar{\Gamma}$, $L = \sup \{P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y, 1\}$ и $M = \sup \{1, |P|, |Q|\}$ в G . Ломаные Эйлера в исходной точке имеют направление, совпадающее с направлением поля; они меняют направление лишь при пересечении с границами квадратов, причем после каждой точки пересечения их направление совпадает с направлением поля в точке пересечения*.

3. Рассмотрим конкретную грубую систему (1) с некоторой фиксированной геометрической мерой грубости $\gamma_0 > 0$. Эту систему будем обозначать „система (1) γ_0 “.

Прежде всего заметим, что открытые $\gamma_0/4$ -окрестности $\gamma_0/4$ -приближений состояний равновесия и предельных циклов системы (1) $_{\gamma_0}$ не пересекаются. Действительно, в противном случае расстояние между какими-либо состояниями равновесия, предельными циклами или состоянием равновесия и предельным циклом было бы меньше γ_0 , что невозможно по определению γ_0 .

В силу сказанного построение $\gamma_0/4$ -приближений состояний равновесия и предельных циклов достаточно для установления той части схемы системы (1) $_{\gamma_0}$, которая связана только с существованием состояний равновесия и предельных циклов и с взаиморасположением состояний равновесия и предельных циклов.

Определение „полных схем“ состояний равновесия и „несвободных“ циклов требует, вместе с тем, построения таких приближений

* Поскольку в данной работе строятся отдельные ε -решения, сетка квадратов может быть заменена цепью квадратов (одним из углов, присоединяемых в точках ломаной Эйлера). Это изменение облегчает программирование и уменьшает число необходимых операций на электронных цифровых машинах.

частей полусепаратрис седел, которые бы для каждого из этих состояний равновесия и предельных циклов устанавливали, в каком порядке полусепаратрисы седел пересекают границы их канонических окрестностей.

Проведем отдельно построение приближений состояний равновесия, полусепаратрис и предельных циклов, которые были бы достаточны для определения полной схемы разбиения на траектории грубой системы $(1)_{\gamma_0}$. В тех случаях, когда это не оговорено особо, точностью вычислений интересоваться не будем, считая ее достаточной для поставленной цели.

а) *Состояния равновесия.* Координаты состояний равновесия системы $(1)_{\gamma_0}$ определяются равенствами $P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0$. Построение в области G кривых $P = 0$ и $Q = 0$ по точкам, расстояние между которыми обеспечивает * выделение всех общих точек этих кривых, находящихся на расстоянии $\geq \gamma_0$, дает некоторые приближения для *всех* состояний равновесия системы $(1)_{\gamma_0}$. Эти приближения достаточны для перечисления и указания взаимного расположения состояний равновесия системы $(1)_{\gamma_0}$. Координаты перечисленных состояний равновесия всегда могут быть уточнены (с точностью, на порядок большей точности γ_0 и достаточной** для того, чтобы определить характер и устойчивость состояния равновесия по корням соответствующих характеристических уравнений и наклоны сепаратрис в седле по формулам [4,11]).

Пусть рассматриваемая система $(1)_{\gamma_0}$ имеет n_1 состояний равновесия A_i ($i = 1, \dots, n_1$) типа фокус или узел и n_2 состояний равновесия B_j ($j = 1, 2, \dots, n_2$) типа седло.

Выделим $\gamma_0/2$ -окрестности каждого из состояний равновесия, обозначая их соответственно через $d_{\gamma_0/2}(A_i)$ и $d_{\gamma_0/2}(B_j)$.

б) *Полусепаратрисы седел.* Каждая полусепаратриса седла B_j строится, начиная от состояния равновесия, из которого она выходит с ростом или уменьшением t .

Приведем построение некоторого γ -приближения конечной части полусепаратрисы S длины L . Построение, выбрав ε удовлетворяющим неравенству (6), выполним по частям (см. рис. 2).

1) Построение в некоторой окрестности σ_1 седла B_j $\varepsilon/2$ -приближения части полусепаратрисы S , пересекающей окрестность σ_1 . При этом $\varepsilon/2$ -приближение находится методом последовательных приближений. Обозначим через N точку пересечения $\varepsilon/2$ -приближения полусепаратрисы с границей окрестности σ_1 .

2) Построение в области $G - \sigma_1$ ε -решения системы, проходящего через точку N и являющегося γ -приближением дуги полусепаратрисы S длины $\geq L$.

Построение 1. Линейной заменой переменных $\xi = c_1x + y, \eta = c_2x + y$ уравнение, соответствующее системе $(1)_{\gamma_0}$, в окрестности седла B_j приводится к виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-\lambda\eta + \lambda_1^{-1}(c_2P_2 + Q_2)}{\xi + \lambda_1^{-1}(c_1P_2 + Q_2)},$$

где $\lambda = -\lambda_2/\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$ — корни характеристического уравнения для седла B_j . Направлениям сепаратрис в седле $y_1 = c_1x$ и $y_2 = c_2x$ соот-

* Интервалы по x, y , достаточные для построения нужного числа точек кривых $P = 0, Q = 0$, определяются величиной γ_0 .

** Требования к точности определения координат состояний равновесия повышаются для меньших значений δ_0 — аналитической меры «грубости» системы $(1)_{\gamma_0}$. (см. сноску ** на стр. 641).

ветствуют в новых координатах направления $\xi = 0$ и $\eta = 0$. В окрестности седла ищем решение в виде:

$$\eta = f_1(\xi); \quad \xi = f_2(\eta).$$

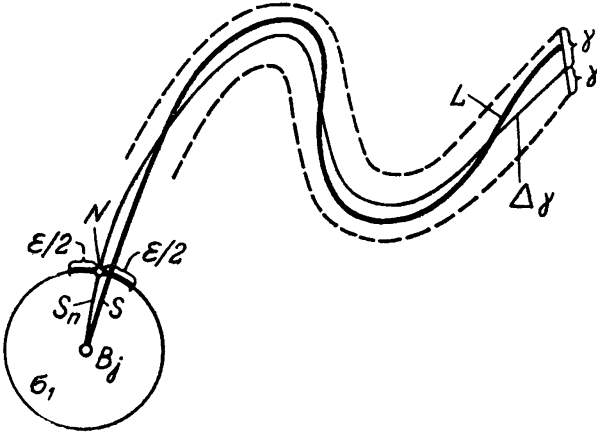


Рис. 2.

Делая замену переменных $\eta = u \xi$, представим уравнение в виде [9]:

$$\xi \frac{du}{d\xi} = -(\lambda + 1)u + \xi F_1(\xi) + u F_2(\xi, u). \quad (10)$$

Решение $u = u(\xi)$ уравнения (10) ищем методом последовательных приближений; тогда n -ое приближение

$$u_n = \xi^{-(\lambda+1)} \int_0^\xi [F_1(t) + u_{n-1} t^{-1} F_2(t, u_{n-1})] t^{\lambda+1} dt.$$

Решение существует при ξ_0, u_0 , удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{M_2}{\lambda + 2} < 1; \quad \frac{M_1}{\lambda + 2} \left[\frac{1}{1 - M_2(\lambda + 2)^{-1}} \right] \xi_0 < u_0, \quad (11)$$

где M_1 и M_2 — соответственно верхние грани функций $\xi F_1(\xi) + u F_2(\xi, u)$ и $\partial [u F_2(\xi, u)] / \partial u$ при $|\xi| \leq \xi_0$ и $|\eta| \leq \eta_0$.

Неравенства (11) определяют максимальный размер окрестности σ_1 седла B_j , принадлежащей окрестности $d_{\eta, 2}(B_j)$, в которой может быть применен метод последовательных приближений. Достаточным является

[10] приближение u_n , для которого $|u_n(\xi) - u_{n-1}(\xi)| = \sum_{i=1}^k A_i \xi^{p_i}$ (k опре-

деляется из условия, что $A_{k+1} \xi^{p_{k+1}}$ меньше точности счета) и значения p_i удовлетворяют неравенствам

$$\frac{M_2}{\lambda + p_i + 1} < 1; \quad M_2 \sum_{i=1}^k \frac{A_i \xi^{p_i + 1}}{p_i + \lambda + 1 - M_2} < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} (|c_2| + 1). \quad (12)$$

Условия (12) выбраны с тем, чтобы на границе окрестности σ_1 в координатах x, y расстояние ρ между полусепаратрисой S и ее n -ым приближением \underline{S}_n было меньше $\epsilon/2$; при этом*

$$\begin{aligned} |u - u_n| &\leq M_2 \sum_{i=1}^k \frac{A_i \xi^{p_i + 1}}{p_i + \lambda + 1 - M_2} < \frac{\eta_1 - \eta_n}{|\xi|} \leq \\ &\leq \frac{1}{|\xi|} \{ |c_2| |x - x_n| + |y - y_n| \} \leq \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}|\xi|} (|c_2| + 1). \end{aligned}$$

Итак, в результате построения 1 на границе окрестности σ_1 седла B_j указана точка N приближения S_n полусепаратрисы S этого седла; соответствующая точке N точка полусепаратрисы S находится от нее на расстоянии $\leq \varepsilon/2$ (см. рис. 2).

Построение 2. Если мы теперь построим ε -решение системы (1) $_{\gamma_0}$, проходящее через точку N и имеющее длину $\geq L$, то, согласно неравенствам (6) и (7), соответствующая часть полусепаратрисы S длины L будет находиться в γ -окрестности этого ε -решения (см. рис. 2). Выполнив построение ε -решения, проходящего через точку N , мы получим конечным числом шагов (операций) приближение части полусепаратрисы S длины L . Построение ε -решения может быть осуществлено способом, указанным выше в разделе 2.

Рассмотрим вопрос о том, как определяются величины γ и L , достаточные для построения необходимых приближений всех полусепаратрис седел системы (1) $_{\gamma_0}$. Дугу $\sim M_1 M_2$ приближения Δ_γ будем называть витком спирали (или просто витком), если при движении по ней угол наклона касательной к этой дуге изменяется от α до $\alpha + 2\pi$. Прямолинейный отрезок $\overline{M_1 M_2}$, соединяющий начало и конец витка спирали $\sim M_1 M_2$, назовем замыканием витка (а виток с замыканием — замкнутым витком). Отрезок, соединяющий концы дуги $\sim M_1 M_2$, назовем замыканием дуги $\sim M_1 M_2$.

Величина γ_0 позволяет найти γ_1 -приближение Δ_{γ_1} ($\gamma_1 \leq \gamma_0/4$) части полусепаратрисы S длины L , γ_1 -окрестность которого не имеет общих точек с γ_1 -окрестностями γ_1 -приближений всех других полусепаратрис и которое 1) либо пересечет границу области G , 2) либо пересечет границу $\gamma_0/2$ -окрестности $[d_{\gamma_0/2}(A_i)]$ состояния равновесия A_i типа фокус или узел, 3) либо опишет вне $\gamma_0/2$ -окрестности седла B_j $[d_{\gamma_0/2}(B_j)]$ виток спирали, замыкание которого не содержит (кроме концов витка) точек дуги Δ_{γ_1} .

В первом случае полусепаратриса S входит из области G с ростом или уменьшением t . Если бы это было не так, то радиус γ^{**} окрестности g был бы меньше $\gamma_0/4$, что невозможно в силу (3).

Во втором случае полусепаратриса S входит с ростом (уменьшением) t в состояние равновесия A_i типа фокус или узел, границу $\gamma_0/2$ -окрестности которого пересекает дуга Δ_{γ_1} . В предположении противного особая полутраектория-полусепаратриса S входила бы и выходила из $(3/4)\gamma_0$ -окрестности ** состояния равновесия, что несовместимо с (3).

В третьем случае *** предельное поведение полусепаратрисы исследуется дополнительно. После того, как будут выделены третьи случаи для полусепаратрис всех седел.

Пусть при некотором $\gamma \leq \gamma_0/4$ для всех полусепаратрис всех седел установлено, какой из трех случаев осуществляется для них. Это позволяет перечислить все полусепаратрисы седел; вместе с тем в области G окажется выделенным конечное число $m = m_1 + m_2$ областей $J_1^{k_1}$ и $J_2^{k_2}$ ($k_1 = 1, 2, \dots, m_1$; $k_2 = 1, 2, \dots, m_2$). Область $J_1^{k_1}$ односвязная,

* Значение ε выбирается достаточно малым и для того, чтобы на границе σ_1 $\varepsilon/2$ -окрестности приближений двух полусепаратрис седла не имели бы общих точек.

** В самом деле, пусть приближение Δ_{γ_1} полусепаратрисы S пересекает границу $d_{\gamma_0/2}(A_i)$ в точке M_1 . Соответствующая M_1 точка полусепаратрисы S находится на расстоянии $\leq \gamma_0/4$ от M_1 и, следовательно, находится на расстоянии $< (3/4)\gamma_0$ от состояния равновесия.

*** Третий вариант реализуется, в частности, для приближения полусепаратрисы, имеющей своим пределом предельный цикл.

содержит внутри одно состояние равновесия A_{k_1} типа фокус или узел и ограничена либо витком Δ_{γ} -приближения полусепаратрисы и его замыканием (рис. 3а), либо границей g области G (рис. 3б). Если виток Δ_{γ} -приближения полусепаратрисы S и его замыкание ограничивает односвязную область, не содержащую состояний равновесия, то увеличение длины L ($L_2 > L_1$) приближаемой дуги и (если нужно) уменьшение γ ($\gamma_2 < \gamma_1$) дает приближение части полусепаратрисы S длины L_2 , относящееся к одному из указанных выше случаев, причем виток Δ_{γ_2} с его замыканием ограничивает область, содержащую внутри

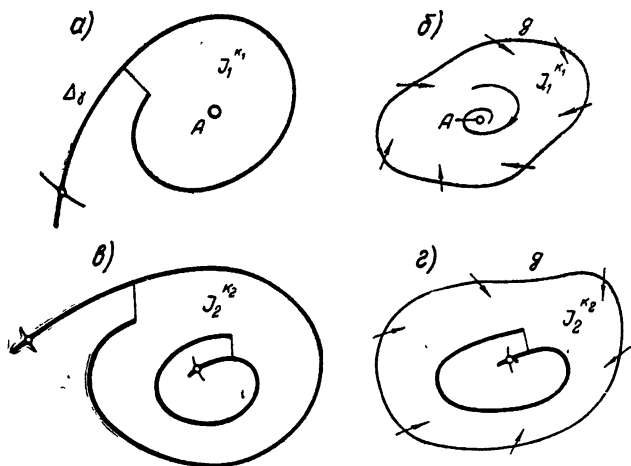


Рис. 3.

хотя бы одно состояние равновесия типа фокус или узел. Область $J_2^{k_2}$ двусвязная, не содержит состояний равновесия и ограничена изнутри витком Δ_{γ} -приближения части некоторой полусепаратрисы S и его замыканием и извне (снаружи) либо витком приближения части другой полусепаратрисы и его замыканием (рис. 3в), либо границей g (рис. 3г)*.

Выясним отношение выделенных областей J_1 и J_2 к предельным, циклам системы $(1)_{\gamma_0}$.

Если полусепаратриса седла стремится к предельному циклу, то всегда существует некоторая ее дуга L , образующая виток, замыкание которого не пересекает эту дугу L . Справедливость этого утверждения следует из существования в достаточно малой окрестности предельного цикла дуги без контакта, пересекающей этот предельный цикл.

Каждый предельный цикл 1) либо лежит внутри односвязной области, ограниченной замкнутым витком полусепаратрисы или границей g и содержащей только одно состояние равновесия типа фокус или узел, 2) либо лежит в кольце, ограниченном двумя замкнутыми витками двух различных полусепаратрис (или изнутри—замкнутым витком полусепаратрисы, а снаружи—границей g) и не содержащем ни одного состояния равновесия.

Первая часть сделанного утверждения легко доказывается в предположении, что внутри цикла лежит не более одного состояния рав-

* В дальнейшем индексы k_1 и k_2 будем для простоты записи опускать.

новесия типа фокус или узел; вторая часть — в предположении, что внутри цикла существует более одного состояния равновесия типа фокус или узел.

Область J_1 (соответственно J_2), о которой шла речь выше, дополним γ -окрестностью граничного витка δ_γ и обозначим через \tilde{J}_1 (соответственно \tilde{J}_2) (см. рис. 4), а границу γ -окрестности витка δ_γ — через $\tilde{\delta}_\gamma$. Для области \tilde{J}_1 рассмотрим отрезок l_1 , соединяющий A (состояние равновесия, расположенное внутри J_1) с ближайшей к точке A на l_1 точкой граничного витка $\tilde{\delta}_\gamma$ или границы g (в зависимости от границы \tilde{J}_1).

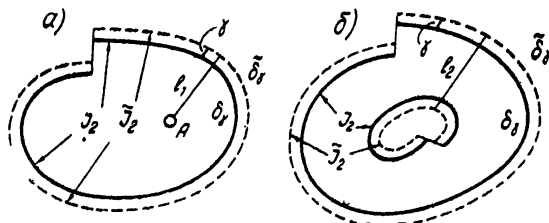


Рис. 4.

Для области \tilde{J}_2 рассмотрим отрезок l_2 , соединяющий или две точки, принадлежащие разным виткам, входя-

щим в границу \tilde{J}_2 (из точек второго витка выбирается точка, ближайшая на l_2 к точке первого витка), или две точки — одну, принадлежащую границе g , другую, ближайшую к ней на l_2 и принадлежащую внутреннему для \tilde{J}_2 витку. Как следует из доказанных выше утверждений, каждый предельный цикл системы обязательно пересечет один из от-

резков l_1 или l_2 областей $\tilde{J}_1^{k_1}$ или $\tilde{J}_2^{k_2}$. Ниже (см. в) Предельные циклы) приведен один из способов выделения пересекающих отрезки l_1 и l_2 колец W_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) толщиной $\gamma_0/4$, таких, что только внутри этих колец могут быть предельные циклы системы $(1)_{\gamma_0}$ и в каждом из них не более одного цикла. Для грубой системы число этих колец конечно. После того, как будут установлены все кольца W_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) и будет выяснена устойчивость расположенных в них циклов, можно перейти к определению предельного поведения полусепаратрис в третьем случае.

Строим Δ_γ - приближение при $\gamma = \gamma_2 < \gamma_1$ части $L = L_2 > L_1$ полусепаратрисы S . При этом для Δ_γ могут представиться следующие возможности: либо для дуги Δ_γ выполняется один из первых двух перечисленных выше случаев (тогда полусепаратриса S соответственно пересекает границу g или имеет своим пределом состояние равновесия типа фокус или узел), либо дуга Δ_γ пересечет границу $\gamma_0/2$ -окрестности одного из колец W_ν (тогда, согласно (3), полусепаратриса S имеет своим пределом цикл, расположенный в кольце W_ν).

Предельное поведение выясняется последовательно для полусепаратрис всех седел. Поскольку при этом приближаются интегральные дуги в части G^* области G , расположенной вне некоторых конечных β -окрестностей ($\beta \geq \gamma_0/2$) предельных циклов и состояний равновесия, длины всех приближаемых дуг ограничены некоторой конечной величиной L^* . Следовательно, всегда найдется на конечном шаге (тем большим, чем меньше γ_0) такое конечное значение $\gamma_p > 0$, что γ_p -окрестности γ_p -приближений рассматриваемых частей полусепаратрис не имеют в G^* общих точек.

Порядок, в котором Δ_{γ_p} - приближения частей полусепаратрис пересекают границу g , определяет полную схему границы области G . Порядок, в котором Δ_{γ_p} - приближения частей полусепаратрис пере-

секают каноническую окрестность состояния равновесия типа фокус или узел, содержащую его $\gamma_0/2$ -окрестность, определяет полную схему состояния равновесия типа фокус или узел.

Полную схему состояния равновесия типа седло определяет порядок, в котором приближения полусепаратрис этого седла пересекают границу его канонической окрестности (см. б) Построение приближений полусепаратрис).

Рассмотрим каноническую окрестность предельного цикла, расположенного в кольце W_v . Для этого выберем область, являющуюся канонической окрестностью этого цикла, содержащую кольцо W , и его $\gamma_0/2$ -окрестность.

Порядок, в котором приближения полусепаратрис пересекают границу этой канонической окрестности, определяет полную схему предельного цикла, расположенного в кольце W_v . Кольца W_v , в $\gamma_0/2$ -окрестность которых не входит (с возрастанием или убыванием t) ни одна полусепаратриса, заключают в себе свободные циклы системы $(1)_{\gamma_0}$. Взаимное расположение этих колец позволяет перечислить все свободные циклы системы $(1)_{\gamma_0}$ и указать их взаимное расположение.

Итак, полная схема разбиения области G на траектории рассматриваемой грубой системы $(1)_{\gamma_0}$ будет полностью определена конечным числом шагов, если (как это предположено выше) будет указан способ выделения конечным числом шагов пересекающих отрезки l_1, l_2 колец W_v толщиной $\leq \gamma_0/4$, таких, что внутри них и только внутри них могут лежать предельные циклы системы $(1)_{\gamma_0}$.

в) *Предельные циклы.* Выше посредством построения приближений состояний равновесия и Δ_γ -приближений частей полусепаратрис седел системы $(1)_{\gamma_0}$ были выделены области \tilde{J}_1 и \tilde{J}_2 так, что если система $(1)_{\gamma_0}$ имеет предельные циклы, то каждый из них пересекает какой-либо из отрезков l_1 или l_2 , расположенных внутри \tilde{J}_1 или \tilde{J}_2 . Отрезки l_1 и l_2 , не являющиеся, вообще говоря, отрезками без контакта, исследуем на пересечение с предельными циклами с помощью приближений интегральных дуг, пересекающих эти отрезки. Поскольку предельные циклы системы $(1)_{\gamma_0}$ не имеют точек, находящихся от состояния равновесия на расстоянии, меньшем γ_0 (см. (3)), то на пересечение с кольцами толщиной $\leq \gamma_0/4$, содержащими внутри предельные циклы, достаточно исследовать часть отрезка l_1 , расположенную вне $\gamma_0/2$ -окрестности состояния равновесия A . Исследования отрезков l_1 и l_2 полностью аналогичны.

Построение пересекающих отрезки l_1, l_2 колец толщиной $\leq \gamma_0/4$, содержащих предельные циклы системы $(1)_{\gamma_0}$. Пусть область J_1 (J_2) образована с помощью Δ_γ -приближений частей полусепаратрис. Исследуем один из отрезков l_1 (l_2): в случае, когда длина отрезка l_1 (l_2) (на рис. 5 отрезок E_1E) больше* $4\gamma_1$. Разделим отрезок l_1 (l_2) на части l_γ длины $\gamma \leq \gamma_1$ и построим Δ_γ -приближения ($\gamma \leq \gamma_1$) дуг траекторий, проходящих через точки $E_1, E_2, \dots, E_r, \dots, E_k = E$ деления отрезка l_1 (l_2) на отрезки l_γ . Условимся обозначать Δ_γ -приближение части $t > t_0$ ($t < t_0$) дуги траек-

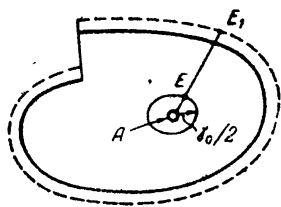


Рис. 5.

* В случае, когда длина отрезка l_1 удовлетворяет неравенству $l_1 < 2\gamma_1$, предельное поведение полусепаратрис не требует дополнительного исследования, так как в этом случае сепаратрисы, приближения частей которых являются границами областей J_1 и J_2 , входят (поскольку $\gamma_1 \leq \gamma_0/4$) либо в γ_0 -окрестность состояния равновесия, либо в $\gamma_0/2$ -окрестность предельного цикла.

тории, проходящей при $t = t_0$ через точку E_r , через Δ_γ^+ (Δ_γ^-). При этом для дуги Δ_γ^+ (Δ_γ^-) может представиться один из следующих случаев. Дуга Δ_γ^+ (Δ_γ^-) 1) или, не пересекая отрезок l_1 , пересечет границу $\gamma_0/2$ -окрестности состояния равновесия A ; 2) или, не пересекая отрезок l_1 (l_2), выйдет из области \tilde{J}_1 (\tilde{J}_2); 3) или будет иметь общую точку с отрезком l_1 (l_2) в некоторой точке D_i^+ (D_i^-).

Очевидно, что отрезок l_γ , ни для одного из концов которого не выполняется случай 3), не может иметь общих точек с предельным циклом системы $(1)_{\gamma_0}$. Отрезок l_γ , по крайней мере, для одного из концов которого имеет место случай 3), может иметь или не иметь общие точки с предельными циклами системы $(1)_{\gamma_0}$ в зависимости от расположения дуг $\cup E_r D_r^+$, $\cup E_r D_r^-$ и замыканий $\overline{E_r D_r^+}$, $\overline{E_r D_r^-}$ этих дуг.

Будем говорить, что для дуги $\cup E_r D_r$ с замыканием $\overline{E_r D_r}$ на отрезке l_1 (l_2) имеет место случай 3а, если дуга $\cup E_r D_r$ такова, что замкнутая кривая $\cup E_r D_r \overline{D_r E_r}$ ограничивает односвязную область, содержащую внутри состояние равновесия A (рис. 6а) или „внутреннюю гра-

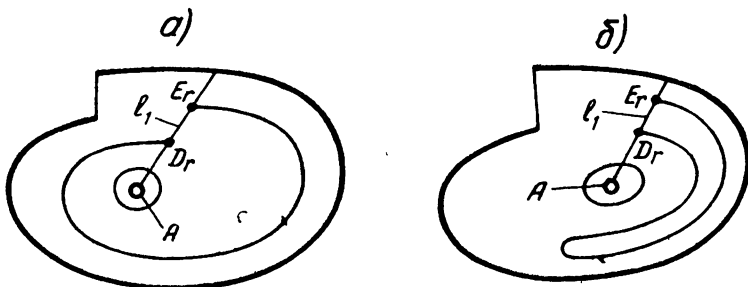


Рис. 6.

ницу области \tilde{J}_2 (рис. 7а), и имеет место случай 3б, если дуга $\cup E_r D_r$ такова, что замкнутая кривая $\cup E_r D_r \overline{D_r E_r}$ ограничивает односвязную область, не содержащую внутри состояние равновесия A (рис. 6б)

или внутреннюю границу области \tilde{J}_2 (рис. 7б). Построим следующие Δ_γ -приближения дуг траекторий, проходящих через точку E_r .

Если для дуги $\cup E_r D_r$ имеет место случай 3а, то построение заканчиваем определением длины R_1 отрезка $\overline{E_r D_r}$ (построение P_1).

Если для дуги $\cup E_r D_r$ имеет место случай 3б, то продолжаем построение дуги Δ_γ , проходящей через точку D_r , до следующей общей точки $D_r^{(1)}$ дуги Δ_γ с отрезком l_1 (l_2). Если для дуги

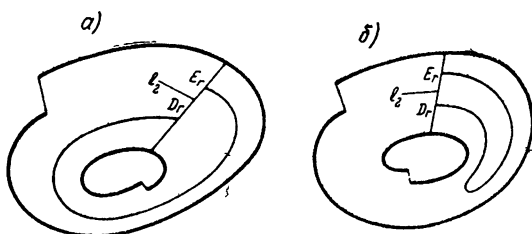


Рис. 7.

* Значение $\gamma < \gamma_1$ выбирается достаточно малым для того, чтобы дуга Δ_γ не самопересекалась.

** В зависимости от того, является ли отрезок l_1 (l_2) отрезком без контакта или с контактом, предельные циклы системы $(1)_{\gamma_0}$ могут пересекать отрезок l_1 (l_2) один или несколько раз. Однако и в том, и в другом случае каждый предельный цикл, пересекающий отрезок l_1 , будет охватывать состояние равновесия A и каждый предельный цикл, пересекающий отрезок l_2 , будет охватывать внутреннюю границу \tilde{J}_2 .

$\cup D_r D_r^{(1)}$ также имеет место случай 3б, то построение продолжаем до общей точки $D_r^{(m-1)}$ дуги Δ_γ с отрезком l_1 ; точка $D_r^{(m-1)}$ такова, что либо для Δ_γ -приближения дуги траектории, проходящей через точку $D_r^{(m-1)}$, выполняется один из случаев 1), 2), либо для дуги $\cup D_r^{(m-1)} D_r^{(m)}$ имеет место случай 3а (построение P_2 ; см. рис. 7).

Если построение P_2 требуется для одной из дуг $\cup E_r D_r^+$, $\cup E_r D_r^-$ (например, $\cup E_r D_r^+$), то его заканчиваем определением длины R_2 отрезка $E_r D_r^{(m)+}$; если построение P_2 потребуется для обеих дуг $\cup E_r D_r^+$ и $\cup E_r D_r^-$ (рис. 8), то его заканчиваем определением длины R_3 одного из отрезков $R_3^+ = D_r^{(m-1)+} D_r^{(m)-}$; $R_3^- = D_r^{(m-1)-} D_r^{(m)+}$.

Полученные в результате построений P_1 и P_2 длины отрезков R_μ ($\mu = 1, 2, 3$) при $\gamma \leq \gamma_1$ могут удовлетворять или не удовлетворять неравенствам:

$$R_\mu \leq 2\gamma \quad (\mu = 1, 2, 3). \quad (13)$$

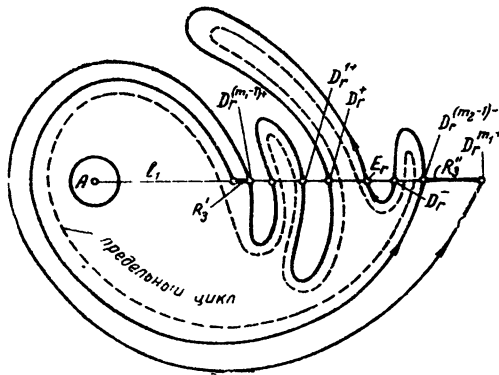


Рис. 8.

Первый шаг исследования отрезка $l_1(l_2)$ заключается в следующем. Отрезок $l_1(l_2)$ делим на отрезки l_γ длины $\gamma \leq \gamma_1$. Отрезки l_γ , по крайней мере, для одного из концов которого выполняется одно из неравенств (13), отбираем для дальнейшего исследования на пересечение с предельными циклами.

Второй шаг состоит в том, что отрезки l_γ , оставленные для дальнейшего исследования, делим на отрезки $l_{\gamma/2}$ длины $\leq \gamma/2$. Аналогично предыдущему выделяем отрезки $l_{\gamma/2}$ для дальнейшего исследования на пересечение с предельными циклами на третьем шаге и т. д.

На k -ом шаге отрезки $l_{\gamma/(2^k-1)}$, выделенные для дальнейшего исследования, образуют на $l_1(l_2)$, начиная от внешней границы $\tilde{J}_1(\tilde{J}_2)$, ряд непересекающихся отрезков U_μ ($\mu = 1, 2, \dots, M$). Выделим из них отрезки U_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) с концами M'_ν, M''_ν , обладающие следующими свойствами.

Свойство первое. Дуга γ_k -приближения дуги траектории, имеющей начало в точке $M'_\nu(M''_\nu)$ (с уменьшением или увеличением t) пересечет отрезок $l_1(l_2)$ в точке $\tilde{M}'_\nu(\tilde{M}''_\nu)$, такой, что отрезок $M'_\nu \tilde{M}'_\nu(M''_\nu \tilde{M}''_\nu)$ не имеет общих точек с отрезком U_ν , кроме $M'_\nu(M''_\nu)$, и является замыканием дуги $\cup M'_\nu \tilde{M}'_\nu$ ($\cup M''_\nu \tilde{M}''_\nu$) и отрезком без контакта*.

Свойство второе. Полоса, заключенная между дугами $\cup M'_\nu \tilde{M}'_\nu$ и $\cup M''_\nu \tilde{M}''_\nu$, не пересекает других отрезков U_ν **.

* Для каждого предельного цикла системы (1) $_{\gamma_0}$ при некотором конечном k (может быть, достаточно большом) существует, в силу расположения циклов (см. сноску на стр 649), по крайней мере один отрезок U_μ , обладающий первым свойством.

** Вторым свойством не обладают те из отрезков U_μ , которые содержат последовательные точки пересечения отрезка $l_1(l_2)$ одним и тем же предельным циклом,

Будем различать не только величину, но и знак расстояния $\rho(M_s) = M, \tilde{M}$. Припишем $\rho(M_s)$ положительный (отрицательный) знак, если движение по дуге $\sim M, \tilde{M}$ происходит с ростом t (с уменьшением t). В представленном на рис. 9 случае расстояния $\rho(M'_s)$ и $\rho(M''_s)$ имеют положительный знак. Кольцо W_s^* , ограниченное двумя замкнутыми кривыми $\sim M'_s, \tilde{M}'_s, M''_s, \tilde{M}''_s$ и дополненное его γ_k -окрестностью (рис. 9), обозначим через W_s .

Построение приближений циклов заканчиваем k -ым шагом, на котором 1) все отрезки U_μ имеют длину $\leq \gamma_0/4$, 2) каждый отрезок U_μ либо входит в число отрезков U_ν , либо пересекается некоторым кольцом W_ν , 3) толщина каждого кольца W_ν не превосходит $\gamma_0/4$, 4) расстояния $\rho(M_s)$ имеют одинаковые знаки. Такое конечное k всегда существует*, поскольку циклы грубой системы $(1)_{\gamma_0}$ находят друг от друга на конечном расстоянии $> \gamma_0$. Устойчивость цикла, расположенного в кольце W_s , определяется знаком расстояний $\rho(M_s)$. Цикл устойчив, если знак отрицательный, и неустойчив, если знак положительный.

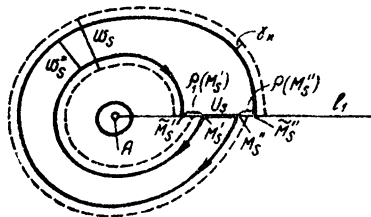


Рис. 9.

Итак, приведенного построения приближений особых траекторий достаточно для определения полной схемы разбиения на траектории грубой системы $(1)_{\gamma_0}$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Качественная структура разбиения плоской области G на траектории, т. е. схема любой грубой системы может быть установлена конечным числом шагов (операций) путем приближенного построения с достаточной степенью точности всех особых траекторий (состояний равновесия, предельных циклов и полусепаратрис). Точность приближения, с которой особые траектории должны быть построены, зависит от величины геометрической меры грубости γ_0 .

Из самого метода построения особых траекторий с очевидностью следует, что указанным выше способом может быть установлена качественная структура системы (1) с геометрической мерой грубости, большей γ_0 .

Заметим, что при исследовании конкретной системы (1) обычно бывает неизвестно, является ли рассматриваемая система грубой или негрубой системой [6] степени $n \geq 1$. В тех случаях, когда из каких-либо соображений следует, что система (1) грубая, то, как это следует из сказанного, ее качественная структура может быть установлена, если для нее геометрическая мера грубости γ_0 оценена снизу (т. е. установлено, что грубая система (1) имеет геометрическую меру грубости $\gamma_0 \geq \alpha > 0$). Для оценки величины α может быть использован критерий Бендиксона—Дюляка [11,12], с помощью которого в отдельных случаях может быть установлен размер областей, не содержащих предельных циклов. Для оценки величины α могут быть также использованы размеры а) односвязной области D_A , содержащей состояние равновесия $A(x_0, y_0)$ типа фокус или узел, для витков траекторий $x = x(t)$, $y = y(t)$ в которой величина

* Число рассматриваемых шагов всегда конечно, но зависит от плотности намагнивания одной траектории вне некоторой окрестности предельного цикла, т. е. зависит от величины аналитической меры грубости системы $(1)_{\gamma_0}$ (см. сноску ** на стр. 641).

$$h = \tau^{-1} \int_0^{\tau} \{ P'_x [x(t), y(t)] + Q'_y [x(t), y(t)] \} dt \neq 0$$

и сохраняет знак величины $\sigma_0 = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)$ (в том случае, когда α определяется минимальным расстоянием между состоянием равновесия A и ближайшим циклом, охватывающим это состояние равновесия), б) двусвязной области, содержащей цикл C_0 с характеристическим показателем $h = h_0 \neq 0$, в которой для витков траекторий $x = x(t)$, $y = y(t)$ величина $h \neq 0$ и сохраняет знак h_0 (в том случае, когда α определяется минимальным расстоянием между циклом C_0 и циклом, ближайшим к C_0). Однако, как это обычно и делают на практике, качественная структура грубой системы может быть построена с точностью до некоторой величины α геометрической меры грубости, которая может быть задана достаточно малой. Это построение сводится к тому, что мы строим все состояния равновесия и предельные циклы системы (1), находящиеся друг от друга на расстоянии, большем α , и пропускаем те состояния равновесия и предельные циклы, которые находятся на меньшем расстоянии. Если, наконец, полусепаратриса проходит от состояния равновесия типа седло на расстоянии меньшем α , то остается неясным, является ли рассматриваемая система грубой (с мерой $\gamma_0 < \alpha$) или негрубой; если же она грубая, то неизвестно, как именно расположены сепаратрисы. Итак, из сказанного выше следует, что численными методами, исходя только из приближенного построения особых траекторий, нельзя доказать грубость любой грубой системы. Для построения качественной структуры разбиения на траектории системы (1) численными методами (исходя из приближенного построения особых траекторий) необходимо оценить снизу геометрическую меру грубости γ_0 .

Теорема 2. Качественная структура разбиения на траектории негрубой системы (1) степени $n \geq 1$ принципиально не может быть определена приближенным построением ее особых траекторий.

Действительно, какими бы малыми добавками к правым частям при построении приближений особых траекторий мы не пользовались, в силу произвольности нельзя гарантировать сохранение негрубости системы. Заметим, не останавливаясь на этом подробно, что качественная структура негрубой системы может быть приближена качественными структурами грубых систем со сколь угодно малой геометрической мерой грубости. Численные методы позволяют, исходя из такого приближения, определить параметры системы, близкие к бифуркационным значениям параметров системы. Метод приближения негрубых систем применен в работе [13]. При этом в результате приближения негрубых систем качественными структурами грубых систем с достаточно малой геометрической мерой грубости γ_0 определены значения параметров системы, близкие к бифуркационным значениям параметров, при которых сепаратриса седла рассматриваемой системы идет из седла в седло.

В заключение приношу глубокую благодарность Е. А. Андроновой-Леонтович за постоянный интерес к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Леонтович и А. Майер, ДАН СССР, 103, 557 (1955).
2. Е. Леонтович и А. Майер, ДАН СССР, 14, 251 (1937).
3. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 14, 247 (1937).
4. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ч. 1, ОНТИ, М.—Л., 1937.

- 5 А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 21, 427 (1938).
- 6 Г. Ф. Баггис, Усп. матем наук, 10, 101 (1955)
- 7 В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М—Л., 1949
- 8 В. В. Немыцкий, Матем сб, 16, 307 (1945).
- 9 Е. Леонтович, Диссертация, Горький, 1946
- 10 А. Д. Мышкис и И. Ю. Эгле, Матем сб, 35, 491 (1955).
- 11 А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, М.—Л., 1959.
- 12 Л. Н. Белюстина, Изв. высш уч зав—Радиофизика, 1, 2, 118 (1958).
- 13 Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 2, 277 (1959)

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 апреля 1959 г.