

К ТЕОРИИ ВИБРОУДАРНОЙ ЗАБИВКИ

Л. В. Беспалова

Рассматриваются основные случаи виброударного выдергивания и забивки шпунта свай, труб и пр.

В настоящей работе исследуется динамика виброударной забивки и выдергивания шпунта, свай, труб и т. п. Изучение движения системы, состоящей из виброударника, шпунта и грунта, представляет значительные трудности [1-3]. Ввиду этого задачу о движении виброударника и шпунта целесообразно рассматривать отдельно. Исследованию динамики виброударника с неподвижным ограничителем посвящено ряд работ (см. [4] и указанную в ней литературу). Вторая часть — исследование движения шпунта под действием серии ударных импульсов, наносимых извне, — является предметом рассмотрения данной статьи.

Модель системы шпунт-грунт принимается в той же идеализации, как и при виброзабивке [5], т. е. относительно сил взаимодействия предполагаем, что между боковой поверхностью шпунта и грунтом действует только сила сухого трения Q , величина которой не зависит от скорости скольжения шпунта по грунту; когда проскальзывания нет, грунт перемещается вместе со шпунтом, и его смещение пропорционально действующей силе; при давлении конца шпунта сначала также происходит упругая деформация грунта и сила сопротивления пропорциональна ее величине, при достижении ею некоторого значения R наступает продавливание.

В настоящей работе рассматривается практически наиболее интересный случай периодического движения шпунта с периодом, равным периоду внешней силы, при виброударном выдергивании ($R=0$) и при погружении ($Q=0$). Исследование в обоих случаях проводится методом точечных преобразований [6]. В плоскости параметров системы выделены области существования и устойчивости одноударного периодического движения; для этого типа движения исследовано изменение скорости выдергивания в зависимости от величины и частоты ударных импульсов. При этом обнаружено, что скорость выдергивания растет с ростом величины ударных импульсов и периодически меняется с изменением частоты ударов, причем максимальная скорость достигается на частоте, несколько меньшей собственной частоты колебаний шпунта на упругом основании. В случае погружения в области одноударного периодического движения построены кривые одинаковой глубины погружения за период движения. Полученные результаты помогают выявить оптимальный режим работы при виброударной забивке и выдергивании и могут быть использованы при конструировании и настройке виброударника.

1 ВИБРОУДАРНОЕ ВЫДЕРГИВАНИЕ ($R=0$)

Уравнения движения. Сведение задачи к точечному преобразованию. Модель системы при $R=0$ может быть представлена в виде, изображенном на рис. 1. Прилегающий грунт эквивалентен пластинкам на пружинах с общей жесткостью $K_{\text{бок}}$. Между пластинкой и шпунтом есть сухое трение, величина которого Q .

Выдергивание шпунта происходит под действием серии ударов, происходящих через равные промежутки времени T . Положение шпунта за время удара не меняется, а скорость всегда изменяется на одну и ту же величину независимо от скорости шпунта до удара.

Пусть x и y —соответственно смещения шпунта и грунта, положительное направление которых указано стрелкой (рис. 1). Рассмотрим случай, когда вес шпунта $P=0$. При сделанных предположениях уравнения движения шпунта и грунта будет:

$$M\ddot{x} = F_{\text{бок}} - F\delta(t-nT), \quad (1)$$

где M —масса шпунта и $F_{\text{бок}} = -K_{\text{бок}} y$ при $|K_{\text{бок}} y| \leq Q$;

$$\dot{y} = \begin{cases} \dot{x} & \text{при } |K_{\text{бок}} y| < Q \text{ или при } Q \operatorname{sgn} \dot{\xi} = -K_{\text{бок}} y \\ 0 & \text{при } Q \operatorname{sgn} \dot{\xi} = K_{\text{бок}} y \end{cases} \quad (1a)$$

Переходя к безразмерным переменным $\xi = (K_{\text{бок}}/Q)x$, $\eta = (K_{\text{бок}}/Q)y$, $\tau = \omega_0 t$ ($\omega_0^2 = K_{\text{бок}}/M$), будем иметь:

$$\ddot{\xi} + \eta = -V\delta(\tau - n\theta); \quad (2)$$

$$\dot{\eta} = \begin{cases} \dot{\xi} & \text{при } |\eta| < 1 \text{ или при } \operatorname{sgn} \dot{\xi} = -\eta \\ 0 & \text{при } \operatorname{sgn} \dot{\xi} = \eta \end{cases} \quad (2a)$$

где $\theta = 2\pi\omega_0/\omega_b$, $V = F\omega_0/Q$.

Таким образом, систему характеризуют два параметра V и θ .

Исследуем движение шпунта на плоскости η, ξ . Верхняя часть полуплоскости соответствует движению шпунта вниз, нижняя -- движению вверх. При $|\eta| < 1$ изображающая точка движется согласно уравнениям (2)—(2a) по окружностям с центром в точке 0. Пусть в момент $\tau = \tau_0$ шпунт находится в точке A_0 (рис. 2). Решение уравнения (2), удовлетворяющем условиям $\dot{\xi} = -1$ и $\xi = 0$ при $\tau = \tau_0$, будет

$$\xi = -V \sin\left(\tau - \frac{n+1}{2}\theta\right) \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} - \cos(\tau - \tau_0),$$

где $n = E(\tau/\theta)$. Следовательно, до удара изображающая точка движется по окружности радиуса $r = 1$. В момент $\tau = \theta$ происходит удар, изображающая точка мгновенно переходит, не меняя своей координаты, на какую-то окружность радиуса $r = r_1$ и движется по ней до следующего удара $\tau = 2\theta$ и т. д., пока $|\eta| < 1$. Момент $\tau = \tau_1$ прихода изображающей точки в A_1 (рис. 2), соответствующий началу проскальзывания шпунта относительно грунта, определяется из условия $\xi = -1$:

$$1 = V \sin\left(\tau_1 - \frac{N+1}{2}\theta\right) \frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} + \cos(\tau_1 - \tau_0),$$

где $N = E(\tau_1/\theta)$, а τ_1 —наименьший из корней этого уравнения, больших τ_0 . Значение $\dot{\xi} = \dot{\xi}_1$ в этот момент будет равно

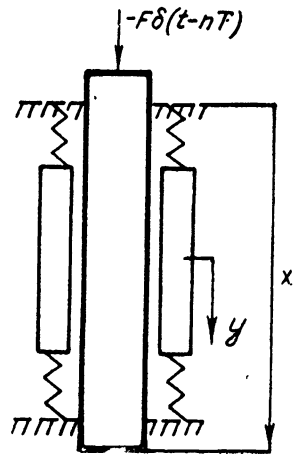


Рис. 1.

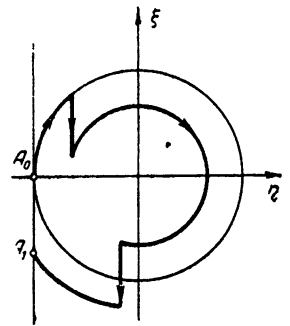


Рис. 2.

$$\dot{\xi}_1 = -V \cos \left(\tau_1 - \frac{N+1}{2} \Theta \right) \sin(N\Theta/2) / \sin(\Theta/2) + \sin(\tau_1 - \tau_0).$$

Дальнейшее движение шпунта, согласно (2)—(2а), происходит по закону

$$\xi = (\tau - \tau_1)^2/2 + \dot{\xi}_1(\tau - \tau_1) - 1 - mV(\tau - \tau_1),$$

где $m = E(\tau/\Theta) - N$. Момент окончания проскальзывания $\tau = \tau_2$ находим из условия $\dot{\xi} = 0$:

$$\tau_2 = \tau_1 - \dot{\xi}_1 + MV, \quad (3)$$

где $M = E(\tau_2/\Theta) - N$.

Величина погружения шпунта за время от τ_0 до τ_2 равна

$$\Delta \xi = -1 - \xi_2 = -(\tau_2 - \tau_1)^2/2 - \dot{\xi}_1(\tau_2 - \tau_1) + MV(\tau_2 - \tau_1).$$

Координата η во время проскальзывания шпунта не меняется, т. е. $\eta_1 = -1$.

Таким образом, τ_0 и τ_2 — два последовательных момента времени, когда изображающая точка приходит в точку A_0 ; при этом связь между τ_0 и τ_2 определяется соотношениями:

$$1 = V \sin \left(\tau_1 - \frac{N+1}{2} \Theta \right) \sin(N\Theta/2) / \sin(\Theta/2) + \cos(\tau_1 - \tau_0);$$

$$\dot{\xi}_1 = -V \cos \left(\tau_1 - \frac{N+1}{2} \Theta \right) \sin(N\Theta/2) / \sin(\Theta/2) + \sin(\tau_1 - \tau_0); \quad (4)$$

$$\dot{\xi}_1 = MV - \tau_2 + \tau_1.$$

Изучение движения шпунта в силу периодичности внешней силы сводится к изучению точечного преобразования $\tau_2 = f(\tau_0)$ (4) на отрезке от 0 до Θ . Будем называть его S -преобразованием. Периодическому движению с периодом $(N+M)\Theta$ соответствуют точки пересечения кривой $f(\tau_0)$ с прямыми $(N+M)\Theta$.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением практически наиболее интересного простейшего периодического движения с периодом, равным периоду внешней силы (одноударное периодическое движение).

Одноударное периодическое движение.

а) Область существования и устойчивости движения. Для $N=1$ и $M=0$ S -преобразование с учетом условия периодичности запишется так:

$$1 = V \sin(\tau_1 - \Theta) + \cos(\tau_1 - \tau_0);$$

$$\dot{\xi}_1 = -V \cos(\tau_1 - \Theta) + \sin(\tau_1 - \tau_0); \quad (5)$$

$$\dot{\xi}_1 = -\tau_2 + \tau_1; \quad \tau_2 - \tau_0 = \Theta.$$

Найдем границу области существования этого движения в плоскости параметров V , Θ . Нарушение одноударного периодического движения может произойти за счет изменения чисел M и N . Условием изменения M будет равенство $\tau_2 = 2\Theta$; однако вследствие периодичности движения $\tau_2 = \tau_0 + \Theta$, так что $\tau_0 = \Theta$, т. е. удар происходит на прямой $y = -1$. Это означает, что $\tau_2 - \tau_1 = -V$ и, следовательно, границей будет прямая $V = \Theta$ (см. рис. 3). При $V > \Theta$, очевидно, будет иметь место ускоренное движение шпунта, в данном случае ускоренное выдергивание. Величина N может изменить свое значение, если при

$\xi = -1$ 1) $\tau_1 = 2\theta$ или 2) $\dot{\xi}_1 = 0$. Первая возможность, очевидно, не осуществима, так как $\tau_1 - \theta$ меньше $\theta - \tau_0$ и тем более меньше θ . Во втором случае, подставляя $\dot{\xi}_1 = 0$ в (5), получаем:

$$1 = V \sin \tau_0 + \cos \theta;$$

$$0 = -V \cos \tau_0 + \sin \theta.$$

Отсюда находим, что границей будет кривая $|\sin(\theta/2)| = V/2$ (см. рис. 3)

Периодическое движение устойчиво, если в неподвижной точке S-преобразования $|d\tau_2/d\tau_0| < 1$. Из (5) $d\tau_2/d\tau_0 = \cos(\tau_1 - \tau_0)$. Следовательно, периодическое движение устойчиво всюду, за исключением линий

$$\theta = V + 2\pi k$$

при k —четном и

$$\theta = \pm \sqrt{V^2 - 4} + \pi k$$

при k —нечетном.

б) Исследование скорости выдергивания. Величина погружения (или выдергивания) шпунта за период движения θ при учете (3) будет равна $\Delta\xi = \xi_1^2/2$, а, следовательно, средняя скорость выдергивания $v = \xi_1^2/2\theta$. Для определения ξ_1 запишем систему (5) в переменных τ_0 и $\dot{\xi}_1$:

$$1 = V \sin(\tau_0 + \dot{\xi}_1) + \cos(\theta + \dot{\xi}_1);$$

$$\dot{\xi}_1 = -V \cos(\tau_0 + \dot{\xi}_1) + \sin(\theta + \dot{\xi}_1).$$

Исключая из этих уравнений τ_0 , получаем:

$$\dot{\xi}_1^2 - 2\dot{\xi}_1 \sin(\theta + \dot{\xi}_1) - 2 \cos(\theta + \dot{\xi}_1) - V^2 + 2 = 0 \quad (6)$$

или (что то же самое)

$$v\theta + \sqrt{2v\theta} \sin(\theta + \sqrt{2v\theta}) - \cos(\theta + \sqrt{2v\theta}) - V^2/2 + 1 = 0. \quad (7)$$

В плоскости параметров θ, V на рис. 3 нанесен ряд линий постоянной скорости погружения ($v=0,5; 1; 2$). На рис. 4 приведен график зависимости скорости погружения от θ при постоянном значении $V=2$. Интересно отметить, что эта кривая имеет ряд максимумов, величина которых убывает с ростом θ . Первый из максимумов расположен на частоте, несколько меньшей собственной частоты колебаний шпунта как жесткого тела на упругом основании, причем с ростом V разница между этими частотами увеличивается (см. рис. 3). Следовательно, для получения максимальной скорости выдергивания (так же, как и при вибровыдергивании [4]) следует выбирать частоту ударов близкой к резонансной, но несколько меньше последней.

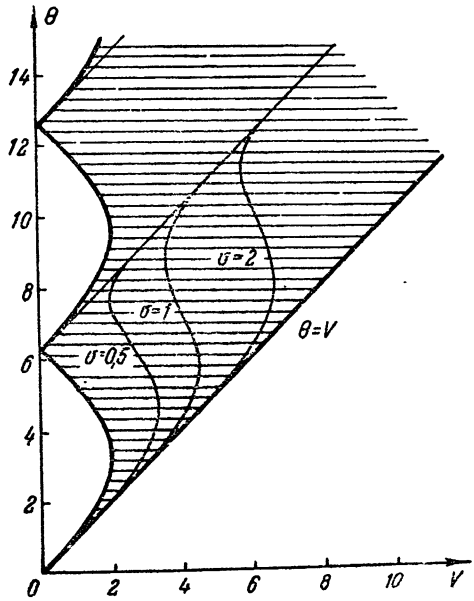


Рис. 3.

Учет веса шпунта и статического усилия при выдергивании.

Выше рассматривался случай, когда вес шпунта P принимался равным нулю. Такое допущение справедливо в предположении, что вес шпунта уравновешен какой-нибудь внешней постоянной силой.

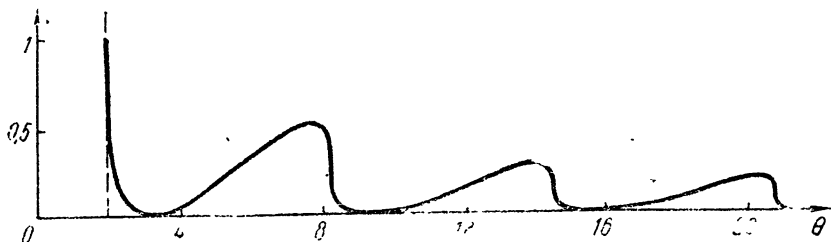


Рис. 4.

В тех случаях, когда уравновешивающая сила отсутствует, но вес шпунта много меньше Q , его влияние можно учесть методом малых возмущений. Пусть на шпунт, кроме импульсной силы, действует постоянная сила, которая может быть его весом или статическим усилием. Уравнения движения шпунта и грунта при учете действующей постоянной силы F имеют следующий вид:

$$\ddot{\xi} + \eta = -\bar{V}\delta(\tau - n\theta); \quad (8)$$

$$\dot{\eta} = \begin{cases} \dot{\xi} & \text{при } -1 < \eta < \rho; \\ 0 & \text{при } \eta = -1 \text{ и } \dot{\xi} < 0; \\ \rho \dot{\xi} & \text{при } \eta = \rho \text{ и } \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (8a)$$

В уравнениях (8)–(8a)

$$\bar{V} = V \frac{Q}{Q+F}; \quad \rho = 1 - 2 \frac{F}{Q+F}.$$

Если сила F действует в одном направлении с импульсной силой, т. е. $F = -L$ ($L > 0$), то все изложенное выше остается в силе после замены параметра V на $\bar{V} = VQ/(Q-L)$. Если F равна весу шпунта P , то $\bar{V} = V(1 - \mu^2)$ и $\rho = 1 - 2\mu^2$, где $\mu^2 = P/Q + P$. В случае, когда $P \ll Q$, $\mu^2 \ll 1$.

Рассмотрим движение изображающей точки на плоскости $\eta, \dot{\xi}$ (рис. 5) при одноударном периодическом движении. По выходе из точки A_0 изображающая точка движется по окружности радиуса $r=1$ до тех пор, пока не произойдет удар ($\tau = \theta$) или точка не придет на прямую $\eta = \rho$ ($\tau = \tau_1$). Если удар произойдет раньше ($\theta < \tau_1$), т. е. на верхней полуокружности, то характер движения при учете веса шпунта не меняется, и его влияние на скорость погружения можно учесть заменой V на \bar{V} . В случае, когда $\theta > \tau_1$, изображающая точка приходит на прямую $\eta = \rho$ (точка A_1), что соответствует проскальзыванию шпунта вниз.

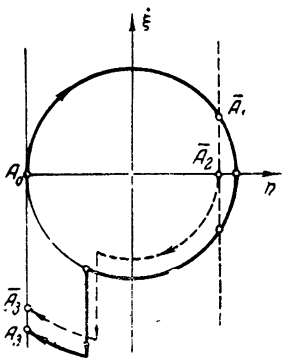


Рис. 5.

Оказывается, что суммарное время движения по верхней полуокружности и по прямой $\eta = \rho$ (проскальзывание) в первом приближении равно π , т. е. $\tau_2 - \tau_0 = \pi$. Дальнейшее движение изображающей точки происходит из точки A_2 и подчиняется уравнениям:

$$\xi = -\bar{V} \sin(\tau - \Theta) + \rho \cos(\tau - \tau_2);$$

$$\dot{\xi} = -\bar{V} \cos(\tau - \Theta) - \rho \sin(\tau - \tau_2).$$

Момент τ_3 прихода изображающей точки на прямую $\xi = -1$ найдем из уравнения

$$1 = \bar{V} \sin(\tau_3 - \Theta) - \rho \cos(\tau_3 - \tau_2); \quad (9)$$

$\dot{\xi}$ в этот момент будет равна

$$\dot{\xi}_3 = -\bar{V} \cos(\tau_3 - \Theta) - \rho \sin(\tau_3 - \tau_2). \quad (10)$$

Учитывая время проскальзывания вверх $\tau_4 - \tau_3 = -\dot{\xi}_3$, $\tau_4 = \Theta + \tau_0$ (условие периодичности) и $\tau_2 - \tau_0 = \pi$, можно переписать систему (9)–(10) в виде:

$$1 = \bar{V} \sin(\tau_0 + \bar{\xi}_3) + \rho \cos(\Theta + \bar{\xi}_3); \quad (11)$$

$$\bar{\xi}_3 = -\bar{V} \cos(\tau_0 + \bar{\xi}_3) + \rho \sin(\Theta + \bar{\xi}_3).$$

Отсюда, полагая, что $\bar{\xi}_3$ мало отличается от $\dot{\xi}_3$ — скорости без учета веса, т. е. $\bar{\xi}_3 = \dot{\xi}_3 + \alpha$, находим:

$$\alpha \equiv \bar{\xi}_3 - \dot{\xi}_3 = + \mu^2 \frac{\dot{\xi}_3}{1 - \cos(\Theta + \bar{\xi}_3)}. \quad (12)$$

Поскольку α — по предположению малая величина, метод малых возмущений нельзя использовать, если $\Theta + \bar{\xi}_3 = 2\pi n$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Действительно, при $\Theta = -\dot{\xi}_3 + 2\pi n$ удар происходит вблизи точек A_0 и A_2 , и, как видно из (12), приращение скорости проскальзывания от влияния веса при этом не будет малым.

Найдем влияние веса шпунта на скорость погружения в той области, где его можно учесть методом малых возмущений. Смещение шпунта вверх h будет равно разности величин проскальзывания вверх и вниз: $h = \Delta \xi_{\text{вверх}} - \Delta \xi_{\text{вниз}}$, а скорость выдергивания $\bar{v} = h/\theta^*$. После ряда преобразований из (11) получаем следующее выражение для скорости выдергивания при учете веса шпунта:

$$\sqrt{\bar{v}} = \sqrt{v} \left[1 - \frac{P}{Q+P} \frac{1}{1 - \cos(\Theta - \sqrt{2v\theta})} \right] - \sqrt{\frac{P}{2\theta(Q-P)}}. \quad (13)$$

Скорость выдергивания без учета веса шпунта v определяется уравнением (7).

2. ПОГРУЖЕНИЕ ШПУНТА ПРИ ОТСУТСТВИИ БОКОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Уравнение движения, сведение задачи к точечному преобразованию.

При принятых предположениях относительно сил лобового сопротивления модель системы может быть представлена в виде, изображенном на рис. 6. Грунт под основанием шпунта моделируется грунтовой пробкой с пружинной жесткостью $K_{\text{пр}}$. Между пробкой и грунтом есть сухое трение R . Относительно внешней силы предположения остаются теми же, что и в предыдущем случае.

* Отметим, что в некоторых случаях смещение шпунта при учете силы тяжести будет происходить в направлении, противоположном действию ударных импульсов;

Уравнения движения системы имеют вид:
а) уравнение движения шпунта

$$M\ddot{x} = P + F_{\text{пр}} + F\delta(t - nT), \quad (14)$$

где M и P — масса и вес шпунта,

$$F_{\text{пр}} = \begin{cases} -R + K_{\text{пр}}(z - x) & \text{при } 0 \leq z - x \leq R/K_{\text{пр}}; \\ 0 & \text{при } z - x > R/K_{\text{пр}} \end{cases}$$

б) уравнения движения грунта

$$\dot{z} = \begin{cases} \dot{x} & \text{при } z - x = 0 \\ 0 & \text{при } z - x > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{K_{\text{пр}}}{P - R}(z - x) + 1; \quad \zeta = \frac{K_{\text{пр}}}{P - R}z;$$

$$\tau = \omega_0 t \left(\omega_0^2 = \frac{K_{\text{пр}}}{M} \right)$$

и запишем уравнения движения (14)–(15) на разных этапах:

1) в период упругого сжатия грунта, т. е. при $0 < z - x < R/K_{\text{пр}}$,

$$\ddot{\xi} + \xi = V\delta(\tau - n\Theta);$$

$$\dot{\zeta} = 0, \quad (16)$$

где

$$V = \frac{F\omega_0}{R - P}; \quad \Theta = 2\pi \frac{\omega_0}{\omega_B};$$

2) во время подскока шпунта над пробкой, т. е. при $z - x > R/K_{\text{пр}}$,

$$\ddot{\xi} = \rho + V\delta(\tau - n\Theta);$$

$$\dot{\zeta} = 0, \quad (17)$$

где

$$\rho = \frac{P}{R - P};$$

3) в период продавливания пробки

$$\ddot{\xi} = 1 + V\delta(\tau - n\Theta), \quad (18)$$

а ξ в начале продавливания мгновенно обращается в нуль и остается равным нулю во все время продавливания.

Систему (16)–(18) характеризуют три параметра V , Θ и ρ . Рассмотрим движение шпунта на плоскости $\xi\dot{\xi}$. За начальный момент возьмем положение шпунта после окончания продавливания (точку A_0 , см. рис. 7), т. е. в момент $\tau = \tau_0$, $\xi = 1$ и $\dot{\xi} = 0$. После

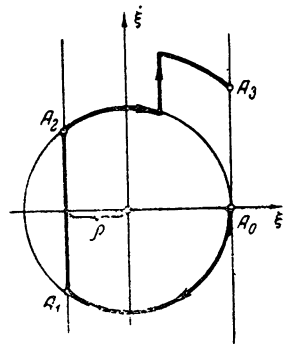


Рис. 7.

выхода из A_0 изображающая точка перемещается по закону

$$\xi = V \sin \left(\tau - \frac{n_1 + 1}{2} \Theta \right) \sin (n_1 \Theta / 2) / \sin (\Theta / 2) + \cos (\tau - \tau_0),$$

где $n_1 = E(\tau/\Theta)$, т. е. до момента удара $\tau = \Theta$ изображающая точка движется по окружности радиуса $r = 1$, после удара мгновенно, не меняя своей координаты, переходит на окружность радиуса $r = r_1$ и движется по ней до следующего удара $\tau = 2\Theta$ и т. д. до тех пор, пока изображающая точка не придет или на прямую $\xi = -\rho$ (тогда начинается подскок шпунта) или на прямую $\xi = 1$ (тогда начинается продавливание).

Допустим, что сначала точка приходит на прямую $\xi = -\rho$. Тогда момент прихода τ_1 будет определяться уравнением:

$$-\rho = V \sin \left(\tau_1 - \frac{N_1 + 1}{2} \Theta \right) \sin (N_1 \Theta / 2) / \sin (\Theta / 2) + \cos (\tau_1 - \tau_0), \quad (19)$$

где τ_1 — наименьший корень, $N_1 = E(\tau_1/\Theta)$. Отметим, что в момент $\tau = \tau_1$

$$\dot{\xi}_1 = V \cos \left(\tau_1 - \frac{N_1 + 1}{2} \Theta \right) \sin (N_1 \Theta / 2) / \sin (\Theta / 2) - \sin (\tau_1 - \tau_0). \quad (20)$$

Далее происходит подскок шпунта над грунтом, во время которого координата ξ изменяется согласно (17):

$$\xi = \rho (\tau - \tau_1)^2 / 2 + \dot{\xi}_1 (\tau - \tau_1) - \rho + V k \tau - V (k + 1) k \Theta / 2,$$

где $k = E(\tau/\Theta) - N_1$.

Момент τ_2 возвращения шпунта на пробку находим из условия $\xi = -\rho$:

$$\rho (\tau_2 - \tau_1)^2 + 2 \dot{\xi}_1 (\tau_2 - \tau_1) + 2 V K \tau_2 - V (K + 1) K \Theta = 0, \quad (21)$$

где $K = E(\tau_2/\Theta) - N_1$, а

$$\dot{\xi}_2 = \rho (\tau_2 - \tau_1) + \dot{\xi}_1. \quad (22)$$

Далее движение вновь описывается уравнением (16), решением которого при начальных условиях, взятых в момент τ_2 , будет

$$\xi = V \sin \left(\tau - \frac{n_2 + 1}{2} \Theta \right) \sin (n_2 \Theta / 2) / \sin (\Theta / 2) - \rho \cos (\tau - \tau_2) + \dot{\xi}_2 \sin (\tau - \tau_2),$$

где $n_2 = E(\tau/\Theta) - (N_1 + K)$.

Момент τ_3 прихода изображающей точки в точку A_3 (рис. 7) находим из условия $\xi = 1$:

$$1 = V \sin \left(\tau_3 - \frac{N_2 + 1}{2} \Theta \right) \sin (N_2 \Theta / 2) / \sin (\Theta / 2) - \rho \cos (\tau_3 - \tau_2) + \dot{\xi}_2 \sin (\tau_3 - \tau_2), \quad (23)$$

где τ_3 — наименьший из всех корней, превосходящих τ_2 , $N_2 = E(\tau_3/\Theta) - (N_1 + K)$.

В этот момент

$$\dot{\xi}_3 = V \cos \left(\tau_3 - \frac{N_2 + 1}{2} \Theta \right) \sin (N_2 \Theta / 2) / \sin (\Theta / 2) + \rho \sin (\tau_3 - \tau_2) + \dot{\xi}_2 \cos (\tau_3 - \tau_2). \quad (24)$$

Наконец, наступает продавливание пробки, происходящее по закону

$$\zeta = -(\tau - \tau_3)^2/2 + \dot{\xi}_3(\tau - \tau_3) + 1 + Vm\tau - Vm(m+1)\Theta/2,$$

где $m = E(\tau/\Theta) - (N_1 + N_2 + K)$. Время продавливания определяется из условия $\zeta = 0$, т. е.

$$\tau_4 - \tau_3 = \dot{\xi}_3 + VM, \quad (25)$$

где $M = E(\tau_4/\Theta) - (N_1 + N_2 + K)$.

Таким образом, изображающая точка снова пришла в точку A_0 , и, пробыв в ней некоторое время, равное $\tau_4 - \tau_3$, выйдет из нее в момент $\tau = \tau_4$. Следовательно, τ_0 и τ_4 — два последовательных момента выхода изображающей точки из A_0 . Точечное преобразование τ_0 в τ_4 (будем называть его T -преобразованием) запишется системой уравнений, состоящей из (19) — (25). Таким образом, изучение движения шпунта сводится к исследованию T -преобразования на отрезке изменения τ_0 от 0 до Θ . Так же, как и в случае $R = 0$, в дальнейшем ограничимся рассмотрением простейшего движения с периодом, равным периоду ударов.

Одноударное периодическое движение с продавливанием

а) Область существования. Рассмотрим возможные случаи одноударного периодического движения, отличающиеся друг от друга лишь моментом нанесения удара: 1) удар происходит в период разжатия пробки, 2) удар — во время подскока, 3) удар происходит в период сжатия пробки, 4) удар — во время продавливания.

Не находя пока линий, разграничивающих эти случаи, найдем границу на плоскости параметров V, Θ , отделяющую одноударное периодическое движение с продавливанием от других движений. Прежде всего, исходя из условия $\dot{\xi}_3 = 0$, определим границу области одноударного периодического движения с продавливанием и без продавливания во всех указанных вариантах. В первом случае эта граница совпадает с аналогичной границей, найденной ранее для случая $R = 0$:

$$|\sin(\Theta/2)| = V/2.$$

Во втором случае для нахождения границы в T -преобразовании надо положить $N_1, N_2, M, \dot{\xi}_3$ равными нулю ($K=1$); учитывая условие периодичности $\tau_3 - \tau_0 = \Theta$, получим:

$$\Theta = 2\pi - 2 \arccos \rho - V/\rho + 2\sqrt{1-\rho^2}/\rho.$$

В третьем случае $\dot{\xi}_3 = 0$ только при $V = 0$. Четвертый случай не дает искомой границы, так как движение с продавливанием может быть лишь при наличии удара на окружности или во время подскока; если вместе с тем есть еще удар в период продавливания, то движение не может быть одноударным.

Теперь найдем в области одноударного периодического движения с продавливанием (на рис. 8 к ней относится заштрихованная часть плоскости) границы, разделяющие случаи 1, 2, 3. Условием для определения границы между случаями 1 и 2 является совпадение удара с точкой A_1 (рис. 7): $\Theta - \tau_0 = \pi - \arccos \rho$. Выписывая точечное преобразование для первого случая и учитывая приведенное условие, после ряда преобразований получим следующие уравнения, определяющие эту границу:

$$\Theta = \beta + \pi - \arccos \rho + \sqrt{V(V - 2\sqrt{1-\rho^2})};$$

$$\sin \beta = \frac{V - \sqrt{1 - \rho^2} + \rho \sqrt{V(V - 2\sqrt{1 - \rho^2})}}{1 + V^2 - 2V\sqrt{1 - \rho^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{(V - \sqrt{1 - \rho^2}) \sqrt{V(V - 2\sqrt{1 - \rho^2})} - \rho}{1 + V^2 - 2V\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

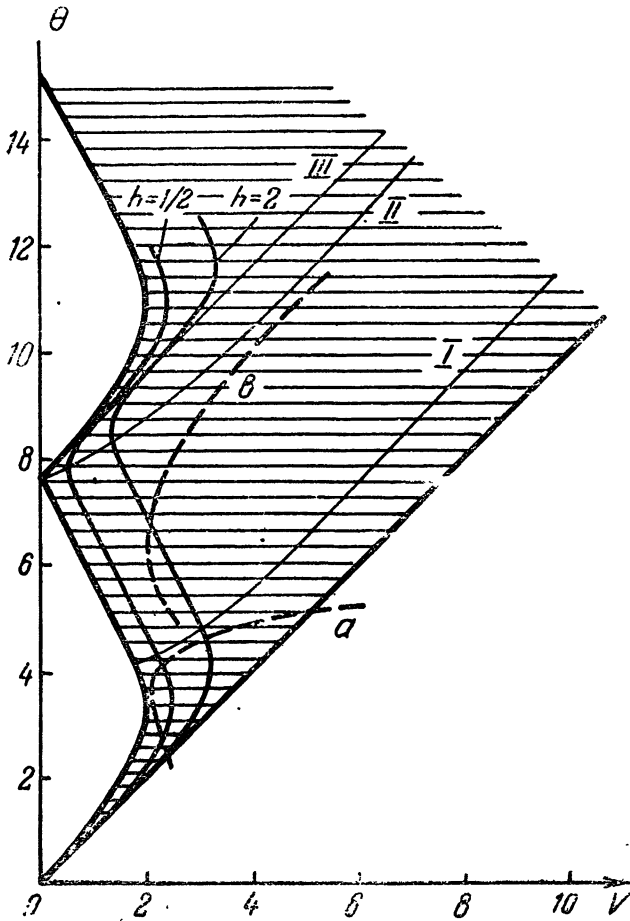


Рис. 8.

Аналогично граница между случаями 2 и 3 находится из точечного преобразования, записанного для случая 2, и условия совпадения удара с точкой A_2 : $\Theta - \tau_0 = \pi - \arccos \rho + 2\sqrt{1 - \rho^2} / \rho$. В результате получаем:

$$\sin(\tau_3 - \Theta) = \frac{V + \sqrt{1 - \rho^2} + \rho \sqrt{V(V + 2\sqrt{1 - \rho^2})}}{1 + V^2 + 2V\sqrt{1 - \rho^2}};$$

$$\cos(\tau_3 - \Theta) = \frac{(V + \sqrt{1 - \rho^2}) \sqrt{V(V + 2\sqrt{1 - \rho^2})} - \rho}{1 + V^2 + 2V\sqrt{1 - \rho^2}};$$

$$\tau_3 - \Theta = \Theta - \arccos(-\rho) - \frac{2\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho} - \sqrt{V(V + 2\sqrt{1 - \rho^2})}.$$

Граница между случаями 3 и 1 определяется из T -преобразования, записанного для случая 3, и условия удара в точке A_0 : $\Theta - \tau_0 = 2 \arccos(-\rho) + 2\sqrt{1-\rho^2}/\rho$. Из них находим:

$$\Theta = V + 2 \arccos(-\rho) + 2\sqrt{1-\rho^2}/\rho.$$

Для $\rho = 1/2$ эти границы изображены на рис. 8 (соответственно линии I, II, III).

б) Устойчивость движения. Исследуем устойчивость периодического движения с продавливанием отдельно для всех трех случаев.

В первом случае, как и в случае $R = 0$, движение всюду устойчиво, за исключением линий $\Theta = V + \pi k$ при k — четном и $\Theta = \pi k \pm \sqrt{V^2 - 4}$ при k — нечетном.

Во втором случае

$$\frac{d\tau_4}{d\tau_0} = \frac{\rho(\tau_2 - \tau_1) - \sqrt{1-\rho^2} - V\rho \cos(\tau_3 - \tau_2)}{\rho(\tau_2 - \tau_1) - \sqrt{1-\rho^2} + V}.$$

Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $-1 < d\tau_4/d\tau_0 < 1$. Правое неравенство всегда выполняется, а левое неравенство дает границу (указанную на рис. 8 пунктирной кривой a), которая для $\rho = 1/2$ целиком лежит вне этой области.

В третьем случае

$$\frac{d\tau_4}{d\tau_0} = 1 - V \sin(\tau_3 - \Theta).$$

Из условия устойчивости находим две границы; одна из них совпадает с границей существования данного случая, другая целиком лежит вне соответствующей области и указана пунктирной кривой b на рис. 8.

Проверка для отдельных точек показывает, что во всей области существования движение устойчиво.

в) Исследование скорости погружения. Скорость погружения v равна $\xi_3^2/2\Theta$. В первом случае ξ_3 определяется уравнением (6), где вместо ξ_1 надо положить ξ_3 . Во втором случае ξ_3 определяется из следующей системы уравнений:

$$\xi_3^2 = \frac{\xi_2^4 - \xi_2^2 + 2\rho^2 \xi_2^2 - \rho^2 + \rho^4}{\xi_2^2 + \rho^2};$$

$$\sin \left[\Theta - \xi_3 - \arccos(-\rho) - \frac{\xi_2 + \sqrt{1-\rho^2} - V}{\rho} \right] = \frac{\xi_2 + \rho \xi_3}{\xi_2^2 + \rho^2};$$

$$\cos \left[\Theta - \xi_3 - \arccos(-\rho) - \frac{\xi_2 + \sqrt{1-\rho^2} - V}{\rho} \right] = \frac{\xi_2 \xi_3 - \rho}{\xi_2^2 + \rho^2}.$$

В третьем случае ξ_3 находим, решая уравнение

$$1 + \frac{\xi_3^2}{2} - (\xi_3 \rho + \sqrt{1-\rho^2}) \sin \left[\Theta - \xi_3 - \frac{2\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} - \arccos(-\rho) \right] + (\rho - \xi_3 \sqrt{1-\rho^2}) \cos \left[\Theta - \xi_3 - \frac{2\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} - \arccos(-\rho) \right] = \frac{V^2}{2}.$$

На рис. 8 нанесены линии равной глубины погружения за период движения Θ ($h=1/2$ и $h=2$) для $\rho=1/2$. Скорость погружения находится делением h на Θ .

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплин, Виброударные механизмы, Автотрансиздат, М., 1953.
2. С. А. Осмаков, Теория вибрационного и ударновибрационного погружения свай, Диссертация, Л., 1954.
3. И. К. Пчелин, Исследование динамики вибромолота для погружения свай, Диссертация, М., 1955.
4. Л. В. Беспалова, К теории виброударного механизма, Изв. АН СССР, ОТН, 5, 3 (1957).
5. Ю. И. Неймарк, Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания, Инж. сборник, 16, 13 (1953).
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 апреля 1959 г.