

ВОЗБУЖДЕНИЕ ГЛАДКОГО ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ. II

Е. Н. Васильев

1. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ВОЛНОЙ ТМ

В первой части данной работы [1] были рассмотрены общие вопросы, связанные с интегральными уравнениями граничной электродинамической задачи для идеально проводящего тела вращения. Здесь мы дадим несколько примеров решения интегральных уравнений. При этом будем пользоваться уравнениями для плотности электрического тока, решения которых дают физически более наглядную картину, чем решения уравнений для магнитного тока.

В качестве первого примера рассмотрим задачу осесимметричного возбуждения толстого цилиндра конечной длины поперечной щелью. Вследствие осевой симметрии достаточно рассмотреть систему уравнений (7) [1] из первой части работы при одном значении индекса m , равном нулю. В этом случае система (7) [1] распадается на два независимых уравнения, из которых мы воспользуемся только одним уравнением, соответствующим волне ТМ:

$$j_{0v}(v) = 2j_{0v}^{\text{перв}}(v) - \int_{v'} P_{011}(v, v') j_{0v}(v') h'_2 h'_3 dv'. \quad (1)$$

Используя соотношения (3), (12), (23) и (26) из статьи [1], запишем:

$$P_{011}(v, v') = [(z - z')^2 \cos \Theta - R' \sin \Theta] Q_1 + R \sin \Theta' Q_0. \quad (2)$$

Здесь z, R — цилиндрические координаты точки v ; z', R' — цилиндрические координаты точки v' ; Θ — угол между вектором внешней нормали и осью вращения в точке v' .

В качестве координаты v в уравнении (1) возьмем длину дуги образующей тела вращения. При этом коэффициент Ламе h'_2 будет равен единице. Коэффициент Ламе h'_3 равен R' в любой координатной системе вращения.

Для численного решения уравнения (1) достаточно удобным оказался метод Крылова и Боголюбова [2]. Этот метод состоит в том, что уравнение (1) заменяется уравнением

$$j_{0v}(v) = 2j_{0v}^{\text{перв}}(v) - \sum_{l=1}^n j_{0v}(v'_l) \int_{v'_l - \Delta v'_l/2}^{v'_l + \Delta v'_l/2} P_{011}(v, v') h'_3 dv' + a, \quad (3)$$

где a — ошибка, возникающая при замене интеграла суммой. По существу, переход от (1) к (3) означает замену искомой плотности тока кусочно-постоянной функцией.

В преобразованном уравнении (3) координате v даются последовательно значения v'_1, v'_2, \dots, v'_n и малая величина a полагается равной

нулю, в результате чего получается система линейных алгебраических уравнений для определения плотности тока в точках v'_l :

$$j_{0v}(v'_s) + \sum_{l=1}^n j_{0v}(v'_l) C_{sl} = 2j_{0v}^{\text{перв}}(v'_s) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где

$$C_{sl} = \int_{v'_l - \Delta v'_l/2}^{v'_l + \Delta v'_l/2} P_{011}(v, v') h'_3 dv'. \quad (5)$$

Достоинствами данного метода являются простота и возможность применения к уравнениям с ядрами, имеющими особенность. Последнее обстоятельство особенно важно для уравнения (1), поскольку ядро $P_{011}(v, v')$ обращается в бесконечность при $v = v'$. Точность решения, полученная указанным методом, невысока, что является следствием слишком грубой аппроксимации искомой функции. Однако при расчетах, связанных с практическими задачами, очень высокая точность и не требуется.

Таким образом, с вычислительной точки зрения решение интегрального уравнения сводится к определению элементов матрицы и правой части системы уравнений (4), а затем к решению этой системы.

Ядро $P_{011}(v, v')$ там, где точки v и v' не совпадают в пределах небольших интервалов $\Delta v'$, меняется по закону, близкому к линейному; поэтому все элементы C_{sl} , кроме диагональных, вычислялись по формуле (5) как произведение длины интервала на значение подынтегральной функции в середине этого интервала. У диагональных элементов отдельно вычислялись сингулярная и регулярные части. При вычислении интеграла (5) от сингулярной части ядра выражение (2) оказывается мало пригодным; лучшие результаты дает выражение для ядра (14) в [1], которое при $m = 0$ приобретает вид:

$$P_{011} = -\frac{\partial S_1}{h'_3 \partial u'} - \frac{S_1}{R'} \sin \Theta. \quad (6)$$

Подставив в (6) выражение для сингулярной части функции S_1 (20) [1], получим сингулярную часть ядра интегрального уравнения. Для вычисления интеграла от выражения (6) приходится пользоваться разложениями полных эллиптических интегралов, приведенных в [3].

Вычисление регулярной части диагональных элементов производилось так же, как и вычисление недиагональных элементов, т. е. путем умножения значения подынтегральной функции в середине интервала на величину интервала Δv .

Правая часть системы уравнений (4) представляет собой первичное поле стороннего магнитного тока, изображающего щель. Мы рассматриваем возбуждение тела поперечной щелью с осесимметричным распределением поля, это соответствует магнитному току с единственной азимутальной составляющей и не зависящему от φ . Для вычисления правой части использовалась формула (30) из [1], которая в этом конкретном случае имеет простой вид:

$$j_{0v}^{\text{перв}}(v) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int j_{0\varphi}^{\text{ст}}(v') S_1 R' dv'. \quad (7)$$

Интеграл в (7) берется по щели.

Указанный расчет был проделан для цилиндров конечной длины,

с диаметрами $0,287 \lambda$, $0,192 \lambda$, $0,096 \lambda$, ограниченных с торцов полу-сферами. Длина образующей всех цилиндров составляла $0,95 \lambda$. Величина интервала Δv была выбрана равной примерно $0,1 \lambda$. Таким образом, решение интегрального уравнения для каждого из трех цилиндров свелось к решению систем десяти линейных алгебраических уравнений с десятью неизвестными. Системы уравнений были решены на электронной вычислительной машине; полученные в результате распределения тока приведены на рис. 1—3. На этих же рисунках приведены диаграммы направленности для первого и третьего цилиндров. Диаграммы направленности вычислялись путем численного интегрирования по формуле (35) из [1].

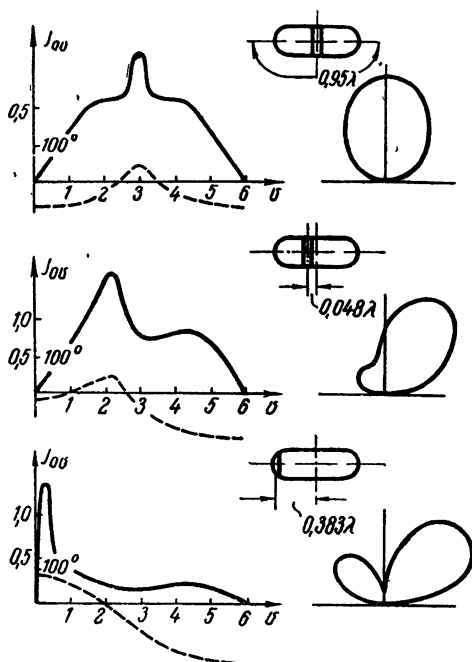


Рис. 1. Распределение плотности тока j_{0v} на цилиндре диаметром $0,287 \lambda$ и диаграммы направленности излучения:

— модуль плотности тока, - - - фаза плотности тока.

При сильном смещении щели диаграммы направленности приобретают двухлепестковый характер.

Остановимся кратко на точности полученных результатов. Основной ошибкой расчета будет ошибка, появляющаяся в результате замены уравнения (1) выражением (3) (т. е. величина a). Эта величина была оценена следующим простым приемом. Интеграл, входящий в уравнение (1), был вычислен сначала по формуле прямоугольников (т. е. точно так, как это делалось при решении интегрального уравнения), а затем более точно по формуле Симпсона при вдвое меньшем интервале Δv . Результаты вычислений были сравнены между собой. При этом в качестве величины $j_{0v}(v)$ использовалось одно из распределений плотности тока, приведенное на рис. 1. В результате оказалось, что во всех точках, кроме точки, где расположена щель, ошибка не превышала $2-3\%$; в точке расположения щели ошибка составляла 7% . Таким образом, при длине интервала Δv , равной $\sim 0,1 \lambda$, использованный нами метод решения интегрального уравнения дает вполне удовлетворительную точность.

Из рисунков видно, что распределение тока носит характер падающих и отраженных волн с заметным затуханием и напоминает распределение тока в длинной линии с потерями. С увеличением диаметра цилиндра затухание волны, распространяющейся вдоль него, увеличивается; это видно, например, из того, что отношение величины тока в узле к величине тока в пучности на цилиндре диаметром $0,287 \lambda$ составляет $\sim 0,8$, а на цилиндре диаметром $0,096 \lambda$ примерно $0,5$.

В точке расположения щели имеется максимум тока, который соответствует квазистатическому полю щели. С ростом диаметра цилиндра величина этого максимума растет.

Диаграммы направленности, симметричные при симметричном положении щели, при смещении щели поворачиваются в сторону, противоположную смещению щели. При

2. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ВОЛНОЙ ТЕ

В этом случае так же как и в предыдущем, система уравнений (7) [1] рассматривается при значении индекса m , равном нулю, но уравнение для $j_{0\varphi}(v)$ теперь соответствует волне ТЕ:

$$j_{0\varphi}(v) = 2j_{0\varphi}^{\text{перв}}(v) - \int_{v'} P_{022}(v, v') j_{0\varphi}(v') h_2' h_3' dv' \quad (8)$$

Когда точки v и v' не совпадают, ядро вычисляется по формуле

$$P_{022} = [R \sin \theta + (z-z') \cos \theta] Q_1 - R' \sin \theta \cdot Q_0 \quad (9)$$

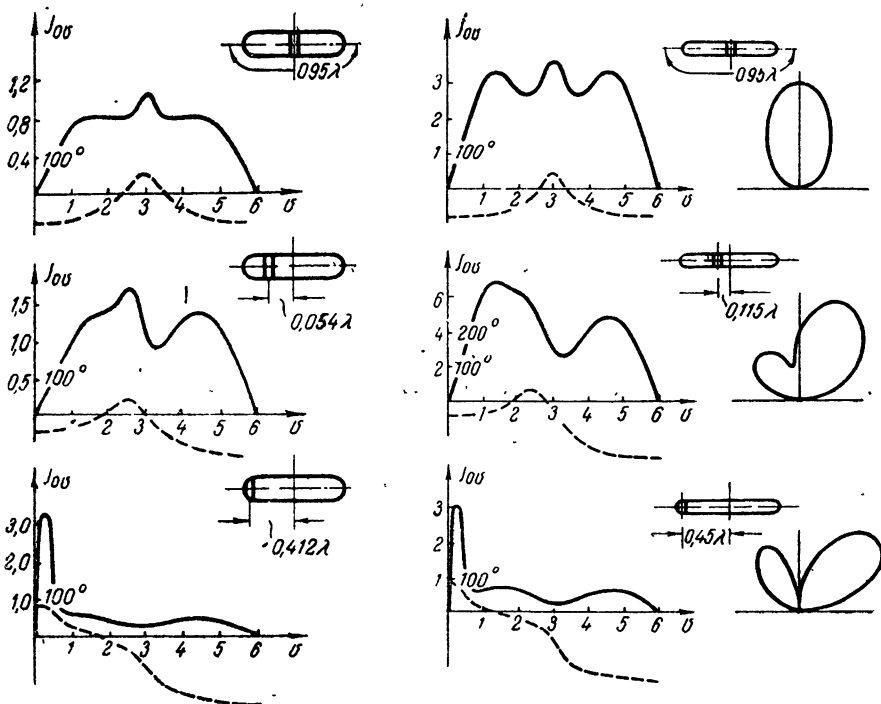


Рис. 3.

Рис. 2.

Рис. 2. Распределение плотности тока $j_{0\varphi}$ на цилиндре диаметром $0,192\lambda$ и диаграммы направленности излучения:

— модуль плотности тока, - - - фаза плотности тока.

Рис. 3. Распределение плотности тока $j_{0\varphi}$ на цилиндре диаметром $0,095\lambda$ и диаграммы направленности излучения:

— модуль плотности тока, - - - фаза плотности тока.

(обозначения полностью аналогичны обозначениям в (2)). При совпадающих точках более удобной оказывается формула

$$P_{022} = \frac{\partial S_1}{h_1 c u} + \frac{S_1}{h_3} \sin \theta, \quad (10)$$

аналогичная (6).

Весь процесс вычислений идет так же, как и в предыдущем слу-

чае; отличие состоит лишь в том, что правая часть системы алгебраических уравнений вычисляется, в соответствии с (30) [1], по той же формуле, что и ядро.

При возбуждении тела вращения волной TE токи на теле обычно не играют столь существенной роли, как при возбуждении волной TM . Поэтому в данном случае подробных расчетов не проводилось. Было рассчитано распределение тока на цилиндре диаметром $0,287 \lambda$, ограниченного с торцов полусферами, при возбуждении его магнитным диполем. Результаты расчета приведены на рис. 4. Как видно из этого

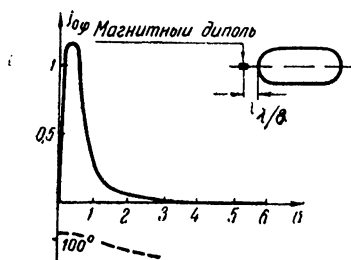


Рис. 4. Распределение плотности тока j_{ϕ} на цилиндре диаметром $0,287 \lambda$ и диаграммы направленности излучения;

— модуль плотности тока, — — — фаза плотности тока.

рисунка, вблизи диполя имеется резкое увеличение тока; на остальной части тела токи очень малы. Поле токов, текущих на теле, оказывается небольшим, так что диаграмма направленности определяется излучением диполя.

Из этого следует, что в рассмотренном нами случае, когда тело не имеет острых углов на своей поверхности, учет токов на теле вращения при возбуждении его волной TE мало существенен.

Предложенный в работе метод позволяет решать задачи возбуждения и дифракции на идеально проводящих телах вращения. В примерах, приведенных во второй части работы, рассмотрены осесимметричные задачи. Однако нет никаких ограничений для применения метода и к несимметричным задачам. Разница будет заключаться лишь в том, что в несимметричном случае приходится решать не одно интегральное уравнение, а всю систему уравнений (7) [1]. Это приводит к удвоению порядка соответствующей системы линейных алгебраических уравнений при том же числе интервалов Δv .

Методика численного решения интегрального уравнения, примененная в данной работе, и возможности счетной техники накладывают определенные ограничения на размеры тела. Без больших затруднений удастся решать задачи возбуждения для тел с длиной образующей порядка нескольких длин волн. Естественно сравнить предложенный здесь метод с методом собственных функций, который обычно применяется для решения подобных задач. При расчете диаграмм направленности простых антенн, расположенных вблизи цилиндра бесконечной длины или шара, метод собственных функций имеет существенные преимущества в смысле простоты расчета. Однако уже в случае симметричного возбуждения сфероида расчетные трудности становятся сравнимыми. В более сложных случаях метод собственных функций либо вообще не применим ввиду трудностей, связанных с построением полной системы решений векторного волнового уравнения, либо с его помощью задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений (как, например, в случае несимметричного возбуждения сфероида [4]).

Следует также отметить важное преимущество метода интегральных уравнений, которое состоит в том, что в результате решения мы получаем физически наглядную картину распределения токов на теле, которая дает возможность вычислять ближние поля и судить о влиянии различных факторов на характеристики излучения.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Г. Т. Маркову за ценные советы и указания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е. Н. Васильев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 588 (1959).
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М. — Л., 1952.
3. Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций, Гостехиздат, М., 1949.
4. Г. Т. Марков, Радиотехника и электроника, **2**, 433 (1957).

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
8 января 1958 г.,
после переработки
6 мая 1959 г.