ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ ОТРЕЗКА СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ СПЕКТРУ

А. Г. Кисляков

Этот вопрос встречается при оценке величины минимального обнаружимого сигнала измерителей слабых сигналов [1] или в случае, когда необходимо найти среднеквадратичную девиацию частоты генератора радиочастот за время T по известному спектру флюктуаций частоты [2, 3], а также в других задачах.

Разброс какой-либо случайной величины $u(t)$ около ее усредненного за время T значения $\widehat{u(t)}$ (считаем $\overline{u(t)} = 0$; прямая черта сверху обозначает среднее по ансамблю) может быть охарактеризован величиной

$$D_T = \overline{\widehat{[u(t) - \widehat{u(t)}]^2}}, \tag{1}$$

которую мы назовем „дисперсией за время T". Как нетрудно видеть, $D_T \to \overline{u^2(t)}$ при $T \to \infty$. Раскрывая скобки в (1) и меняя, где это необходимо, порядок усреднения по ансамблю и по времени, имеем:

$$D_T = \overline{u^2(t)} - \overline{[\widehat{u(t)}]^2} =$$

$$= \int_0^\infty w(f)\,df - \int_0^\infty (\pi f T)^{-2} \sin^2(\pi f T)\, w(f)\,df,$$

где $w(f)$ есть спектральная плотность среднего квадрата $u(t)$. Вводя некоторый эффективный спектр $w_T(f)$ (такой, что $D_T = \int_0^\infty w_T(f)\,df$), получаем:

$$w_T(f) = w(f)\,[1 - (\pi f T)^{-2} \sin^2(\pi f T)] + w_0(f), \tag{2}$$

где $w_0(f)$ — некоторая функция, для которой $\int_0^\infty w_0(f)\,df = 0$. Более строгий расчет, который здесь не приводится, показывает, что для стационарных случайных процессов $w_0(f) \equiv 0$.

Итак, первые два члена в правой части соотношения (2) представляют собой выражение для эффективного спектра $w_T(f)$, определяющего дисперсию процесса $u(t)$ за время T. Колебания с частотами $f < T^{-1}$ входят в $w_T(f)$ с меньшим весом, чем в истинный спектр $w(f)$, что является следствием конечности отрезка функции $u(t)$. Роль весовой функции играет в (2) множитель $g(T, f) = 1 - (\pi f T)^{-2} \sin^2(\pi f T)$. В литературе [2, 3] часто используется более простая приближенная формула для $g(T, f)$.

$$g(T, f) = \begin{cases} 1 & \text{при } f \geqslant T^{-1}, \\ 0 & \text{при } f < T^{-1}. \end{cases} \tag{3}$$

При этом из спектра $w(f)$ отбрасываются все частоты, меньшие T^{-1}, которые дают медленные (так называемые „односторонние") уходы. Между тем, „односторонние" уходы могут в некоторых случаях дать значительный вклад в дисперсию за время T. Критерием применимости приближения (3) может служить условие

$$|k(T) - 1| \ll 1, \tag{4}$$

где $k(T) = D_T / D'_T$, а $D'_T = \int_{T^{-1}}^\infty w(f)\,df$. Выполнимость условия (4) зависит как от величины T, так и от формы спектра $w(f)$. Для спектра

$$w_1(f) = [(2\pi f \tau)^2 + 1]^{-1} \tag{5}$$

функция $k_1(T)$ имеет вид, изображенный на графике рис. 1а. Наибольшая ошибка, связанная с использованием приближенной формулы (3), возникает в области $T \ll \tau$ (τ — время корреляции процесса $u(t)$).

Интересно рассмотреть еще один пример, иллюстрирующий роль формы спектра $w(f)$.

Пусть спектр процесса $u(t)$ описывается формулой

$$w_2(f)=\begin{cases} Bf_m^{-\alpha} & \text{при } 0 \leqslant f \leqslant f_m, \\ Bf^{-\alpha} & \text{при } f \geqslant f_m, \end{cases} \tag{6}$$

где $1 < \alpha < 3$. Тогда *

$$k_2(T) \simeq \pi^{\alpha-1}(\alpha-1)\left\{p(\alpha)+q(\alpha)\,\varepsilon^{3-\alpha}\right\},$$

где

$$p(\alpha)=\frac{\pi 2^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha^2-1)\Gamma(\alpha-1)}\operatorname{cosec}\frac{(\alpha-1)\pi}{2},$$

а $q(\alpha)$ представляет собой некоторую дробно-рациональную функцию α. Функция $k_2(T)$ в рассматриваемом приближении весьма слабо зависит от T, и ошибка будет невелика, если принять, что

$$k_2(T) \simeq (\alpha-1)\,\pi^{\alpha-1}p(\alpha)=k_2(\alpha). \tag{7}$$

Полученный результат является точным при $\varepsilon=0$. Функция $k_2(\alpha)$ изображена на рис. 1б. Как следует из графика, применение приближенной формулы (3), обычно целесообразное для упрощения расчетов, не дает значительной ошибки** лишь при $\alpha \sim 1$. Физически это означает, что при достаточно медленном росте $w(f)$ с уменьшением частоты „односторонние" уходы дают достаточно малый вклад в дисперсию за время T.

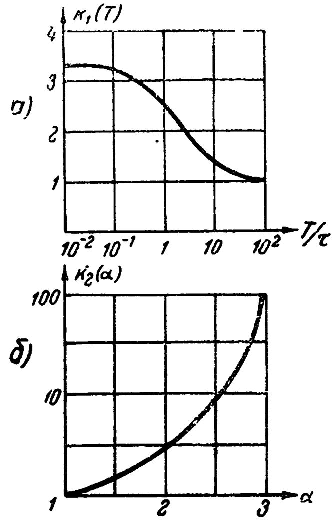

Рис. 1.

Автор благодарен В. С. Троицкому и А. Н. Малахову за полезные советы и критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика 2, 139 (1959).
2. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 1, 1, 20 (1958).
3. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 (1959).

Исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 26 марта 1959 г.

* Предполагается, что $\varepsilon=\pi f_m T \ll 1$ и всеми членами, начиная с $\varepsilon^{5-\alpha}$, мы пренебрегаем.

** Можно показать, что ошибка, связанная с использованием приближенной формулы (3) мала и при $\alpha < 1$, что, впрочем, физически ясно.