ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

Ю. И. Неймарк

В настоящей работе устанавливаются критерии устойчивости и неустойчивости неподвижной точки отображения евклидова пространства в себя в так называемых критических случаях. Часть формулируемых ниже результатов была получена в работе [1] автора при рассмотрении бифуркаций неподвижных точек.

1. Пусть рассматриваемое точечное отображение T_n n-мерного евклидова пространства R_n в себя, переводящее точку M $(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n)$ в точку $\overline{M}$ $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, может быть представлено в виде:

$$\overline{x} = f(x, y); \qquad \overline{y} = y^*(x) + g(x, y), \tag{1}$$

где x — m-мерный вектор, компонентами которого являются первые m координат точки M, y — $(n-m)$-мерный вектор, компонентами которого являются $n-m$ последних координат точки M, и

$$|g(x, y)| < q(x, y)\,|y - y^*(x)|. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение T_m m-мерного пространства в себя, определяемое следующим образом:

$$x = f[x, y\ (x)]. \tag{3}$$

Очевидно, что если x — неподвижная точка отображения T_m, то $[x, y\ (x^*)]$ будет неподвижной точкой отображения T_n.

Теорема 1. Если $V(x)$ в окрестности неподвижной точки x является функцией Ляпунова [2] для отображения T_m и в некоторой окрестности неподвижной точки $[x, y^*(x^*)]$ отображения T_n

$$|q(x, y)| < q < 1;$$

$$|V[f(x, y)] - V[f(x, y\ (x))]| < B\,|y - y\ (x)|, \tag{4}$$

то функция

$$\Omega(x, y) = V(x) + A\,|y - y^*(x)| \qquad (5)$$

при $A > (1-q)^{-1}B$ будет в окрестности точки $(x^*, y^*(x^*))$ функцией Ляпунова для отображения T_n.

Действительно, в достаточно малой окрестности неподвижной точки $(x^*, y^*(x^*))$

$$\begin{aligned}\Omega(\bar{x}, \bar{y}) - \Omega(x, y) &= V[f(x, y^*(x))] - V(x) + V[f(x, y)] - \\ &- V[f(x, y^*(x))] + A\,|g(x, y)| - A\,|y - y^*(x)| < V[f(x, y^*(x))] - \\ &- V(x) - [A(1-q) - B]\,|y - y^*(x)| < 0,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения достаточное число раз непрерывно дифференцируемого преобразования T и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ отличны от $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$. Тогда после соответствующей линейной замены переменных в окрестности неподвижной точки $x^* = y^* = 0$ преобразование T можно записать в виде:

$$\bar{x} = Lx + \Omega(x, y); \qquad \bar{y} = My + \Delta(x, y), \qquad (6)$$

где матрица L имеет характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, а матрица M — корни $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$; $|\Omega|$ и $|\Delta|$ не ниже, чем второго порядка малости относительно $|x|$ и $|y|$. В силу теоремы 1, если $|\lambda_{m+1}|, \ldots, |\lambda_n| < 1$ и если вопрос об устойчивости отображения

$$\bar{x} = Lx + \Omega(x, y^*), \qquad (7)$$

где y^* в окрестности неподвижной точки однозначно определяется через x согласно уравнению $y^* = My^* + \Delta(x, y^*)$, может быть решен с помощью непрерывно дифференцируемой функции Ляпунова, то неподвижная точка отображения T устойчива тогда и только тогда, когда устойчива неподвижная точка отображения (7). Из этого, в частности, следует, что рассмотрение устойчивости неподвижной точки преобразования n-мерного евклидова пространства в себя в критических случаях наличия одного корня, равного $+1$ или -1, или двух комплексно-сопряженных корней $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$ сводится к такой же задаче для отображения прямой в прямую или соответственно плоскости в плоскость.

2. Случай $\lambda_1 = -1$ после возведения отображения T в квадрат сводится к случаю $\lambda_1 = +1$. Поэтому достаточно рассмотреть отображение

$$\bar{x} = x + a_s x^s + O(x^{s+1}) \qquad (a_s \neq 0). \qquad (8)$$

Если s нечетное, искомой функцией Ляпунова будет $V = -a_s x^2$, если s четное, то такой функцией будет $V = -a_s x^3$. В силу этого при четном s всегда имеет место неустойчивость, а при нечетном s имеет место устойчивость, если $a_s < 0$, и неустойчивость, если $a_s > 0$.

3. Случай $\lambda_1 = e^{i\varphi}$, $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$, где $0 < \varphi < \pi$, сводится, согласно сказанному, к исследованию устойчивости точечного отображения плоскости в плоскость вида:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= e^{i\varphi}u + au^2 + buv + cv^2 + du^3 + ku^2v + fuv^2 + gv^3 + \ldots; \\ \bar{v} &= e^{-i\varphi}v + c'u^2 + b'uv + a'v^2 + g'u^3 + f'u^2v + k'uv^2 + d'v^3 + \ldots.\end{aligned} \qquad (9)$$

Известно, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такие целые числа n и m, что $|n\varphi - 2\pi m\varphi| < \varepsilon$. Иттеррируя теперь n раз преобразование (9), найдем, что

$$|u_n|^2 = |u|^2 + \varepsilon A\,|u|^3 + nB\,|u|^4 + C\,|u|^4, \qquad (10)$$

где величины A и C остаются ограниченными вне зависимости от n, а

$$B = 2\,\mathrm{Re}\left\{ke^{-is} + ab\,\frac{e^{-i\varphi}(1 - e^{-i\varphi})}{1 - e^{i\varphi}} + bb'\,\frac{1}{e^{i\varphi} - 1} - 2cc'\,\frac{1}{1 - e^{3i\varphi}}\right\}. \qquad (11)$$

В силу (10) неподвижная точка $u = v = 0$ устойчива при $B < 0$ и неустойчива при $B > 0$. Построение функции Ляпунова для отображения (9) ввиду краткости опускается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, **1**, 2, 95 (1958).
2. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, **1**, 1, 41 (1958).

Исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 апреля 1959 г.