ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том II, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1959*

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ НЕПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ*

А. В. Гапонов

Рассматривается задача о возбуждении линии передачи непрямолинейным электронным потоком, в котором частицы совершают не только продольные, но и поперечные колебания. Выяснено, при каких условиях электронный пучок возбуждает в системе монохроматические волны. Получено выражение для амплитуд нормальных волн через координаты электронов в пучке.

При взаимодействии высокочастотного поля в линии передачи (волноводе) с электронным потоком в последнем возбуждаются, вообще говоря, не только продольные, но и поперечные колебания. Колебания электронного луча в направлениях, перпендикулярных статическим траекториям электронов, приводят, как нетрудно видеть, к тому, что плотность конвекционного тока в неподвижной системе отсчета не является всюду синусоидальной функцией времени даже при взаимодействии со сколь угодно слабой монохроматической волной, когда каждый отдельный электрон в пучке совершает гармонические колебания. Это обстоятельство—несинусоидальная зависимость плотности тока от времени—затрудняет отыскание самосогласованного решения задачи о взаимодействии электронного пучка с монохроматической волной. С другой стороны, более или менее очевидно, что в пучке под действием слабого монохроматического высокочастотного поля устанавливается в линейном приближении как раз такое распределение плотности тока (несинусоидально зависящей от времени), которое возбуждает в линии монохроматическую волну. Представляется поэтому целесообразным выяснить, при каких условиях электромагнитное поле, возбуждаемое в линии передачи электронным потоком с заданным законом модуляции частиц по скорости, может быть представлено в виде суперпозиции монохроматических нормальных волн (одинаковой частоты), а также найти выражения для амплитуд этих волн через наиболее легко определяемые характеристики электронного потока (например, через координаты и скорости частиц).

Возбуждение волновода током, произвольным образом зависящим от времени, полностью описывается „волноводными уравнениями“ [1]. Однако ввиду громоздкости этих уравнений мы рассмотрим эту задачу сначала в квазистационарном приближении (для линий передачи с большим замедлением), а затем распространим полученные результаты на любые волноводные системы.

1. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ
(квазистационарное приближение)

Рассмотрим линию передачи, пронизываемую электронным потоком (пример такой линии приведен на рис. 1), и допустим, что поперечные размеры линии d и длина основной волны в ней $\lambda_в$ настолько малы, что электрическое поле можно считать потенциальным:

---

* Доклад на III Всесоюзной конференции МВО по радиоэлектронике, Киев, 1959.

$$E = -\nabla\varphi; \qquad \varphi = V(z,t)\Psi(xyz) + \varphi_\rho. \tag{1}$$

Здесь φ_ρ — потенциал кулоновского поля пространственного заряда пучка, распределенного с плотностью $\rho(xyz,t)$, $V(z,t)$ — напряжение в линии, $\Psi(xyz)$—периодическая по z (с периодом D) функция распределения статического потенциала.

Допустим далее, что d, $D \ll \lambda_в$ (при этом можно считать, что Ψ зависит только от поперечных координат: $\Psi(x,y)$). Составляя телеграфные уравнения для тока в линии $J(z,t)$ и напряжения $V(z,t)$ и учитывая с помощью теоремы взаимности заряд, индуцированный на проводниках пространственным зарядом пучка, получим:

Рис. 1.

$$\frac{\partial V}{\partial z} + L_1\frac{\partial J}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial J}{\partial z} + C_1\frac{\partial V}{\partial t} = M(z,t), \tag{2}$$

где L_1 и C_1 — погонные параметры (самоиндукция и емкость) линии,

$$M(z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_\perp} \rho(xyz,t)\Psi(x,y)dS \tag{3}$$

(интеграл берется по поперечному сечению линии). Если исключить из (2) ток J, то для напряжения $V(z,t)$ получим неоднородное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - L_1 C_1\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -L_1\frac{\partial}{\partial t}M(z,t). \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) следует, что электронный поток возбуждает в системе монохроматическую волну в том случае, если $M(z,t)$ является синусоидальной функцией времени. Поскольку при этом плотность заряда $\rho(xyz,t)$ может сложным образом зависеть от времени, кулоновское поле пространственного заряда E_ρ, определяемое уравнениями

$$E_\rho = -\nabla\varphi_\rho; \qquad \nabla\varphi_\rho = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(xyz,t), \tag{5}$$

не будет, вообще говоря, гармонической функцией времени в окрестности пучка. Это обстоятельство затрудняет последовательный учет поля пространственного заряда. Следует, однако, отметить, что в большинстве практически интересных случаев электронный пучок оказывается сгруппированным таким образом, что осуществляется резонансное (когерентное) возбуждение волны определенного типа в линии передачи. При этом амплитуда волны оказывается достаточно большой для того, чтобы полем пространственного заряда можно было бы в первом приближении пренебречь*.

Рассмотрим подробнее выражение для $M(z,t)$. Внося дифференцирование по времени под знак интеграла и пользуясь уравнением непрерывности, нетрудно выразить $M(z,t)$ через продольную и поперечную составляющие плотности тока $\boldsymbol{j}$ в пучке $j_\parallel$, $\boldsymbol{j}_\perp$:

* Для приближенного учета поля пространственного заряда можно ограничиться первой временной гармоникой решения уравнения (5).

$$M = -\int\limits_{S_\perp} \Psi \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, dS = -\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{S_\perp} j_\parallel \Psi\, dS + \int\limits_{S_\perp} \boldsymbol{j}_\perp \nabla \Psi\, dS. \qquad (6)$$

Если пучок достаточно тонок* и функция распределения потенциала $\Psi(x,y)$ и ее производные мало изменяются в пределах сечения пучка, можно выполнить интегрирование по поперечному сечению в (3) или (6). Будем характеризовать тонкий пучок уравнением $\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r}_\perp(z,t)$, определяющим его форму (см. рис. 1), продольной скоростью частиц $v_z = v_z(z,t)$ и погонным (по отношению к оси z) зарядом $\rho_{\text{пог}} = \rho_{\text{пог}}(z,t)$. Предполагая, что в пучке отсутствуют перекрещивающиеся траектории и не происходит обгона одних электронов другими, будем считать $\boldsymbol{r}_\perp$, v_z и $\rho_{\text{пог}}$ однозначными функциями своих аргументов. Для $M(z,t)$ тогда получим:

$$M(z,t) = -\Psi(\boldsymbol{r}_\perp)\frac{\partial I_\parallel}{\partial z} + \rho_{\text{пог}} \nabla\Psi(\boldsymbol{r}_\perp)\frac{\partial \boldsymbol{r}_\perp}{\partial t}, \qquad (7)$$

где $I_\parallel = \rho_{\text{пог}} v_z$—продольный ток через сечение $z = \text{const}$, связанный со скоростью v_z уравнением

$$\frac{\partial I_\parallel}{\partial z} v_z^2 + \frac{\partial I_\parallel}{\partial t} v_z = I_\parallel \frac{\partial v_z}{\partial t}. \qquad (8)$$

Допустим, что стационарный электронный поток ($I_\parallel = I_0 = \text{const}$, $\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r}_\perp^{(0)} z$, $v_z = v_z^{(0)}(z)$) модулирован малыми колебаниями, т. е.

$$\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r}_\perp^{(0)}(z) + \boldsymbol{r}_\perp^{(1)}(z,t); \qquad v_z = v_z^{(0)}(z) + v_z^{(1)}(z,t),$$

где $|v_z^{(1)}| \ll v_z^{(0)}$, $|\boldsymbol{r}_\perp^{(1)}| \ll d$, $d \sim |\Psi|/|\nabla\Psi|$ — масштаб неоднородности высокочастотного поля. При этом, как нетрудно видеть из (8), переменная составляющая продольного тока также мала:

$$I_\parallel = I_0 + I_\parallel^{(1)}(z,t), \qquad |I_\parallel^{(1)}| \ll |I_0|.$$

Линеаризируя выражения (7), (8), нетрудно убедиться, что, как и следовало ожидать, невозмущенный (стационарный) электронный поток не возбуждает волны в линии передачи ($M^{(0)} \equiv 0$). При синусоидальном возмущении, т. е. при $\boldsymbol{r}_\perp^{(1)} = \boldsymbol{r}_{\perp a}^{(1)}(z)e^{i\omega t}$, $v_z^{(1)} = v_{za}^{(1)}(z)e^{i\omega t}$, величина $M(z,t)$ также является гармонической функцией времени: $M = M_a(z)e^{i\omega t}$. При этом в линии возбуждается монохроматическая волна $V(z,t) = V_a(z)e^{i\omega t}$, амплитуда которой определяется, согласно (4), уравнениями:

$$\frac{d^2 V_a}{dz^2} + h_0^2 V_a = -i\omega L_1 M_a(z); \qquad (9)$$

$$M_a(z) = -\Psi(\boldsymbol{r}_\perp^{(0)})\frac{\partial I_{\parallel a}^{(1)}}{\partial z} + i\omega\frac{I_0}{v_z^{(0)}}\Delta\Psi(\boldsymbol{r}_\perp^{(0)})\boldsymbol{r}_{\perp a}^{(1)}; \qquad (10)$$

$$(v_z^{(0)})^2 \frac{\partial I_{\parallel a}^{(1)}}{\partial z} + i\omega v_z^{(0)} I_{\parallel a}^{(1)} = i\omega I_0 v_{za}^{(1)}, \qquad (11)$$

где $h_0^2 = \omega^2 L_1 C_1$ — постоянная распространения волны в отсутствие электронного пучка.

* Это допущение не принципиально, но упрощает выкладки.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ (общий случай)

Пользуясь „волноводными уравнениями“ (см., например, [1]), нетрудно распространить результаты, полученные выше в квазистационарном приближении, на любые цилиндрические линии передачи. Можно, в частности, показать, что при наличии в пучке малых синусоидальных (во времени) возмущений волна s-го типа, возбуждаемая в линии таким пучком, будет монохроматической, при условии, что амплитуда колебаний частиц в пучке много меньше характерного размера неоднородности поля этой волны. Для амплитуд монохроматических волн получим уравнения, аналогичные (4):

$$\frac{d^2V_s}{dz^2}+h_{0s}^2V_s=-\frac{2ih_{0s}}{N_s}M_s(z), \tag{12}$$

где N_s — норма волны [2] ($N_s>0$), а $M(z,t)=M_s(z)e^{i\omega t}$ для TM и TE-волн определяются соотношениями:

$$M^{TM}e^{i\omega t}=\left[\frac{\varkappa_s^2}{h_{0s}^2}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{S_\perp}j_\parallel\Psi_s^e\,dS+\int\limits_{S_\perp}\boldsymbol{j}_\perp\nabla\Psi_s^e\,dS\right]_\omega; \tag{13}$$

$$M_s^{TE}e^{i\omega t}=\left[-\int\limits_{S_\perp}\boldsymbol{j}_\perp\left[\boldsymbol{z}_0\nabla\Psi_s^m\right]dS\right]_\omega.$$

Здесь Ψ_s^e и Ψ_s^m — двухмерные мембранные функции (пропорциональные продольным компонентам электрического и магнитного полей в нормальных волнах), $\boldsymbol{z}_0$—единичный вектор оси z, $\varkappa_s^2=\omega^2\varepsilon\mu-h_{0s}^2$ — поперечные волновые числа, ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости. Знаком $[\ ]_\omega$ обозначена фурье-компонента частоты ω соответствующей величины. Поля в линии передачи записываются через $V_s(z)$, Ψ_s^e и Ψ_s^m; например, для TM-волн

$$E_z^s=\frac{\partial V_s}{\partial z}\frac{\varkappa_s^2}{h_{0s}^2}\Psi_s^e;\qquad \boldsymbol{E}_{tr}^s=-V_s\nabla\Psi_s^e;\qquad \boldsymbol{B}_{tr}^s=-\frac{\partial V_s}{\partial z}\frac{i\omega\varepsilon\mu}{h_{0s}^2}[\boldsymbol{z}_0\nabla\Psi_s^e], \tag{13а}$$

а для волн TE

$$H_z^s=V_s\frac{\varkappa_s^2}{i\omega\mu}\Psi_s^m;\qquad \boldsymbol{H}_{tr}^s=\frac{\partial V_s}{\partial z}\frac{1}{i\omega\mu}\nabla\Psi_s^m;\qquad \boldsymbol{E}_{tr}^s=V_s[\boldsymbol{z}_0\nabla\Psi_s^m]. \tag{13б}$$

В рассматриваемом здесь линейном приближении, когда амплитуда колебаний частиц в электронном потоке предполагается малой, а сами колебания—синусоидальными, переменная составляющая $M(b,t)$ также является синусоидальной функцией времени. Заметим, однако, что возможность ограничения линейным приближением вытекает, как уже было отмечено, из условия $|\boldsymbol{r}_{\perp a}^{(1)}|\ll|\Psi_s|/|\nabla\Psi_s|$. Для волн с большим порядковым номером это условие, очевидно, не выполняется, благодаря чему поле в линии передачи не является, строго говоря, монохроматическим *.

Решения уравнений (10), (12) могут быть, как известно, записаны в виде суперпозиции двух встречных волн: $V_s(z)=V_s^+(z)e^{-ih_{0s}z}+$

* В квазистационарном приближении сумма полей волн с высокими порядковыми номерами соответствует кулоновскому полю пространственного заряда в окрестности пучка.

$+ V_s^- (z) e^{-ih_{0s}z}$. Если линия передачи бесконечна (или согласована в обе стороны), то для высокочастотного поля в линии нетрудно получить:

$$\boldsymbol{E} = \sum_s (V_s^+ \boldsymbol{E}_s^+ + V_s^- \boldsymbol{E}_s^-); \qquad \boldsymbol{B} = \sum_s (V_s^+ \boldsymbol{B}_s^+ + V_s^- \boldsymbol{B}_s^-), \tag{14}$$

где

$$V_s^{\pm} = \mp \frac{1}{N_s} \int_{z_{1,2}}^{z} \left[\int_{S_\perp} \boldsymbol{j}(xyz,t)\, \boldsymbol{E}_s^{\mp}(xyz)\, dS \right]_\omega dz, \tag{15}$$

а $\boldsymbol{E}_s^{\pm} = \boldsymbol{e}_s^{\pm} e^{\mp ih_{0s}z}$, $\boldsymbol{B}_s^{\pm} = \boldsymbol{b}_s^{\pm} e^{\mp ih_{0s}z}$ — напряженность электрического поля и магнитная индукция в прямой ($e^{-ih_{0s}z}$) и встречной ($e^{+ih_{0s}z}$) нормальных волнах и $z_{1,2}$ — координаты начала и конца электронного пучка. Отметим, что формально эти выражения совпадают с известными формулами [3], описывающими возбуждение волновода синусоидальным током $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(xyz) e^{i\omega t}$; они пригодны для любых (не только TE и TM) волн в линиях передачи.

Подставляя $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$ в выражение (15) для амплитуд нормальных волн и предполагая, что электронный пучок достаточно тонок, после интегрирования по поперечному сечению волновода получим:

$$V_s^{\pm} = \mp \frac{1}{N_s} \int_{z_{1,2}}^{z} \left\{ \rho_{\text{пог}}\, \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{E}_s^{\mp} [\boldsymbol{r}_\perp(z,t), z] \right\}_\omega dz, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{E}_s^{\pm} [\boldsymbol{r}_\perp(z,t), z]$ — значение поля нормальной волны в том месте поперечного сечения, где в данный момент проходит электронный пучок.

3. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ И СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПУЧКЕ

При выводе уравнений (12) — (13) и эквивалентных им формул (14) — (16), описывающих возбуждение линии передачи электронным пучком, предполагалось, что форма пучка $\boldsymbol{r}_\perp(z,t)$, плотность заряда $\rho_{\text{пог}}(z,t)$ и продольная скорость электронов $v_z(z,t)$ заданы в переменных Эйлера. Между тем, в ряде случаев оказывается более удобным описывать электронный поток в переменных Лагранжа $t_{\text{в}}$, t ($t_{\text{в}}$—время влета электрона в систему) или в переменных τ, t, где τ — время пребывания электрона в системе (время пролета). В этих переменных формулы (16) для амплитуд нормальных волн приобретают особенно простой вид.

Для перехода к переменным τ, t воспользуемся связью $z = z(\tau,t)$ (или $\tau = \tau(z,t)$), которая может быть найдена из уравнений движения электрона и в дальнейшем предполагается известной. Если пучок на входе не модулирован, то, как известно, $\rho_{\text{пог}} = I_0 / \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)_t = -|I_0| / \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)_t$ (см., например, [3]) и переход к новым переменным в (16) дает:

$$V_s^{\pm} = \pm \frac{|I_0|}{N_s} \left\{ \int_{\tau(z_{1,2},t)}^{\tau(z,t)} \boldsymbol{v}(\tau,t)\, \boldsymbol{E}_s^{\mp} [\boldsymbol{r}_\perp(\tau,t), z(\tau,t)]\, d\tau \right\}_\omega. \tag{17}$$

Таким образом, оказывается возможным выразить амплитуды нормальных волн только через полный ток пучка I_0 и скорость электронов $\boldsymbol{v}(\tau,t)$. Обобщение (17) на пучки конечной толщины, с учетом ограничений, наложенных в первом разделе, не представляет труда.

В слабо возмущенном электронном потоке координаты $\boldsymbol{r}$ и скорости $\boldsymbol{v}\equiv\dot{\boldsymbol{r}}$ электронов близки к координатам $\boldsymbol{r}^{(0)}$ и скоростям $\boldsymbol{v}^{(0)}$ в стационарном пучке:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^{(0)}(\tau)+\boldsymbol{r}^{(1)}(\tau,t), && |\boldsymbol{r}^{(1)}|\ll|\boldsymbol{E}|/|\nabla E|;\\ &\dot{\boldsymbol{r}}\equiv\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^{(0)}(\tau)+\boldsymbol{v}^{(1)}(\tau,t), && |\boldsymbol{v}^{(1)}|\ll|\boldsymbol{v}^{(0)}|;\\ &\tau=\tau^{(0)}(z)+\tau^{(1)}(z,t), && |\tau^{(1)}|\ll|\tau^{(0)}|. \end{aligned} \tag{18}$$

Используя малость возмущений, можно выделить переменную составляющую в правой части (17) в явном виде. Будем считать возмущения синусоидальными ($\boldsymbol{r}^{(1)}=\boldsymbol{r}^{(1)}_{\tau}(\tau)\,e^{i\omega t}$, $\boldsymbol{v}^{(1)}=\boldsymbol{v}^{(1)}_{\tau}(\tau)e^{i\omega t}$) и разложим поле под интегралом в (15) в ряд в точке $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^{(0)}$. Ограничиваясь первыми членами разложения, после некоторых преобразований получим:

$$V_s^{\pm}=\pm\frac{|I_0|}{N_s}\left\{i\omega\int\limits_{\tau^{(0)}(z_{1,2})}^{\tau^{(0)}(z}\boldsymbol{r}^{(1)}_{\tau}(\boldsymbol{E}^{\pm}_{sд})^{*}d\tau+\boldsymbol{E}_s^{\mp}\boldsymbol{v}^{(0)}\tau^{(1)}\Bigg|_{\tau^{(0)}(z_{1,2})}^{\tau^{(0)}(z)}+\boldsymbol{E}_s^{\mp}\boldsymbol{r}^{(1)}\Bigg|_{\tau^{(0)}(z_{1,2})}^{\tau^{(0)}(z)}\right\}. \tag{19}$$

Здесь *означает комплексно-сопряженную величину, $\Big|_{\tau^{(0)}(z_{1,2})}^{\tau^{(0)}(z)}$ — подстановку в соответствующих пределах, а через $\boldsymbol{E}^{\pm}_{sд}$ обозначено действующее на электрон переменное поле в сопровождающей (в стационарном приближении) системе отсчета:

$$\boldsymbol{E}^{\pm}_{sд}=\boldsymbol{E}^{\pm}_{s}+[\boldsymbol{v}^{(0)}\boldsymbol{B}^{\pm}_{s}]. \tag{20}$$

Формула (19) весьма удобна для вычисления поля, возбуждаемого в линии передачи электронным пучком, так как дает выражение амплитуд нормальных волн непосредственно через координаты отдельного электрона $\boldsymbol{r}^{(1)}_{\tau}(\tau)$ (в точках, где $v^{(0)}_z\neq 0$, $\tau^{(1)}\approx-z^{(1)}/v^{(0)}_z$); необходимость определения переменной составляющей тока пучка, таким образом, отпадает. Нетрудно видеть, что второе и третье слагаемые в правой части (19) всегда малы: соответствующая им амплитуда высокочастотного поля порядка $V\sim Z_в I_0\, v^{(1)}/v^{(0)}$ ($Z_в$ — волновое сопротивление линии). Первое слагаемое также, вообще говоря, мало, но при некоторых условиях (при должной фазировке возмущения электронного пучка $\boldsymbol{r}^{(1)}$ с одной из собственных волн линии передачи) может неограниченно возрастать с увеличением длины системы. Поэтому при исследовании систем, в которых такая фазировка заведомо имеет место (как, например, при взаимодействии волны в линии передачи с синхронизированной с ней пространственной гармоникой тока электронного пучка [4]), в правой части (19) можно учитывать только первый член.

В заключение отметим, что в силу линейности уравнений для поля формула для амплитуд нормальных волн, возбуждаемых в линии несколькими тонкими пучками (или пучком конечной толщины), может быть получена суммированием (интегрированием) выражений типа (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, изд. ВКАС, Л., 1947.
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
3. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов сверхвысоких частот, ГИТТЛ, М., 1956.
4. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. —Радиофизика **2**, 450 (1959).

Исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 мая 1959 г.