

**ИЗУЧЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРУЮЩЕЙ УСТАНОВКИ
ВОЗДЕЙСТВИЯ ШУМОВ НА ГЕНЕРАТОР
С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ**

П. С. Ланда

С помощью электромодели получены экспериментально средние времена возникновения и срыва автоколебаний в генераторе с жестким режимом возбуждения в зависимости от интенсивности действующего шума.

Результаты дают хорошее совпадение с теорией.

Настоящая работа служит продолжением статьи [1], в которой проведено теоретическое рассмотрение некоторых вопросов, связанных с воздействием регулярных и случайных сил на генератор с жестким возбуждением. В статье [1] при определенных ограничениях на параметры системы и величину внешних воздействий получены приближенные выражения для вероятностей перехода генератора из невозбужденного состояния в возбужденное и обратно, а также для среднего времени пребывания генератора в том или ином состоянии.

Однако представляет существенный интерес экспериментальная проверка действительной области применения полученных в работе [1] теоретических результатов, а также получение дополнительных экспериментальных данных для тех значений параметров и величины внешних воздействий, где сделанные ограничения не выполняются и теория заведомо не применима. Эта задача может быть решена с помощью электрической модели. Сказанное послужило основанием для экспериментального изучения на электромоделирующей установке поведения генератора с жестким возбуждением при наличии случайных и регулярных воздействий. Для того, чтобы иметь возможность сравнить полученные на модели результаты с теоретическими, в качестве моделируемого уравнения было выбрано уравнение лампового генератора с контуром в цепи сетки при условии отсутствия сеточных токов и реакции анодной нагрузки. Сеточная характеристика лампы аппроксимировалась полиномом пятой степени.

Преимущества применения методов электрического моделирования для исследования автоколебательных систем по сравнению с непосредственным экспериментальным изучением последних указывались автором в работе [2].

Следует также отметить, что целью настоящей работы являлось не только получение экспериментальных результатов для данного конкретного генератора, но и проверка возможности использования электрических моделей для решения ряда статистических задач, а также разработка методики статистических измерений на инфралигах частотах.

1. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

В настоящей работе применялся обычный электроинтегратор на постоянном токе, содержащий нелинейные элементы, в сочетании с генераторами инфразвуковых синусоидальных колебаний и шумов. В качестве генератора инфразвукового шума использовался прибор, изготовленный на физическом факультете МГУ Романовским [3].

Генератором внешней периодической силы служил инфразондочастотный генератор типа НГ-2.

Автоколебательная система, которая моделировалась в настоящей работе, описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 2\delta(z)\dot{z} - \omega_0^2 E \sin \omega_0 t - \omega_0^2 \zeta(t), \quad (1)$$

где $\delta(z) = -\delta(1 - 4\alpha z^2 + 8\beta z^4)$, $\zeta(t)$ — шум на входе генератора.

Введем машинные координаты и время [6]:

$$V_1 = z; \quad V_2 = \dot{z}/\omega_0; \quad V_E = -E; \quad V_\zeta = -\zeta(t); \quad \tau = t$$

(при таком выборе координат V_1 , V_2 , V_E и V_ζ будут иметь одинаковую размерность, а предельный цикл системы приобретает форму окружности).

Уравнение (1) в этих координатах можно записать в виде системы двух уравнений, удобных для моделирования:

$$\frac{dV_1}{d\tau} = \omega_0 V_2; \quad (2)$$

$$\frac{dV_2}{d\tau} = -\omega_0 V_1 - 2\delta V_2 + 8\delta(\alpha V_1^2 - 2\beta V_1^4) V_2 + \omega_0 V_E \sin \omega_0 \tau + \omega_0 V_\zeta.$$

Блок-схема модели такой системы представлена на рис. 1.

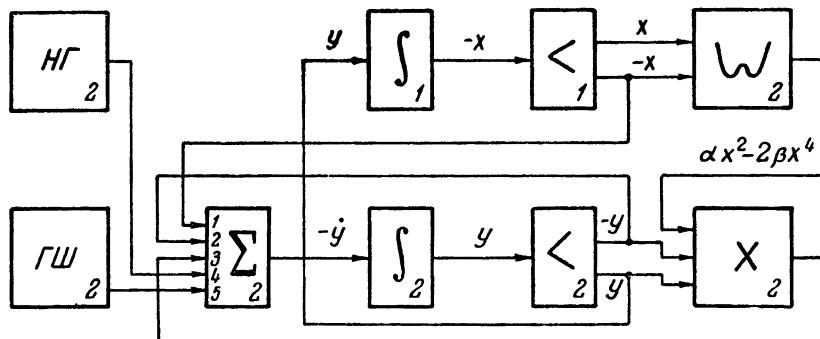


Рис. 1. Блок-схема модели генератора с жестким возбуждением.

В соответствии с уравнениями (2) параметры модели выбираются следующим образом:

а) постоянные времени интеграторов: $RC_1 = 1/\omega_0$; RC_{II} можно выбрать любым (в нашей модели $RC_{II} = 0,1507$ сек);

б) коэффициенты усиления сумматора соответственно по входам:

$$k_1 = \omega_0 RC_{II}; \quad k_2 = 2\delta_0 RC_{II}; \quad k_3 = 8\delta_0 RC_{II} K;$$

$$k_4 = \omega_0 V_E RC_{II} / V'_E; \quad k_5 = \omega_0 V_\zeta RC_{II} / V'_\zeta,$$

где K — произведение коэффициентов ослабления панелей нелинейности и умножения, V'_E — амплитуда напряжения, подаваемого с генератора синусоидальных колебаний, V'_ζ — напряжение, подаваемое с генератора шумов. Коэффициенты k_2 , k_3 , k_4 и k_5 можно было менять в соответствии с изменением параметров системы, величины внешней силы и шума.

2. ИЗМЕРЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ШУМА

Для получения количественных результатов и сравнения их с теорией необходимо было измерять интенсивность шума λ^{-1} , которая связана со спектральной плотностью шума $2x(\omega_0)$ на частоте ω_0 следующим соотношением (см. [1]):

$$\lambda^{-1} = \omega_0^2 x(\omega_0)/4. \quad (3)$$

Измерение интенсивности шума также осуществлялось с помощью модели по блок-схеме, показанной на рис. 2. Шум с выхода шумо-

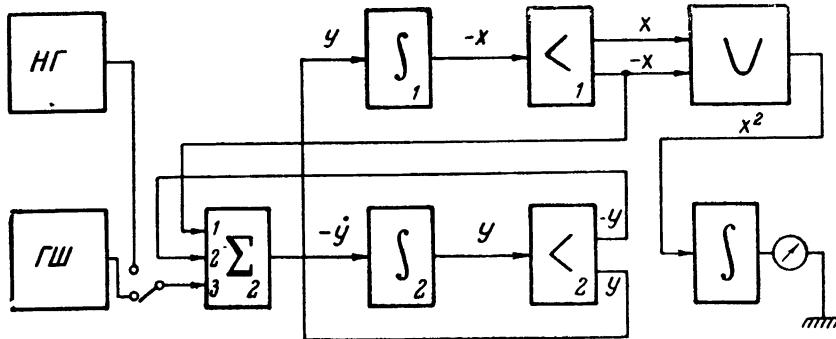


Рис. 2. Блок-схема модели для измерения интенсивности шума.

вого генератора подается на узкополосный линейный колебательный контур с частотной характеристикой $F(\omega)$. Напряжение с выхода контура возводится в квадрат с помощью одного из блоков нелинейности, а затем интегрируется в течение времени T_1 . При этом напряжение на выходе интегратора равно

$$U_1 = 2\gamma T_1 x(\omega_0) RC_{II}^2 \omega_0^2 k_5^{-2} \Delta f, \quad (4)$$

где Δf — эквивалентная ширина полосы контура, определяемая равенством

$$\int_0^\infty F^2(\omega) d\omega = F^2(\omega_0) \Delta f,$$

γ — коэффициент передачи всей системы в целом на частоте ω_0 .

Для определения коэффициента γ на ту же систему подается синусоидальное напряжение частоты ω_0 с известной амплитудой E_0 . Тогда напряжение на выходе интегратора, очевидно, равняется

$$U = \gamma T E_0^2 / 2, \quad (5)$$

где T — время интегрирования. Сравнивая выражения (4) и (5), получаем:

$$x(\omega_0) = U_1 T E_0^2 k_5^2 / 4 U T_1 R C_{II}^2 \omega_0^2 \Delta f. \quad (6)$$

Таким образом, на основании (3) и (6) для интенсивности шума можно записать следующее выражение:

$$\lambda^{-1} = k_5^2 U_1 E_0^2 T / 16 U T_1 R C_{II}^2 \Delta f. \quad (7)$$

Все величины, входящие в эту формулу, поддаются непосредственному измерению.

Эксперимент проводился при различных значениях интенсивности

шума. При этом величина шума, подаваемого на вход сумматора, не изменялась, а менялся лишь соответствующий коэффициент усиления сумматора. Этим исключался разброс отдельных результатов эксперимента за счет погрешности в измерении шума, которая может достигать 25%, тогда как коэффициент усиления можно установить с точностью до 1%.

3. ИЗМЕРЕНИЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ГЕНЕРАТОРА В ВОЗБУЖДЕННОМ И НЕВОЗБУЖДЕННОМ СОСТОЯНИЯХ

Среднее время пребывания генератора в возбужденном и невозбужденном состояниях можно измерять двумя способами.

Первый способ заключается в непосредственном измерении указанных величин путем усреднения большого числа отдельных замеров времени, в течение которого первоначально невозбужденный генератор остается в состоянии покоя или, наоборот, происходит срыв колебаний в первоначально возбужденном генераторе. По этим измерениям можно также вычислить вероятности переходов генератора из одного состояния в другое по формуле

$$p(t) = m(t)/N, \quad (8)$$

где $p(t)$ —вероятность срыва автоколебаний в генераторе в течение времени $\tau \leq t$, $m(t)$ —число измерений, в которых время срыва колебаний $\tau \leq t$, N —полное число измерений времени. Аналогичную формулу можно записать для $q(t)$ —вероятности возбуждения колебаний в течение времени $\tau \leq t$. С другой стороны, из теории [1] следует, что

$$p(t) = 1 - e^{-t/t_{2cp}}; \quad q(t) = 1 - e^{-t/t_{1cp}}, \quad (9)$$

где t_{1cp} —среднее время возбуждения колебаний, t_{2cp} —среднее время срыва автоколебаний в генераторе.

Таким образом, сравнивая (8) и (9), при достаточно большом числе измерений N можно экспериментально проверить справедливость экспоненциального закона распределения вероятностей и найти границы его применимости.

Средний разброс отдельных измерений среднего времени и вероятностей $p(t)$ и $q(t)$ определяется числом N и равен соответственно

$$\sqrt{\frac{1}{t_{2cp}^2} \left(\frac{\overline{t_1+t_2+\dots+t_N}}{N} - t_{2cp} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N}}; \quad \sqrt{\frac{1}{p^2} \left(\frac{\overline{m}}{N} - p \right)^2} = \sqrt{\frac{1-p}{Np}}.$$

В нашем случае для каждого значения интенсивности шума было проведено до пятьдесят измерений времени пребывания генератора в возбужденном и невозбужденном состояниях. Следовательно, ошибка в определении среднего времени, обусловленная конечным числом измерений, должна быть в среднем порядка 15%, а ошибка в определении вероятности p зависит от самого значения p и равна $15\sqrt{(1-p)/p}\%$.

На рис. 3 приведены теоретические и экспериментальные графики зависимости t_{1cp} и t_{2cp} от интенсивности шума λ^{-1} для следующих значений параметров системы: $E = 0$; $\omega_0^2 = 98 \text{ сек}^{-2}$; $\delta = 0,0895 \text{ сек}^{-1}$; $\alpha = 2,307 \cdot 10^{-3} \text{ в}^{-2}$; $\beta = 0,985 \cdot 10^{-6} \text{ в}^{-4}$. При этом амплитуды неустойчивого и устойчивого предельных циклов соответственно равнялись $R_1 = 24 \text{ в}$, $R_2 = 42 \text{ в}$.

Для того, чтобы убедиться, насколько наша система соответствует заданным значениям параметров, была снята осциллограмма нелиней-

ной характеристики системы $f(V_1) = \alpha V_1^2 - 2\beta V_1^4$, которая сравнивалась с расчетной. При этом максимальное отклонение теоретической и экспериментальной характеристик системы друг от друга не превышало 10%. Расхождение действительных и заданных параметров нашего генератора приводит к некоторой систематической (не зависящей от интенсивности шума) ошибке в измерении среднего времени,

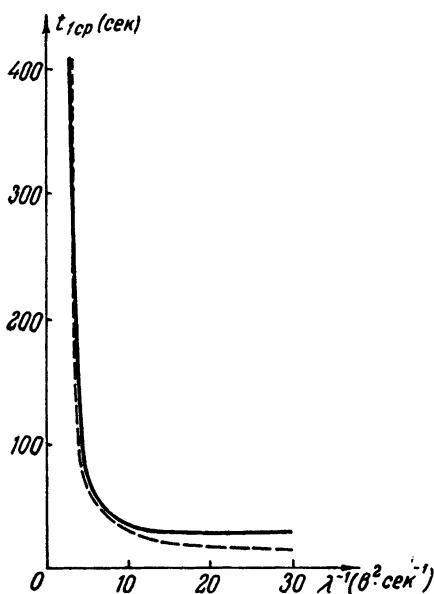


Рис. 3а.

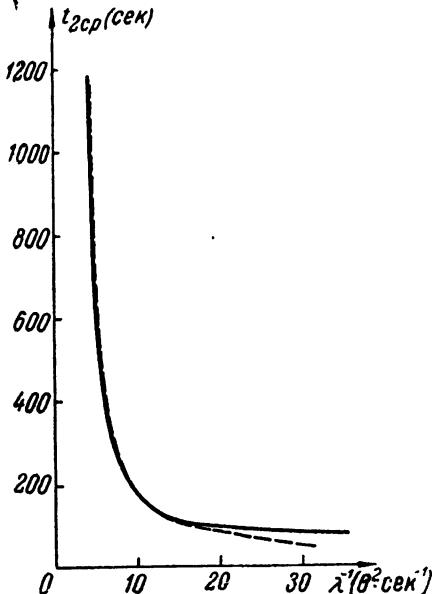


Рис. 3б.

Рис. 3. Зависимость времени пребывания генератора от интенсивности шума:
а) в невозбужденном состоянии, б) в возбужденном состоянии (сплошные линии—теоретические кривые, пунктир—экспериментальные).

Теоретические результаты, полученные в работе [1], справедливы в случае достаточно малого шума: $\lambda^{-1} \ll \delta/\alpha$. При выбранных значениях параметров это условие соответствует неравенству $\lambda^{-1} \ll 39 \theta^2 \cdot \text{сек}^{-1}$.

Действительно, как видно из графиков, приведенных на рис. 3, и таблицы 1, совпадение теории с экспериментом получается достаточно хорошим (ошибка в среднем порядка 10%) при $\lambda^{-1} < 10 \theta^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, тогда как при большем шуме наблюдается значительное расхождение теоретических и экспериментальных результатов (порядка 30 \div 40%).

Таблица 1

| $\lambda^{-1} (\theta^2 \cdot \text{сек}^{-1})$ | t_{1cp} (сек) теорет. | t_{1cp} (сек) экспер. | t_{2cp} (сек) теорет. | t_{2cp} (сек) экспер. | $\Delta t_{1cp}/t_{1cp} (\%)$ | $\Delta t_{2cp}/t_{2cp} (\%)$ |
|---|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 2,81 | 341 | 401 | 4250 | — | + 17 | — |
| 4,23 | 105 | 102 | 958 | 1070 | - 2,8 | + 11,7 |
| 6,00 | 55,8 | 55 | 405 | 417 | - 1,4 | + 3 |
| 8,48 | 38,1 | 34 | 222,3 | 237 | - 10,7 | + 6,6 |
| 12,70 | 29,6 | 22 | 137,6 | 128 | - 26 | - 7 |
| 16,90 | 27,3 | 19 | 108,3 | 94 | - 30 | - 13,2 |
| 25,40 | 26,7 | 15 | 84,5 | 63 | - 44 | - 25,5 |

Результаты экспериментального измерения вероятностей перехода генератора $p(t)$ и $q(t)$ в случае малых и больших шумов показаны

на рис. 4,5. На тех же рисунках пунктиром приведены графики $p(t)$ и $q(t)$, построенные на основании формул (9). Как видно из графиков, при большой интенсивности шума для вероятности возбуждения генератора $q(t)$ наблюдаются отклонения от экспоненциального закона распределения, лежащие вне пределов ошибки, тогда как для $p(t)$ экспоненциальный закон выполняется и в этом случае. Это связано с тем, что экспоненциальный закон распределения вероятностей выполняется при условии, чтобы время блуждания изображающей точки

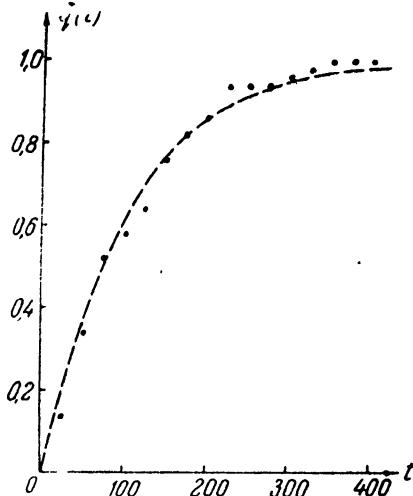


Рис. 4а.

Рис. 4. Вероятность возбуждения генератора:

а) при $\lambda^{-1} = 4,23 \text{ в}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, б) при $\lambda^{-1} = 25,4 \text{ в}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ (пунктиром нанесены соответствующие теоретические кривые: $1 - \exp(-t/t_{ср})$).

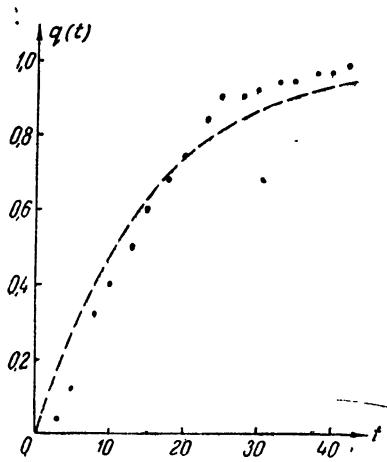


Рис. 4б.

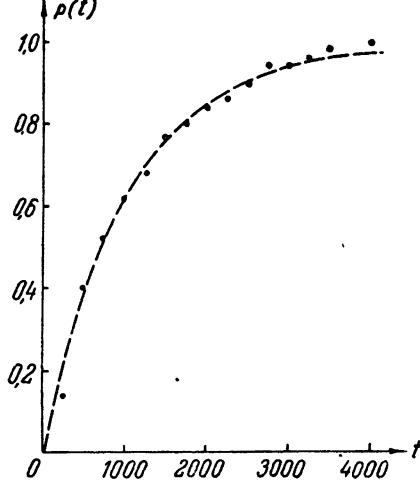


Рис. 5а.

Рис. 5. Вероятность срыва колебаний:

а) при $\lambda^{-1} = 4,23 \text{ в}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, б) при $\lambda^{-1} = 25,4 \text{ в}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ (пунктиром нанесены соответствующие теоретические кривые: $1 - \exp(-t/t_{ср})$).

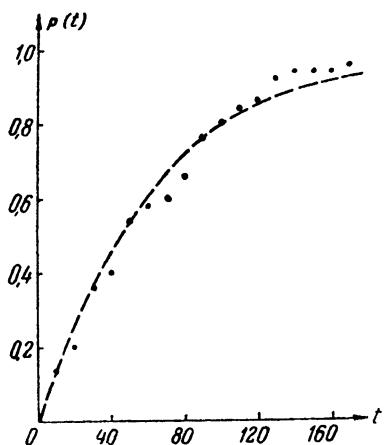


Рис. 5б

по области малой вероятности (вблизи границы возбуждения) было значительно меньше, чем среднее время пребывания ее в области не-

возбужденных состояний S_1 или в области возбужденных состояний S_2 (см. [1]). Так как $t_{1cp} \ll t_{2cp}$, то указанное условие для области S_1 начинает нарушаться при значительно меньшем шуме, чем для области S_2 .

Второй способ определения среднего времени, позволяющий, однако, вычислить лишь отношение t_{1cp} и t_{2cp} , основан на выражениях, которые можно получить на основании работы [1]:

$$t_{1cp}/(t_{1cp} + t_{2cp}) = \int_{S_1} A W(A, \varphi) dA d\varphi; \quad (10)$$

$$t_{2cp}/(t_{1cp} + t_{2cp}) = \int_{S_2} A W(A, \varphi) dA d\varphi, \quad (11)$$

где $W(A, \varphi)$ — стационарная плотность распределения вероятностей, удовлетворяющая нулевому граничному условию.

Измерение стационарного распределения вероятностей (см. [4, 5]) можно проводить фотометрическим способом по осциллограмме, представляющей собой экспонированный в течение достаточно длительного времени (значительно большего $t_{1cp} + t_{2cp}$) фазовый портрет системы (рис. 6). Однако практически такое длительное время съемки осуществить в нашем случае трудно, так как

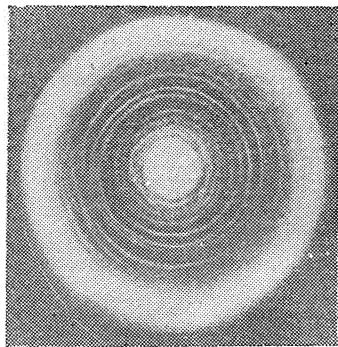
надо принимать особые меры по компенсации дрейфа нуля в моделирующей установке. Поэтому было снято несколько осциллограмм с общим временем экспозиции $T = 11$ час ($t_{1cp} + t_{2cp}$ у нас равнялось 472 сек). Результаты фотометрирования каждой из этих осциллограмм затем были усреднены для расчета стационарной плотности распределения вероятностей. Полученное этим способом распределение вероятностей удовлетворяет не нулевому граничному условию, а условию исчезновения на бесконечности. При достаточно малом шуме эти плотности распределения в области больших значений вероятности очень близки друг к другу. Поэтому ошибка в измерении средних времен при этом должна быть незначительной.

Рис. 6. Осциллограмма фазового портрета системы, экспонированная в течение одного часа.

В нашем случае измерения проводились при $\lambda^{-1} = 6 \text{ в}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, т. е. условие $\lambda^{-1} \ll \delta/\alpha$ выполнялось довольно плохо ($\delta/\alpha \approx 39 \text{ в}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$). Вследствие этого наблюдалось значительное расхождение в величине t_{1cp}/t_{2cp} , измеренной первым и вторым способом (в первом случае мы имели $t_{1cp}/t_{2cp} = 55/417 = 0,132$, а во втором — $t_{1cp}/t_{2cp} = 0,256$). Если же вычислить отношение времен t_{1cp}/t_{2cp} по теоретически построенному графику стационарной плотности распределения, удовлетворяющей условию обращения в нуль на бесконечности, то получим $t_{1cp}/t_{2cp} = 0,212$, что на $\sim 20\%$ отличается от экспериментальных значений.

Измерения t_{1cp} и t_{2cp} проводились также и при наличии внешней периодической силы. Однако вследствие невозможности поддержания строго нулевойстройки из-за нестабильности частоты задающего генератора наблюдалось лишь качественное совпадение с теорией. Так, например, для $E=0,126$ в и $\lambda^{-1}=6 \text{ в}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ было получено: $t_{1cpE} = 42$ сек; $t_{2cpE} = 446$ сек, тогда как соответствующие времена в случае отсутствия внешней силы равны $t_{1cp0} = 56$ сек; $t_{2cp0} = 405$ сек.

Отсюда видно, что внешняя сила, действительно, способствует возбуждению генератора.



Результаты настоящей работы позволяют заключить, что теоретические методы расчета времен установления и срыва колебаний в генераторе с жестким возбуждением применимы при довольно слабом выполнении неравенств, налагающих ограничения на величину внешних воздействий на систему. При большой интенсивности действующего шума теория дает завышенные значения для указанных времен по сравнению с экспериментальными данными.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность С. П. Стрелкову за большое внимание к работе, а также дипломанту В. Б. Скоморохову, участвовавшему в проведении эксперимента.

ЛИГЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович, П. С. Ланда, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 27 (1959).
2. П. С. Ланда, Вестник МГУ, 2, 103 (1956).
3. Ю. М. Романовский, ПТЭ, 4, 98 (1958).
4. В. Н. Иванов, Вестник МГУ, 6, 47 (1956).
5. Б. Б. Буховцев, В. И. Шмальгаузен, ПТЭ, 4, 144 (1959).
6. Г. Корн и Т. Корн, Электронные моделирующие устройства, ИЛ, М., 1955.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
11 декабря 1958 г.