

## ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ АДИАБАТИЧЕСКОГО ИНВАРИАНТА

Н. Г. Денисов

Рассматривается движение электрона в однородном и переменном во времени магнитном поле. На основе одного строгого решения производится оценка точности адиабатического инварианта.

При движении заряженной частицы в медленно изменяющемся магнитном поле  $H$  существует адиабатический инвариант

$$\mu_m = mv_{\perp}^2 / 2H = \text{const} \quad (1)$$

( $v_{\perp}$  — компонента скорости электрона, перпендикулярная направлению внешнего магнитного поля). Что касается точности этого инварианта, то в литературе существуют различные оценки. Если ввести малый параметр задачи, характеризующий скорость изменения магнитного поля, то известно, что адиабатический инвариант сохраняется с точностью до квадрата малого параметра [1]. В работе [2] для частного случая движения частицы в однородном, медленно изменяющемся во времени магнитном поле показано, что сохранение адиабатического инварианта имеет место с точностью, пропорциональной  $\exp(-A/a)$  ( $A = \text{const}$ ,  $a$  — малый параметр задачи, характеризующий скорость изменения магнитного поля).

В настоящей заметке на частном примере, рассмотренном в [2], показано, что эти оценки не противоречат друг другу, а относятся к различным условиям.

Движение электрона в однородном магнитном поле описывается уравнением (см., например, [2])

$$\ddot{r} + i\dot{h}r + \frac{i}{2}\dot{h}r = 0, \quad (2)$$

где  $h(t) = eH(t)/mc$  — гиромагнитная частота электрона,  $r = x + iy$ ,  $x$  и  $y$  — координаты электрона в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю. Начало отсчета ( $r = 0$ ) совпадает с осью симметрии задачи (осью соленоида). Движение электрона в постоянном магнитном поле описывается решением

$$r = r_0 + \rho e^{-i(ht + \varphi)},$$

т. е. электрон совершает движение по окружности радиуса  $\rho$ . Магнитный момент тока будет при этом равен  $\mu_m = err^*/2ch = ehp^2/2c = \text{const}$ .

Для того, чтобы исследовать уравнение (2) в случае переменного магнитного поля  $h(t)$ , сделаем замену  $r = z \exp[-\frac{i}{2} \int h dt]$  и приведем его к виду [3]

$$4z + h^2(t)z = 0. \quad (3)$$

Допустим, что функция  $h^2(t)$  за промежуток времени от  $t_0$  до  $t_1$  изменяется от значения  $h_0^2(t)$  до  $h_1^2(t)$ . Решение уравнения (3) до момента времени  $t_0$  можно записать в виде

$$z = A_1 \exp\left(i \frac{h_0}{2} t\right) + A_2 \exp\left(-i \frac{h_0}{2} t\right), \quad (4)$$

причем коэффициент  $A_1$  можно положить равным нулю. Это означает, что вначале электрон вращается по окружности радиуса  $A_2$ , центр которой лежит на оси соленоида. Решение (4) будет описывать в таком случае движение электрона в постоянном магнитном поле. Здесь удобно ввести величину  $\mu = (2c/e) \mu_m$ .

Из (4) найдем:

$$\mu_0 = \dot{r} \dot{r}^* / h_0 = |A_2|^2 h_0. \quad (5)$$

В промежуток времени  $(t_0, t_1)$  магнитное поле изменяется и при  $t = t_1$  достигает постоянного значения  $h_1$ . При  $t > t_1$  решение уравнения (3), вообще говоря, запишется в виде:

$$z = c_1 \exp\left(\frac{i h_1 t}{2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{i h_1 t}{2}\right). \quad (6)$$

Здесь  $c_1 \neq 0$ , и, следовательно, при  $t > t_1$  электрон будет вращаться по окружности радиуса  $c_2$ , центр которой не совпадает с сюю соленоида. Величина  $\mu$  будет при этом равна:

$$\mu_1 = \dot{r} \dot{r}^* / h_1 = |c_2|^2 h_1. \quad (7)$$

Его изменение можно характеризовать отношением

$$D^2 = \mu_0 / \mu_1 = |A_2|^2 h_0 / |c_2|^2 h_1. \quad (8)$$

Таким образом, расчет изменения магнитного момента вращающегося электрона при перепаде магнитного поля сводится к нахождению связи между коэффициентами решений (4) и (6). Подобные вопросы приходится решать, например, при расчете отражения плоских волн от неоднородных слоев. Уравнение типа (3) в этом случае описывает распространение электромагнитной волны в слое, свойства которого изменяются по координате  $t$ . Функция  $h(t)/2$  представляет собой волновое число, а величина  $\mu$  пропорциональна потоку энергии, переносимой волной. Коэффициент  $D^2$  характеризует собой, таким образом, просачивание волны через неоднородный слой. Следовательно, изменение  $\mu$  имеет место тогда, когда в аналогичной задаче имеется отражение волн от слоя.

Найдем относительное изменение магнитного момента

$$(\mu_1 - \mu_0) / \mu_1 = 1 - D^2 = R^2 \quad (9)$$

(где  $R^2$  — коэффициент отражения), основываясь на решении известных задач об отражении волн от неоднородного слоя [3]. Рассмотрим простейший случай переходного режима, в котором внешнее магнитное поле изменяется по закону (переходный слой)

$$h^2(t) = [h_1^2 - b^2/(1 + e^{at})]. \quad (10)$$

Коэффициент отражения от такого слоя равен ([3], § 73)

$$R^2 = \operatorname{sh}^2 \left\{ \frac{\pi h_1}{2a} (1 - \sqrt{1-p}) \right\} \operatorname{sh}^{-2} \left\{ \frac{\pi h_1}{2a} (1 + \sqrt{1-p}) \right\}; \quad p = b^2/h_1^2 < 1. \quad (11)$$

Так как  $h_0^2 = h_1^2 - b^2$ , то при слабом перепаде магнитного поля  $b^2 = h_1^2 - h_0^2 \approx 2h_1 \Delta h$ . Следовательно, параметр  $p \approx 2\Delta h/h_1$  характеризует относительное изменение магнитного поля. При  $p \ll 1$

$$R^2 \approx \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\pi h_1}{4a} p \right) \operatorname{sh}^{-2} \left( \frac{\pi h_1}{a} \right). \quad (12)$$

Если к тому же  $\pi h_1 p / 4a \ll 1$ , то  $R^2 \approx (\pi h_1 p / 4a)^2$ . В этом случае точность адиабатического инварианта при слабом изменении магнитного поля определяется квадратом малого параметра.

Если же при заданном перепаде магнитного поля время перепада увеличивается ( $a \rightarrow 0$ ), и можно считать, что  $\pi h_1 p / 4a \gg 1$  ( $p \ll 1$ ), тогда из (12) получим

$$R^2 \sim \exp(-2\pi h_1 / a) \quad (p \ll 1).$$

Таким образом, для слабого перепада ( $p \ll 1$ ) при  $\pi h_1 p / 4a = \pi \Delta h / 2a \ll 1$   $\mu$  сохраняется с точностью  $(\pi \Delta h / 2a)^2$ , а при  $\pi \Delta h / 2a \gg 1$  — с точностью  $\exp(-2\pi h_1 / a)$ . Если же параметр  $p = b^2 / h_1^2$  не мал, то при  $(\pi h_1 / 2a) \times (1 - \sqrt{1-p}) \gg 1$  точность инварианта, согласно (11), определяется множителем  $\exp\{-(\pi h_1 / a)\sqrt{1-p}\}$ .

Заметим в заключение, что аналогичные оценки точности адиабатического инварианта можно получить на основе результатов расчета коэффициента отражения от неоднородных слоев значительно более общего вида [4].

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу за всестороннее обсуждение вопроса.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. G. Hellwig, Z. Naturforschung, **10a**, 508 (1955).
2. F. Hertweck, A. Schläter, Z. Naturforschung, **12a**, 844 (1957).
3. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТТЛ, М., 1953.
4. В. Л. Покровский, Ф. Р. Улинич, С. К. Саввиных, ЖЭТФ, **34**, 1629 (1958).

Исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
2 апреля 1959 г.