

## ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО СКОРОСТЯМ ЭЛЕКТРОНОВ В МОЛЕКУЛЯРНОЙ ПЛАЗМЕ (ИОНОСФЕРЕ)

А. В. Гуревич

Найден вид функции распределения электронов по скоростям в плазме в молекулярных газах (в частности в ионосфере) при невысоких энергиях электронов (до  $1 \text{ эв}$ ). Получены выражения для средней энергии электронов  $\bar{\epsilon}$  и электронного тока  $j$ . Проведено сравнение результатов расчета  $\bar{\epsilon}$  и  $j$  по формулам точной кинетической теории с результатами применяемой обычно приближенной „элементарной“ теории; получены условия применимости элементарной теории.

### ВВЕДЕНИЕ

Определяющее влияние на распределение по скоростям электронов в плазме оказывают соударения между электронами, а также упругие и неупругие соударения электронов с тяжелыми частицами: молекулами, ионами.

В большей части теоретических работ, посвященных этому вопросу, влиянием неупругих соударений пренебрегалось. Это справедливо для полностью ионизованного газа или для одноатомных (благородных) газов при небольших энергиях электронов. Роль неупругих соударений в одноатомных газах становится значительной при более высоких энергиях электронов (возбуждение оптических уровней и ионизация). Влияние таких соударений на распределение электронов по скоростям исследовалось Дрювестейном, Смитом и др. (см., например, [1], гл. 8).

В молекулярных газах (таких как водород, кислород, азот) неупругие соударения играют основную роль уже при энергиях порядка  $0,01 \text{ эв}$ , т. е. при комнатных температурах. Вместе с тем, о сечениях для неупругих соударений медленных электронов с молекулами в настоящее время известно еще очень мало [2]; поэтому и вопрос о распределении по скоростям электронов в молекулярной плазме решен не был. Для расчета средней энергии электронов и тока в молекулярной плазме обычно используется упрощенная кинетическая теория, называемая „элементарной“ (см., например, [3], ч. 2): в ней совершенно не учитывается наличие разброса по скоростям среди электронов плазмы. Благодаря этому значения средних, вычисляемых с помощью такой теории, являются, вообще говоря, приближенными. С какой точностью вычисляются значения средних по формулам элементарной теории? В каких случаях эти формулы неприменимы и какие выражения следует в этих случаях использовать? Ответ на эти вопросы может дать лишь полное кинетическое рассмотрение\*.

Решение этой задачи является целью настоящей работы. В первом разделе показано, что, используя особенности молекулярной плазмы, можно упростить кинетическое уравнение (аналогично тому, как это

\* Экспериментальному исследованию молекулярной плазмы посвящено значительное количество работ. Их результаты (до 1940 г.) резюмированы Хили и Ридом [4] (см. также [5]). Заметим, что ионосфера также является молекулярной плазмой.

делается обычно в случае только упругих соударений). В следующих двух разделах получено решение кинетического уравнения; оно проанализировано для водорода, кислорода, азота. Существенно, что из данных эксперимента удается определить функцию  $\delta(v)$ , которая характеризует роль неупругих соударений в окончательном выражении для функции распределения. В заключение проанализирован вопрос о точности формул элементарной теории и пределах их применимости.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается неограниченная плазма, помещенная в электрическое и магнитное поля. Тяжелые частицы плазмы предполагаются распределенными по Максвеллу. Функция распределения электронов  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  определится, естественно, кинетическим уравнением Больцмана\*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad}_r f + \frac{e}{m} \left( E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}H] \right) \text{grad}_v f = -S, \quad (1)$$

где  $e$ ,  $m$ —заряд и масса электрона,  $c$ —скорость света,  $E$ ,  $H$ —напряженности электрического и магнитного полей,  $S$ —интеграл соударений.

В случае, когда имеют место только упругие соударения, уравнение (1), как хорошо известно, удастся упростить путем разложения угловой части функции распределения в пространстве скоростей в ряд по шаровым функциям. Этот ряд очень быстро сходится, так как эффективным параметром разложения оказывается отношение масс электрона и тяжелой частицы  $m/M$ . Поэтому обычно ограничиваются двумя членами разложения, т. е. представляют функцию распределения в виде:

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{v} \mathbf{f}_1(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) + \chi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t), \quad (2)$$

причем функцией  $\chi$  в дальнейшем пренебрегают. Уравнение (1) сводится тогда к системе уравнений для функций  $f_0$  и  $\mathbf{f}_1$  [6].

Естественно и при наличии неупругих соударений попытаться представить функцию распределения в виде (2). Тогда уравнение (1) (если пренебречь в нем функцией  $\chi$  в сравнении с  $f_0$  и  $\mathbf{f}_1^2$  в сравнении с  $f_0^2$ ) сводится к следующей системе уравнений для функций  $f_0$  и  $\mathbf{f}_1$ :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{3} \text{div}_r \mathbf{f}_1 + \frac{e}{3m\mathbf{v}^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{v}^2 E \mathbf{f}_1) = -S_{ee}(f_0) + \frac{1}{2\mathbf{v}^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \delta_{\text{yn}} \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{kT}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v} f_0 \right) \right\} - \sum_{i < k} \int \int q_{ik}(\mathbf{v}, \Theta) \mathbf{v} \{ f_0(\mathbf{v}) F_i(\mathbf{v}_1) - f_0(\mathbf{v}') F_k(\mathbf{v}'_1) \} d\mathbf{v}_1 d\Omega; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad}_r f_0 + \frac{e}{mc} [H \mathbf{f}_1] + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -S_{ee}(\mathbf{f}_1) - \nu_{\text{yn}} \mathbf{f}_1 - \nu_{\text{H}} \mathbf{f}_1. \quad (4)$$

Первый член, стоящий в правой части уравнений (3)–(4), описывает соударения между электронами; подробно он приведен, например, в [17, 18].

Второй член в правой части уравнений (3)–(4) описывает упругие

\* Применимость теории Больцмана к плазме ограничивается условиями  $e^2 N^{1/3} \ll kT$  (потенциальная энергия, приходящаяся на одну частицу, должна быть много меньше ее кинетической энергии) и  $kT \ll (\hbar^2/6m) (3N/\pi)^{2/3}$  (условие невырожденности плазмы). Необходимо также, чтобы плазма находилась в состоянии, близком к равновесному.

соударения электронов с тяжелыми частицами. Интеграл соударений в этом случае представляется, как известно [6], в дифференциальном виде (благодаря тому, что электрон при одном упругом ударе передает тяжелой частице лишь малую часть своей энергии). Здесь  $\delta_{yn} = 2m/M$  — доля энергии, теряемая электроном в среднем при одном упругом ударе, а  $\nu_{yn}(v)$  — частота упругих соударений электрона с молекулами или ионами (подробнее см., например, [3] § 59).

Наконец, третий член описывает неупругие соударения электронов с тяжелыми частицами\*. Здесь  $v'$ ,  $v_1'$  и  $v$ ,  $v_1$  — скорости электрона и тяжелой частицы соответственно до и после соударения между ними,  $F_i$  (или  $F_k$ ) — функция распределения по скоростям тяжелых частиц, находящихся в состоянии  $i$  (или  $k$ ),  $q_{ik}$  — дифференциальное эффективное сечение рассеяния электрона при неупругом соударении с тяжелой частицей, сопровождающемся переходом последней из состояния  $i$  в состояние  $k$ . Интегрирование ведется по скоростям тяжелых частиц  $dv_1$  и по углам рассеяния  $d\Omega$ ; сумма берется по всем уровням  $i, k^{**}$ .

При выводе уравнений (3), (4), как уже отмечалось выше, мы пренебрегли функцией  $\chi$  в сравнении с  $f_0$  (а также в интеграле междуэлектронных соударений пренебрегли функцией  $f_1^2$  в сравнении с  $f_0^2$ ). Чтобы выяснить, когда это возможно, необходимо произвести полное разложение функции распределения в ряд по шаровым функциям. Рассмотрим при этом для простоты случай  $H=0$  и пренебрежем междуэлектронными соударениями; примем также, что пространственный градиент функции распределения направлен по оси  $z$  параллельно  $E$ . Тогда, разлагая функцию распределения в уравнении (1) в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta) f_k(z, v, t)$$

( $\theta$  — угол между  $\mathbf{v}$  и  $E$ ), приходим к следующей системе уравнений для функций  $f_0, f_1, f_2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{eE}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) &= -S_{yn}(f_0) - S_H(f_0); \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \left( \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{2}{5} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) + \frac{eE}{m} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{2}{5v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 f_2) \right] &= -\nu_1 f_1; \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v \left( \frac{2}{3} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{3}{7} \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) + \frac{eE}{m} \left[ \frac{2}{3} v \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{v} f_1 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{3}{7v^4} \frac{\partial}{\partial v} (v^4 f_3) \right] = -\nu_2 f_2, \end{aligned} \tag{5}$$

\* Член, описывающий неупругие соударения, в уравнении (1) записывается, вообще говоря, в несколько более сложной форме. Можно, однако, показать, что с той же степенью точности, с которой справедливы сами уравнения (3), (4), его можно представить в виде  $-\nu_H f_1$ , где

$$\nu_H(v) = \sum_{i < k} v (N_m^i + N_m^k) \int q_{ik} (1 - \cos \theta) d\Omega.$$

\*\* Следует отметить, что мы не рассматриваем здесь для простоты неупругие соударения, сопровождающиеся изменением числа электронов в плазме (рекомбинация, прилипание, отлипание, диссоциация и т. д.). Дело в том, что в достаточно разреженной плазме, осуществляющейся в обычных условиях в разрядной трубке, а также в ионосфере, эффективное сечение этих процессов мало и они не могут оказать существенного влияния на распределение электронов по скоростям; ими определяется лишь равновесная плотность электронов (см. [1] гл. 8, [9] § 60).

где частоты соударений  $\nu_1$  и  $\nu_2$  одного порядка. Отсюда видно, что можно ограничиться рассмотрением только первых двух функций  $f_0$  и  $f_1$  (как это и было сделано выше в (3), (4)), если функция  $f_2$  много меньше, чем  $f_0$ , и в то же время производная  $\partial f_2/\partial z$  много меньше, чем  $\partial f_0/\partial z$ . Выразив функцию  $f_2$  через  $f_0$ , можно переписать эти необходимые условия в виде:

$$\left(\frac{eEl}{mv^2}\right)^2 \ll 1; \quad (6a)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \ll \nu f_0; \quad (6б)$$

$$l \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} \ll \frac{\partial f_0}{\partial z} \quad (6в)$$

(здесь  $l = v/\nu$  — длина свободного пробега электрона). Если перейти к средним значениям, то первое из этих условий оказывается тождественным требованию

$$\delta \ll 1,$$

где  $\delta$  — доля энергии, теряемая электроном в среднем при одном соударении с тяжелой частицей. Это условие в молекулярной плазме всегда хорошо выполнено (см., например, таблицу 1 в разделе 2 настоящей работы). Второе и третье условия (6б) и (6в) требуют соответственно, чтобы энергия электронов не изменялась значительно за время свободного пробега электрона, а электронный ток — на длине свободного пробега. Учет магнитного поля и междуэлектронных соударений не изменяет этих условий применимости системы уравнений (3), (4)\*.

Перейдем теперь к анализу уравнений (3), (4). Отметим прежде всего, что неупругие соударения учтены в уравнении для направленной части функции распределения  $f_1$  просто путем замены частоты упругих соударений  $\nu_{yn}$  на полную частоту соударений  $\nu = \nu_{yn} + \nu_n$ . Поэтому выражения для функции  $f_1$ , полученные ранее для случая только упругих соударений (см., например, [8]) полностью сохраняют свой вид и при учете неупругих соударений. Благодаря этому, задача о нахождении функций распределения электронов фактически сводится к интегрированию одного уравнения для функции  $f_0$ .

Первый член в правой части этого уравнения, обусловленный соударениями между электронами, имеет порядок  $\nu_e f_0$ , где  $\nu_e$  — частота междуэлектронных соударений. Остальные члены, описывающие соударения электронов с тяжелыми частицами, имеют порядок  $\delta \nu f_0$ . Ясно, что в зависимости от величины отношения  $\nu_e/\delta \nu$  вид функции  $f_0$  будет определяться либо междуэлектронными соударениями (если  $\nu_e/\delta \nu \gg 1$ ), либо соударениями с тяжелыми частицами (если  $\nu_e/\delta \nu \ll 1$ ) [13]. В случае соударений с ионами, рассматривавшемся, например, в [7], это отношение всегда много больше единицы (так как  $\nu_e$  и  $\nu_i$  одного порядка, а  $\delta \ll 1$ ). В случае же соударений с молекулами

$$\begin{aligned} \frac{\nu_e}{\delta \nu_m} &= \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \frac{e^4}{\delta (kT_e)^2 \delta_m} \frac{N}{N_m} \ln \left( 0,4 \frac{kT_e}{e^2 N^{1/3}} \right) \approx \\ &\approx 10^9 \frac{N}{N_m} \left( \frac{300^\circ}{T_e} \right)^2 \left( \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\delta} \right) \left( \frac{4 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2}{q_m} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

\* Те же условия (6) необходимы, когда в плазме имеют место только упругие соударения электронов с тяжелыми частицами; только  $\delta$  при этом следует заменить на  $\delta_{yn} = 2m/M$ . Случай упругих соударений был подробно рассмотрен Давыдовым [6]. Следует, однако, отметить, что условие (6б) в этой работе опущено, а (6в) записывалось в форме  $l \partial f_1 / \partial z \ll f_0$ , что неправильно.

Это отношение может быть как больше, так и меньше единицы в зависимости от степени ионизации плазмы\*. В соответствии с этим при решении уравнения (3) выделяются два существенно различных случая: случай, когда степень ионизации плазмы значительна, так что  $\nu_e/\delta\nu_m \gg 1$ , и случай слабо ионизованной плазмы, когда  $\nu_e/\delta\nu_m \ll 1$ . Оба эти случая будут рассмотрены ниже.

Предварительно, однако, отметим еще одну особенность молекулярной плазмы, благодаря которой удастся существенно упростить уравнение (3). При неупругих соударениях электронов с энергией меньше или порядка  $1 \text{ эв}$  с молекулами плазмы могут, вообще говоря, возбуждаться как вращательные, так и колебательные уровни молекул. Однако анализ данных эксперимента показывает, что основная часть потерь при  $\xi \lesssim 1 \text{ эв}$  обусловлена соударениями, приводящими к возбуждению лишь вращательных уровней\*\*.

Учтем теперь, что энергия вращательных квантов мала по сравнению со средней энергией электронов. Это означает, что в молекулярной плазме электроны невысоких энергий ( $0,01 \text{ эв} \lesssim \xi \lesssim 1 \text{ эв}$ ) и при неупругих соударениях теряют лишь малую часть своей энергии. Используя это существенное обстоятельство, нетрудно преобразовать к дифференциальному виду интегральный член, которым описываются в уравнении (3) неупругие соударения электронов с тяжелыми частицами.

В самом деле, очевидно, что в случае, когда электрон при одном ударе теряет лишь малую часть своей энергии, интеграл соударений для симметричной части функции распределения  $f_0$  может быть представлен в виде:

$$S = -\operatorname{div} \mathbf{j}_v = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \{v^2 j_v\},$$

где  $j_v$  — поток частиц через единицу площади сферической поверхности  $v$  в пространстве скоростей, вызванный соответствующими соударениями (ср. [17]). В рассматриваемом нами случае  $S$  — это интегральный член в уравнении (3), описывающий неупругие соударения; для потока  $j_{vн}$  при этом справедливо следующее выражение:

$$j_{vн} = \sum_{i < k} \int \int q_{ik}(v, \theta) v (v' - v) \{f_0(v) F_i(v_1) - f_0(v') F_k(v_1)\} dv_1 d\Omega.$$

Здесь, как и в обычном интеграле соударений Больцмана,  $q_{ik}(v, \theta)$  — сечение для неупругого соударения, приводящего к излучению кванта  $h\omega_{ik}$ ,  $F_i(v_1)$  — функция распределения молекул по скоростям. Ин-

\* В ионосфере  $\nu_e/\delta\nu_m \ll 1$  в слое  $D$  и в нижней части слоя  $E$  (до высот порядка  $90 - 100 \text{ км}$ ). В более высоких слоях, напротив,  $\nu_e/\delta\nu_m \gg 1$ .

\*\* В самом деле, в опытах по измерению  $\delta$  средняя энергия электронов  $\xi$  изменяется от  $0,05 \text{ эв}$  до  $1 - 2 \text{ эв}$  и выше. Энергия возбуждения вращательных уровней при этом всегда мала в сравнении с энергией электронов; поэтому потери на возбуждение вращательных уровней могут весьма слабо зависеть от  $\xi$ . Энергия возбуждения колебательных уровней, напротив, порядка  $0,2 \div 0,5 \text{ эв}$ . Понятно, что при минимальных значениях  $\xi \sim 0,05 \text{ эв}$  потери на возбуждение колебательных уровней несущественны. Они начинают играть основную роль лишь при более высоких энергиях электронов; в этой области  $\delta$  должно резко возрастать. На опыте  $\delta$  изменяется незначительно до энергий порядка  $1 \div 2 \text{ эв}$  и лишь в дальнейшем резко возрастает (см. [4, 3]). Отсюда и делалось заключение о том, что основную роль при энергиях электрона меньше  $1 \text{ эв}$  играют потери на возбуждение вращательных уровней [9]. Это предположение было в дальнейшем подтверждено специальным экспериментом, проведенным Холлом [10]. Оно, конечно, нуждается еще в дополнительной проверке. Наиболее убедительными были бы прямые измерения сечений для возбуждения колебательных и вращательных уровней молекул медленными электронами. Возможна и косвенная проверка, например, путем сравнения результатов экспериментального исследования распределения электронов по скоростям в молекулярной плазме с результатами теории (см. раздел 3).

тегрирование ведется по скоростям молекул  $d\mathbf{v}$ , и по углам рассеяния  $d\Omega$ ; сумма берется по всем уровням  $i, k$ . Учитывая, что электрон при одном ударе теряет лишь небольшую часть своей энергии (т. е.  $|v - v'| \ll v$ ), можно несколько преобразовать выражение в фигурных скобках:

$$\{f_0(v)F_i(v_1) - f_0(v')F_k(v'_1)\} = (v' - v) \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{F_i(v_1) + F_k(v'_1)}{2} + f_0(v) [F_i(v_1) - F_k(v'_1)].$$

Примем также во внимание, что при неупругом соударении электрон теряет энергию лишь на возбуждение молекулы; вследствие этого  $(v' - v) = \hbar\omega_{ik}/mv$ . Выражение для потока  $j_v$ , а следовательно, и для интеграла неупругих соударений, преобразуется теперь к искомой дифференциальной форме:

$$j_{vH} = \sum_{i < k} \nu_{ik} \left\{ \left( \frac{\hbar\omega_{ik}}{mv} \right)^2 \frac{1 + N_m^k / N_m^i}{2} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{\hbar\omega_{ik}}{mv} \left( 1 - \frac{N_m^k}{N_m^i} \right) f_0 \right\}. \quad (8a)$$

Здесь  $N_m^i$  (или  $N_m^k$ ) — число молекул в состоянии  $i$  (или  $k$ ),  $\nu_{ik}$  — полная частота возбуждений уровня  $\hbar\omega_{ik}$  при соударениях с электроном, имеющим скорость  $v$ :

$$\nu_{ik}(v) = 2\pi N_m^i v \int_0^\pi q_{ik}(v, \theta) \sin \theta d\theta.$$

Примем теперь, что молекулы распределены по уровням по закону Максвелла—Больцмана:  $N_m^k / N_m^i = \exp\{-\hbar\omega_{ik}/kT\}$  (т. е. что соударения с электронами не меняют существенно числа возбужденных молекул), а также учтем, что при комнатных температурах в молекулярной плазме не только энергия электронов, но и средняя энергия молекул много больше величины вращательных квантов ( $kT \gg \hbar\omega_{ik}$ ). Тогда выражение для интеграла неупругих соударений в молекулярной плазме примет окончательно следующий вид:

$$S_H = - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 Q_H(v) \left[ \frac{kT}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right] \right\}, \quad (8б)$$

где  $Q_H(v)$  — доля энергии, теряемая в единицу времени электроном на неупругие соударения:

$$Q_H(v) = \sum_{i < k} \nu_{ik} \frac{2\hbar\omega_{ik}}{mv^2} \left( 1 - \frac{N_m^k}{N_m^i} \right) = \sum_{i < k} \nu_{ik} \frac{2(\hbar\omega_{ik})^2}{mv^2 kT}. \quad (9)$$

Таким образом, в молекулярной плазме в условиях, когда энергия электронов невысока ( $\xi \ll 1 \text{ эВ}$ ), можно использовать простое выражение (8б) для интеграла неупругих соударений. В дальнейшем эти условия предполагаются выполненными\*.

\* Следует подчеркнуть, что указанное здесь упрощение интеграла соударений (до формулы (8а)) использует лишь факт малости доли энергии, теряемой электроном при одном неупругом ударе. В связи с этим нужно отметить, что прямые опыты Рамьена, Харриса и Герца [11] показывают, что потери энергии электрона в водороде и азоте при более высоких энергиях ( $\xi \sim 5 \div 7 \text{ эВ}$ ) обусловлены возбуждением лишь нижних колебательных уровней. Следовательно, доля энергии, теряемая электроном при таких соударениях, тоже мала (порядка  $0,03 \div 0,1$ ). Возможно поэтому, что применяемый здесь метод справедлив не только до  $\xi \sim 1 \text{ эВ}$ , но и при более высоких энергиях.

## 2. СЛУЧАЙ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ИОНИЗАЦИИ (МАКСВЕЛЛОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

В случае, когда степень ионизации плазмы значительна, т. е.  $v_e \gg \delta v_m$ , вид функции  $f_0$  должен определяться соударениями между электронами. Поэтому в первом приближении (при разложении в ряд по степеням параметра  $\delta v_m/v_e$ ) функция  $f_0$  оказывается максвелловской. Задача, следовательно, сводится к разысканию лишь температуры электронов\*. Последняя, как нетрудно видеть, определяется следующим уравнением:

$$\frac{dT_e}{dt} + \delta_{эфф} \nu_{эфф} (T_e - T) = \frac{2}{3kN} E j. \quad (10)$$

Здесь  $\nu_{эфф}$  и  $j$  — эффективная частота соударений и электронный ток, определенные соотношениями:

$$\nu_{эфф} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{kT_e} \right)^{5/2} \int_0^{\infty} \nu(v) v^4 \exp \{ -mv^2/2kT_e \} dv; \quad (11a)$$

$$j = e \int v f(v) dv = \frac{4\pi}{3} e \int_0^{\infty} v^3 f_1 dv.$$

Выражения для  $\nu_{эфф}$  и  $j$  те же, что и в случае только упругих соударений. Они анализировались ранее (см., например, [3, 7, 8]).

Далее,  $\delta_{эфф}$  в уравнении (10) — доля энергии, теряемая электроном в среднем при одном соударении\*\*:

$$\delta_{эфф} = \delta_{уп} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi} \nu_{эфф}} \left( \frac{m}{kT_e} \right)^{5/2} \int_0^{\infty} Q_n(v) v^4 \exp \{ -mv^2/2kT_e \} dv, \quad (11б)$$

где величина  $Q_n(v)$  определена согласно (9). Ее, разумеется, необходимо знать для того, чтобы иметь возможность вычислить  $\delta_{эфф}$ . Однако в настоящее время доля энергии  $Q_n(v)$  не может быть найдена из (9), поскольку неизвестны сечения для неупругих соударений медленных электронов с молекулами (см. [2]).

Экспериментально величина  $\delta_{эфф}$  и ее зависимость от температуры электронов измерялась в большом числе работ. Их результаты для водорода, кислорода, азота приведены в таблице 1\*\*\*.

\* Ниже рассматривается лишь случай однородной плазмы.

\*\* Заметим, что, как ясно из уравнения (10),  $\delta_{эфф}$  является, собственно, средней долей от избыточной энергии электрона  $3/2 kT_e - 3/2 kT$ . Со средней долей от полной энергии электрона  $\eta$  величина  $\delta_{эфф}$  связана соотношением  $\delta_{эфф} = \eta T_e / (T_e - T)$ ; при высоких энергиях электрона, когда  $T_e \gg T$ , значения  $\delta_{эфф}$  и  $\eta$  совпадают. В экспериментальных работах обычно приводятся значения  $\eta$ .

\*\*\* Значения  $\delta_{эфф}$  приведены здесь по данным работ Кромптона и Сюттона [5], подтвержденным в дальнейшем Холлом [8, 10]. Характер зависимости  $\delta_{эфф}$  от  $T_e$  по этим данным в основном совпадает с зависимостью, полученной предыдущими авторами [4], хотя по абсолютной величине расхождение довольно значительно. Температура плазмы в эксперименте  $T \approx 290^\circ$ ; специальная проверка при меньших  $T$  не обнаружила какого-либо изменения  $\delta_{эфф}$  [10].

Подчеркнем, что величину  $\delta_{эфф}$  имеет смысл вводить лишь в случае, когда распределение электронов по скоростям максвелловское, т. е. когда выполнено условие  $v_e/\delta v_m \gg 1$ . Нельзя с уверенностью утверждать, что это условие выполнялось в экспериментальных работах. Поэтому авторы этих работ проводят расчет  $\delta_{эфф}$  для двух случаев: когда распределение максвелловское и когда — дрювстейновское; расхождение между значениями  $\delta_{эфф}$  оказывается при этом небольшим (до  $10 \div 20\%$ ).

Значения  $\delta_{эфф} \cdot 10^3$ 

Таблица 1

$T_e \cdot 10^{-4}$ (°К)	H <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	Воздух	Ионосфера		
					h=100 км	h=200 км	h=300 км
0,5	2,3	—	—	—	—	—	—
1	2,5	3,7	0,47	0,89	0,86	0,08	0,06
2	2,2	6,7	0,36	1,2	1,2	0,12	0,06
3	2,2	3,6	0,33	1,6	1,5	0,16	0,06
4	2,5	9,05	0,32	1,7	1,6	0,18	0,06
5	3,0	8,7	0,34	1,7	1,6	0,22	0,06
6	3,4	8,2	0,38	1,7	1,6	0,26	0,07
7	3,9	7,7	0,45	1,7	1,6	0,32	0,07
8	4,4	7,2	0,60	1,7	1,6	0,43	0,08
9	4,85	6,8	0,82	1,8	1,7	0,60	0,09
10	5,3	6,6	1,15	2,0	2,0	0,85	0,11
12	6,1	7,7	2,40	3,2	3,1	1,8	0,23
15	7,2	21	9,8	11	10,6	7,7	1,13

В случае, когда газ представляет собой смесь двух (или нескольких) газов, значение  $\delta_{эфф}$  может быть, как легко видеть, вычислено следующим образом:

$$\delta_{эфф} = \delta_{эфф1} \frac{\nu_{эфф1}}{\nu_{эфф1} + \nu_{эфф2}} + \delta_{эфф2} \frac{\nu_{эфф2}}{\nu_{эфф1} + \nu_{эфф2}}. \quad (12)$$

Здесь  $\delta_{эфф1}$  и  $\nu_{эфф1}$  — доля энергии, теряемой электроном, и частота соударений для газа 1; соответственно,  $\delta_{эфф2}$  и  $\nu_{эфф2}$  — для газа 2. Результаты расчета  $\delta_{эфф}$  по формуле (12) для воздуха приведены в таблице 1 и на рис. 1. На этом же рисунке нанесены результаты экспе-

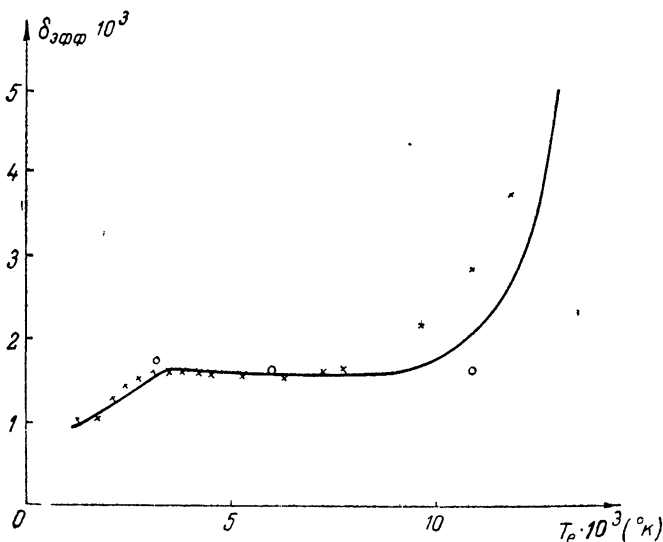


Рис. 1. Зависимость  $\delta_{эфф}$  от  $T_e$  для воздуха;  
 ×, ○ — результаты эксперимента [5].

риментальных измерений  $\delta_{эфф}$  в воздухе (Хаксли, Кромптон, Сюттон [5]; Хаксли, Зазу [6]). Из рисунка видно, что согласие рассчитанных и измеренных значений  $\delta_{эфф}$  хорошее. В таблице 1 приведены также значения  $\delta_{эфф}$  для ионосферы на высотах 100, 200 и 300 километров, рассчитанные по формуле (12) (состав ионосферы на этих высотах



принимался согласно модели, предложенной в [12] на основании данных ракетных исследований\*).

### 3. СЛУЧАЙ СЛАБО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

В случае, когда плазма ионизована слабо, т. е.  $v_e \ll \delta v_m$ , между-электронные соударения несут существенны, так что в уравнении (3) их можно не учитывать. Если, кроме того, принять во внимание преобразование (8б) для интеграла неупругих соударений, то легко видеть, что уравнение (3) фактически совпадает с рассматриваемым обычно уравнением для функции  $f_0$  в случае только упругих соударений: нужно лишь заменить  $\delta_{yn} = 2m/M$  на  $\delta(v)$ , где

$$\delta(v) = [\delta_{yn} v_{yn}(v) + Q_n(v)] v^{-1}(v). \quad (13)$$

Решение уравнения (3) также совпадает с решениями уравнения для случая только упругих соударений, полученного в [6, 8, 14, 15]: достаточно опять-таки заменить  $\delta_{yn}$  на  $\delta(v)$ . Действуя таким образом, находим, что в случае сильного постоянного электрического поля

$$f_0 = C \exp \left\{ -\frac{3m^2}{2e^2 E^2} \int_0^v v^2(v) \delta(v) dv \right\}, \quad (14)$$

где постоянная  $C$  определена условием нормировки. Эта функция распределения в отсутствие неупругих соударений, когда  $\delta(v) \equiv \delta_{yn}$ , естественно, совпадает с распределением Дрювестейна [14]. В случае переменного электрического поля  $E = E_0 \cos \omega t$ , частота которого  $\omega$  много больше, чем  $\delta v_{эфф}$ ,

$$f_0 = C \exp \left\{ -\int_0^v \frac{mv dv}{kT + [e^2 E_0^2 / 3m \delta(v) (\omega^2 + v^2)]} \right\}. \quad (15)$$

В-отсутствие неупругих соударений (15) совпадает с функцией распределения, полученной Маргенау [13].

Вид функции распределения  $f_0$  в молекулярной плазме, как ясно из (14)–(15), существенно зависит от вида функции  $\delta(v)$ . Последняя, как уже указывалось выше, не может быть в настоящее время вычислена из соотношения (9), поскольку неизвестны сечения для соударений медленных электронов с молекулами. Однако функцию  $\delta(v)$  можно найти и иначе, воспользовавшись результатами экспериментальных измерений зависимости  $\delta_{эфф}$  от  $T_e$ . В самом деле, согласно формуле (11б):

$$\int_0^\infty \delta(v) v^4 \exp \{ -mv^2/2kT_e \} dv = \int_0^\infty \delta(v) K(v) dv = \\ = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \left( \frac{kT_e}{m} \right)^{3/2} \delta_{эфф}(T_e) v_{эфф}(T_e). \quad (16)$$

Функция, стоящая в правой части этого соотношения, известна из

\* С помощью простой аппроксимации в область низких электронных температур значений  $\delta_{эфф}$ , приведенных в таблице 1, получаем для области ионосферы, ответственной за кроссмодуляцию радиоволн ( $h \sim 90$  км,  $T_e \sim 250^\circ$ ), значение  $\delta_{эфф} \approx 0,9 \cdot 10^{-3}$ . В то же время данные опытов по кроссмодуляции [13], по-видимому, указывают на несколько большее значение  $\delta_{эфф}$  порядка  $2 \cdot 10^{-3}$ . Вследствие этого экспериментальные измерения  $\delta_{эфф}$  для воздуха при низких температурах электронов ( $T_e < 1000^\circ$ ) представляли бы особенно большой интерес.

эксперимента; ядро  $K(v) = v^4 \exp \{ -mv^2/2kT_e \}$  также известно. Следовательно, соотношение (16) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции  $\delta(v)$ ; как известно, его решение может быть найдено путем сведения уравнения (16) к системе линейных алгебраических уравнений.

Заметим, что в нашем случае почти всегда оказывается возможным упростить уравнение (16), преобразовав его к дифференциальному виду (по методу Фоккера-Планка); искомое решение при этом (в предположении, что  $v$  пропорционально  $v$ ) записывается в виде:

$$\delta(v) = \delta_{эфф}(T_e^*) - 0,086 T_e^* \delta'_{эфф}(T_e^*) - 0,173 T_e^{*2} \delta''_{эфф}(T_e^*), \quad (17)$$

где  $T_e^* = (T_e^*)(v) = 128 mv^2/225 \pi k \approx 118^\circ (v/10^7)^2$ . Условием для применимости решения (17) является малость величины поправочных членов в сравнении с основным (первым) членом.

Результаты расчета функции  $\delta(v)$  для водорода, кислорода, азота и воздуха приведены в таблице 2 и в виде графиков на рис. 2.

Подставляя найденную функцию  $\delta(v)$  в (14), (15) (или в другие выражения для  $f_0$  [6, 8]), можно рассчитать функцию распределения электронов в молекулярной

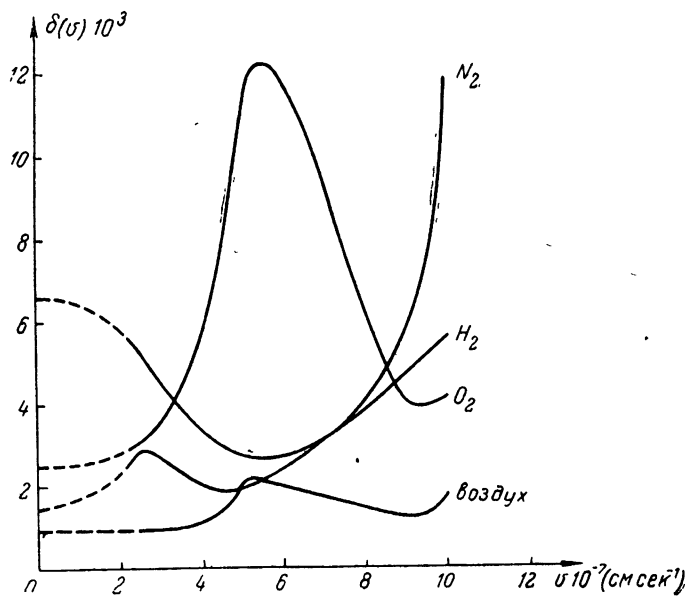


Рис. 2. Зависимость  $\delta$  от  $v$  для  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2$  и воздуха. В случае азота на оси ординат отложена величина  $\delta(v) \cdot 10^4$ .

Таблица 2

$v \cdot 10^{-7}$ (см·сек <sup>-1</sup> )	$\delta(v) \cdot 10^3$			
	$H_2$	$O_2$	$N_2$	воздух
1,0	—	—	—	—
1,5	1,9	—	—	—
2,0	2,3	2,7	0,58	0,89
2,5	2,8	3,0	0,52	0,88
3,0	2,6	3,5	0,44	0,87
3,5	2,2	4,3	0,38	0,94
4,0	2,0	5,6	0,33	1,1
4,5	1,8	7,8	0,30	1,4
5,0	1,9	10,8	0,27	1,9
5,5	2,1	12,2	0,26(5)	2,1
6,0	2,4	11,7	0,27	1,9(5)
6,5	2,7	10,7	0,28	1,8
7,0	3,1	9,2	0,31	1,7
7,5	3,4	7,8	0,34	1,5(5)
8,0	3,8	6,2	0,40	1,4
8,5	4,2	4,8	0,47	1,3
9,0	4,7	4,0	0,57	1,2
9,5	5,1	3,9	0,74	1,3
10,0	5,6	4,1	1,2	1,8

плазме. На рис. 3 приведены результаты соответствующего расчета функции распределения электронов в водороде в высокочастотном электрическом поле (см. (15) при  $\omega^2 \gg v^2$ ). По оси ординат отложен  $-\ln f_0$ , по оси абсцисс  $v^2/\bar{v}^2$ , где  $\bar{v}^2 = 2\xi/m$  — средняя квадратичная скорость электрона. Пунктирная прямая изображает максвелловскую функцию распределения. Из рисунка видно, что в рассматриваемом случае отклонения

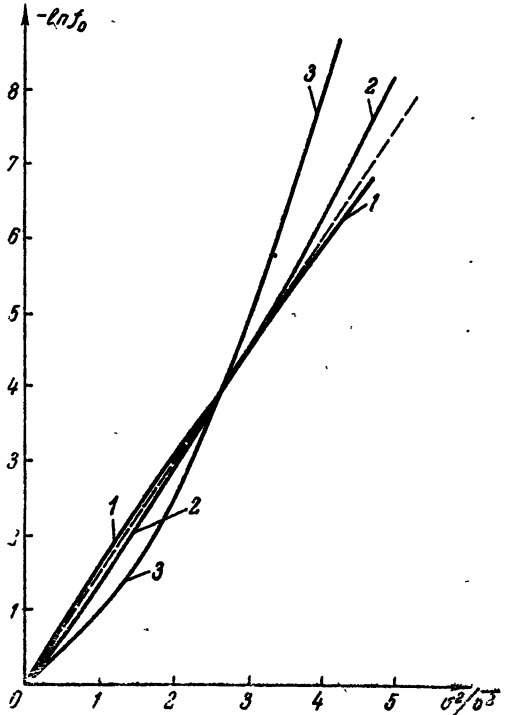


Рис. 3. Зависимость  $-\ln f_0$  от  $v^2/\bar{v}^2$  для водорода в высокочастотном поле при различных значениях средней энергии электронов: кривая 1 —  $\xi = m\bar{v}^2/2 = 0,1$  эв, кривая 2 —  $\xi = 0,3$  эв, кривая 3 —  $\xi = 1$  эв.

функции  $f_0$  от максвелловской не очень велики; они возрастают с ростом средней энергии электронов. Результаты аналогичного расчета для кислорода и азота приведены на рис. 4.

Используя полученные выражения для функции распределения, можно рассчитать среднюю энергию электронов  $\xi$ , проводимость  $\sigma$  и диэлектрическую проницаемость плазмы  $\epsilon^*$ :

$$\xi = \frac{2\pi m}{N} \int_0^\infty v^4 f_0 dv;$$

$$\sigma = \frac{4\pi e^2}{3} \int_0^\infty \frac{v^4 f_0 dv}{kT(\omega^2 + v^2) + e^2 E_0^2 / 3m \delta(v)};$$

$$\epsilon = 1 - \frac{16\pi^2 e^2}{3} \int_0^\infty \frac{v^4 f_0 dv}{kT(\omega^2 + v^2) + e^2 E_0^2 / 3m \delta(v)}.$$

\* Здесь для простоты приведены выражения для  $\sigma$  и  $\epsilon$  в отсутствие магнитного поля. При наличии в плазме постоянного магнитного поля они преобразуются известным образом (см., например, [3]): компоненты тензоров  $\sigma$  и  $\epsilon$  в направлении  $z$ , параллельном  $H$ , сохраняют вид (18); для вычисления  $\sigma_{xx}$  или  $\sigma_{yy}$  необходимо заменить в (18)  $1/(\omega^2 + v^2)$  на

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(\omega - \omega_H)^2 + v^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_H)^2 + v^2} \right\}$$

В качестве примера на рис. 5 приведены результаты соответствующего расчета  $\xi$  и  $\sigma$  для водородной плазмы в высокочастотном электрическом поле (сплошные кривые).

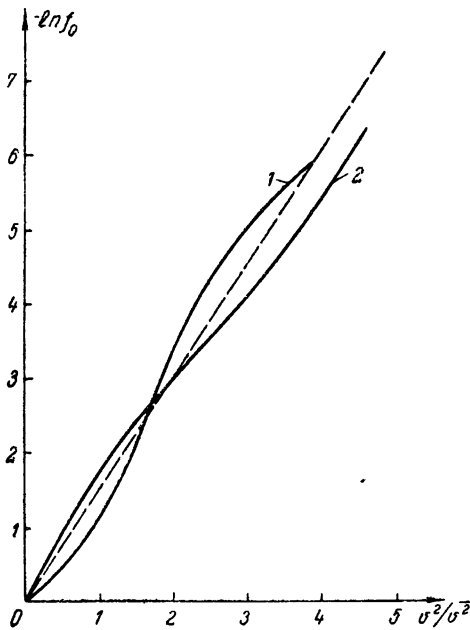


Рис. 4. Зависимость  $-\ln f_0$  от  $v^2/v^2$  для кислорода (1) и азота (2) в высокочастотном электрическом поле при  $\mathcal{E} = 0,3$  эв.

#### 4. О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННОГО ТОКА И СРЕДНЕЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ

В простейшем случае, когда частота соударений электрона и доля энергии, теряемая электроном при одном соударении, не зависят от его скорости ( $\nu \neq \nu(v)$ ,  $\delta \neq \delta(v)$ ), решение системы уравнений (3), (4) имеет следующий вид:

$$f_0 = C \exp \{ -mv^2/2kT_e \}; \quad f_1 = -u df_0/dv.$$

Здесь  $T_e$  — температура электронов, а  $u$  — их средняя направленная скорость, определенные уравнениями:

$$\frac{dT_e}{dt} + \delta\nu(T_e - T) = \frac{2}{3k} e E u; \quad (19)$$

$$\frac{du}{dt} + \nu u = \frac{e}{m} \left\{ E + \frac{1}{c} [uH] \right\}.$$

Средняя энергия электронов и электронный ток связаны с  $T_e$  и  $u$  соотношениями:

$$\xi = \frac{3}{2} kT_e, \quad j = eNu. \quad (20)$$

В молекулярной плазме, как мы видели выше, как  $\nu$ , так и  $\delta$  зависят от  $v$ . Поэтому простые выражения (19), (20) для средней энергии электронов и электронного тока в этом случае, вообще говоря,

неприменимы. Однако при наличии лишь слабой зависимости  $\nu$  и  $\delta$  от  $\nu$  последняя может оказаться мало существенной. В этих случаях, заменив  $\nu$  и  $\delta$  в уравнениях (19) их средними или эффективными значениями  $\nu_{\text{эфф}}(T_e)$  и  $\delta_{\text{эфф}}(T_e)$ , которые естественно определить согласно

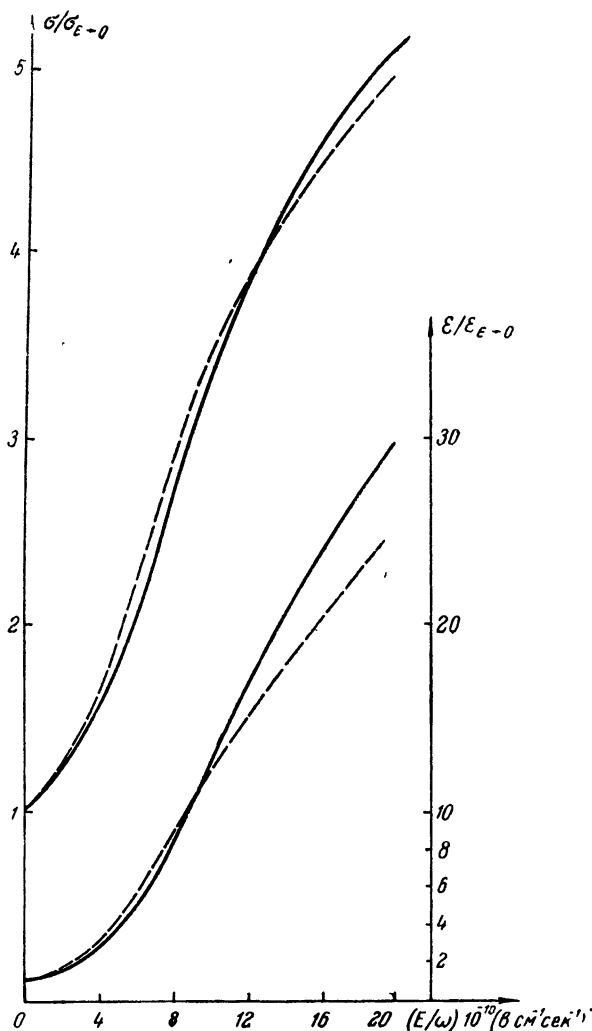


Рис. 5. Зависимость  $\epsilon/\epsilon_{E \rightarrow 0}$  и  $\sigma/\sigma_{E \rightarrow 0}$  от  $E/\omega$  в водороде в высокочастотном поле. Пунктирные кривые—результат расчета по формулам элементарной теории.

формулам (11), мы получим систему простых уравнений для  $T_e$  и  $u$ ; их можно использовать для расчета приближенных значений  $\xi$  и  $j$ . Заметим, что к этим же уравнениям можно прийти непосредственно, исходя из элементарной кинетической теории, не затрагивающей вопроса о характере распределения электронов по скоростям (см., например, [3] § 55); поэтому их и называют обычно „элементарными“.

Решая элементарные уравнения, можно определить, как уже отмечалось выше, лишь приближенные значения  $\xi$  и  $j$ . Чтобы оценить величину допускаемой при этом ошибки, необходимо сравнить их с результатами точного кинетического расчета; в тех случаях, когда ошибка велика, элементарная теория неприменима. Соответствующее рассмотрение показывает, что расхождение результатов вычисления

$\xi$  и  $j$  в элементарной и точной кинетической теориях незначительно, если выполнены условия:

$$D_v \frac{v_{\text{эфф}}^2}{\omega^2 + v_{\text{эфф}}^2} \ll 1; \quad (21a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{T_e}{v_{\text{эфф}}} \frac{d v_{\text{эфф}}}{d T_e} \frac{\gamma(T_e - T)}{\gamma(T_e - T) + T_e} \ll 1; \quad (21б)$$

$$\frac{1}{2} \frac{T_e}{\delta_{\text{эфф}}} \frac{d \delta_{\text{эфф}}}{d T_e} \frac{\gamma(T_e - T)}{\gamma(T_e - T) + T_e} \ll 1. \quad (21в)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{T_e}{\delta_{\text{эфф}}} \frac{d \delta_{\text{эфф}}}{d T_e} + \frac{2 v_{\text{эфф}}^2}{\omega^2 + v_{\text{эфф}}^2} \frac{d v_{\text{эфф}}}{d T_e},$$

а  $D_v$  — относительная дисперсия частоты соударений;

$$D_v = \frac{\sqrt{2}}{3V\pi} \frac{1}{v_{\text{эфф}}^2} \left( \frac{m}{kT_e} \right)^{5/2} \int_0^{\infty} (v - v_{\text{эфф}})^2 v^4 \exp\{-mv^2/2kT_e\} dv. \quad (22)$$

В случае максвелловского распределения (значительная степень ионизации плазмы) необходимо выполнение только первого условия (21а). Оно, в частности, всегда выполняется при высокой частоте электрического поля ( $\omega^2 \gg v_{\text{эфф}}^2$ ). В случае же низкой частоты  $\omega$  необходимо, чтобы  $v_{\text{эфф}}$  не сильно зависело от температуры электронов: если  $v_{\text{эфф}} \sim T_e^\alpha$ , то только при  $-1 \leq \alpha \leq 1$  ошибка элементарного расчета невелика ( $\Delta \xi \leq 50\%$ ;  $\Delta \sigma \leq 50\%$ ). Следует отметить, что ошибка  $\Delta \varepsilon$ , вообще говоря, значительно больше; она мала только при  $-0,5 < \alpha < 0,5$ .

В слабо ионизованной плазме должны, кроме того, выполняться условия (21б), (21в)\*. Для этого также необходимо, чтобы  $v_{\text{эфф}}$  и  $\delta_{\text{эфф}}$  слабо зависели от  $T_e$ : ошибка при вычислении  $\sigma$  и  $\xi$  невелика, если  $-0,25 \leq \alpha \leq 1$ . Существенно, что ошибка, допускаемая при элементарном расчете, сильно растет в области, где  $\delta_{\text{эфф}}$  убывает с ростом  $T_e$ ; это видно и из условий (21б), (21в)\*\*.

Для рассмотренных выше молекулярных газов ( $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ , воздух) при небольших энергиях электронов  $v_{\text{эфф}}$  пропорционально  $T_e^{0,3-0,9}$  (см. [4, 5]), а  $\delta_{\text{эфф}}$  в основном еще слабее зависит от  $T_e$  (см. таблицу 1). Следовательно, условия (21) в этих случаях выполнены, так что элементарная теория может быть использована для расчета  $\xi$  и  $j$ . Следует все же отметить, что кинетические поправки при низких частотах ( $\omega^2 \lesssim v_{\text{эфф}}^2$ ) могут быть значительными, особенно при вычислении  $\varepsilon$ ; при высоких частотах они невелики. Для примера на рис. 5 приведены пунктирные кривые; изображающие  $\xi$  и  $\sigma$  в водородной плазме при

\* Следует отметить, что условия (21б), (21в) строго справедливы лишь в области, где зависимость  $v_{\text{эфф}}$  и  $\delta_{\text{эфф}}$  от  $T_e$  монотонна. В окрестности точек, в которых монотонность нарушается, необходимо выполнение дополнительных условий  $D_v \ll 1$ ,  $D_\delta \ll 1$ , где  $D_v$  и  $D_\delta$  — относительная дисперсия  $v$  и  $\delta$  (см. (22)).

\*\* В случае, когда  $v_{\text{эфф}}$  или  $\delta_{\text{эфф}}$  резко падают с ростом  $T_e$  (если  $\alpha < -1/2$ ), элементарная и точная кинетическая теории приводят даже к качественно различным результатам: эффект неустойчивости и гистерезиса температуры электронов, который получается в элементарной теории, как показывает точная кинетическая теория, имеет место лишь в случае, когда степень ионизации плазмы значительна; в слабо ионизованной плазме неустойчивость не возникает (см. [16]).

$\omega^3 \gg v_{эфф}^2$ , рассчитанные по формулам элементарной теории (сплошные кривые—результат точного кинетического расчета). Из рисунка видно, что в рассматриваемом примере пунктирные и сплошные кривые расходятся максимум на 15%.

В заключение автор выражает свою признательность В. Л. Гинзбургу за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Грановский, Электрический ток в газах, 1, ГИТТЛ, М., 1952.
2. Г. Месси, Е. Бархоп, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, М., 1958.
3. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТТЛ, М., 1953.
4. R. H. Nealy, J. W. Reed, The behaviour of slow electrons in gases, Sydney, 1941.
5. R. W. Crompton, P. J. Sutton, Proc. Roy. Soc., A 215, 467 (1952).  
L. G. H. Huxley, R. W. Crompton, P. J. Sutton, Proc. Roy. Soc., A 218, 507 (1953).  
L. G. H. Huxley, Austr. J. Phys., 9, 44 (1956).  
L. G. H. Huxley, A. Zaazou, Proc. Roy. Soc., A 196, 402, 427 (1949).  
B. I. H. Hall, Austr. J. Phys., 8, 551 (1955).  
L. G. H. Huxley, Nuovo Cimento Suppl., 9, 59 (1952).
6. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, 6, 463 (1936); 7, 1069 (1937).
7. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 35, 392 (1958).
8. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 30, 1112 (1956); 32, 1237 (1957).  
В. М. Файн, ЖЭТФ, 28, 422 (1955).
9. W. Bennett, L. Thomas, Phys. Rev., 62, 41 (1942).
10. B. I. H. Hall, Austr. J. Phys., 8, 468 (1955).
11. K. Ramien, Zs. f. Phys., 70, 353 (1931).  
R. Harries, Zs. f. Phys., 42, 26 (1927).  
R. Harries, G. Hertz, Zs. f. Phys., 46, 177 (1927).
12. H. Kallman, W. White, H. Newell, J. Geoph. Res., 61, 513 (1956).
13. J. Ratcliffe, J. Shaw, Proc. Roy. Soc., A 193, 311 (1948).  
L. G. H. Huxley, J. Ratcliffe, Proc. IEE, II, 96, 443 (1949).
14. M. Druyvestein, Physica, 10, 69 (1930).
15. H. Margenau, Phys. Rev., 69, 508 (1948).
16. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 36, 624 (1959).
17. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1937).  
M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald, D. L. Judd, Phys. Rev., 107, 1 (1957).
18. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 37, 624 (1959).

Физический институт  
им. Лебедева

Поступила в редакцию  
25 декабря 1958 г.