КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О ФЛЮКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ВОЛНЫ, ПРОШЕДШЕЙ ЧЕРЕЗ СЛОЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Н. Г. Денисов

Решению задачи о распространении волн в слое, содержащем случайные неоднородности, посвящено много работ. Однако в этих работах рассматривался либо слой с постоянными средними параметрами (см., например, [1,2]), либо слой, в котором изменяется только интенсивность флюктуаций (например, интенсивность турбулентности) [3]; между тем в этой задаче, вообще говоря, необходимо учитывать изменение среднего показателя преломления в слое, т. е. рефракцию рассеянных волн.

Ниже приводятся результаты расчета флюктуаций амплитуды и фазы волны, прошедшей через плоский слой, в котором наряду с регулярным изменением показателя преломления имеются случайные неоднородности, средняя интенсивность которых также зависит от высоты.

Рассмотрим скалярное волновое уравнение

$$\Delta E+k_0^2\,[\varepsilon(z)+\Delta\,\varepsilon\,(x,y,z)]E=0 \qquad (k_0=\omega/c). \tag{1}$$

Будем считать, что флюктуационное отклонение диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon\,(x,\,y,\,z)$ в любой точке много меньше среднего значения $\varepsilon(z)$. Если искать решение уравнения (1), также как и в случае однородной среды [1], в виде

$$E=\exp\,[\Phi_0\,(x\,y\,z)+\Phi_1\,(x\,y\,z)]$$

и потребовать, чтобы функция Φ_0 удовлетворяла уравнению

$$\Delta\Phi_0+(\nabla\Phi_0)^2+k_0^2\,\varepsilon\,(z)=0, \tag{2}$$

то для следующего приближения Φ_1 получим уравнение

$$\Delta\Phi_1+\Delta\Phi_1(2\nabla\Phi_0+\nabla\Phi_1)+k_0^2\,\Delta\,\varepsilon\,(x,y,z)=0. \tag{3}$$

Предполагая далее, что $\lambda\, d\,\varepsilon\,(z)/dz\ll\varepsilon\,(z)$ (слой с плавно меняющимися свойствами) запишем решение уравнения (2) в приближении геометрической оптики [4]:

$$\Phi_0=ik_0\int\limits_0^z\sqrt{\varepsilon}\;dz-\frac{1}{4}\int\limits_0^z\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+\ln A_0\,, \tag{4}$$

где A_0 — амплитуда невозмущенной волны в начале неоднородного слоя ($z=0,\,\varepsilon(0)=1$). Уравнение (3) можно линеаризовать, если допустить, что $|\nabla\Phi_0|\approx k_0\sqrt{\varepsilon}\gg|\nabla\Phi_1|$ (изменение Φ_1 на длине волны в среде мало). Если ε не мало, а масштаб случайных неоднородностей l много больше длины волны и много меньше масштаба регулярного изменения ε, в уравнении (3), также как и в случае $\varepsilon=\text{const}$ [1], полный оператор Лапласа можно заменить на поперечный. В результате всех упрощений получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2\,\Phi_1}{\partial\,x^2}+\frac{\partial^2\,\Phi_1}{\partial\,y^2}+2\,ik_0\sqrt{\varepsilon(z)}\,\frac{\partial\,\Phi_1}{\partial\,z}+k_0^2\,\Delta\varepsilon\,(x,y,z)=0. \tag{5}$$

Будем искать решение этого уравнения, представляя случайные функции в виде интегралов Фурье по переменным x и y [2]. Введем обозначения

$$\varphi(\varkappa_1,\varkappa_2,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1\,e^{-i\,(\varkappa_1x\,+\,\varkappa_2y)}\,dx\,dy;$$

$$f(\varkappa_1,\varkappa_2,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta\varepsilon\,(x,y,z)\,e^{-i(\varkappa_1\,x\,+\,\varkappa_2\,y)}\,dx\,dy.$$

Тогда из (5) получим для функции $\varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, z)$ уравнение

$$2ik_0\sqrt{\varepsilon(z)}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \varkappa^2\varphi + k_0^2 f(\varkappa_1, \varkappa_2, z) = 0 \qquad (\varkappa^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2). \qquad (6)$$

Если неоднородный слой имеет толщину L_1 и внутри его находится слой толщиной L_0, содержащий случайные неоднородности, то решение уравнения (6) в точке L_1 ($\varepsilon(L_1) = 1$) можно записать в виде:

$$\varphi = \frac{ik_0}{2}\int\limits_0^{L_0} f(\varkappa_1, \varkappa_2, z)\exp\left\{-i\frac{\varkappa^2}{2k_0}[v(L_1) - v(z)]\right\}\frac{dz}{\sqrt{\varepsilon(z)}}. \qquad (7)$$

Здесь $v(z) = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon}}$; для плазмы эта величина представляет собой групповой путь луча. Находя из (7) изменение фазы и уровень и применяя далее обычную методику усреднения [2], можно получить для спектра корреляционной функции уровня $F_A(\varkappa_1, \varkappa_2)$ и для спектра корреляционной функции изменения фазы $F_S(\varkappa_1, \varkappa_2)$ формулы

$$F_{\substack{A\\S}} = \frac{k_0^2}{2}\int\limits_0^{L_0} C(z) \begin{matrix}\sin^2\\ \cos^2\end{matrix}\left\{\frac{\varkappa^2}{2k_0}[v(L_1) - v(z)]\right\}dz\int\limits_0^\infty F_0(\varkappa_1, \varkappa_2, \varsigma)\,d\varsigma, \qquad (8)$$

где

$$C(z) = \frac{\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{\varepsilon} = 4\,\overline{(\Delta n)^2}, \quad F_0(\varkappa_1, \varkappa_2, \varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(\xi, \eta, \varsigma)\,e^{-i(\varkappa_1\xi + \varkappa_2\eta)}\,d\xi\,d\eta$$

и $\rho(\xi, \eta, \varsigma)$ — коэффициент корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости. Формула (8) отличается от решения для случая $\varepsilon(z) = \mathrm{const}$ [3] тем, что в ней под знаком тригонометрических функций вместо линейных координат L_1 и z стоят $v(L_1)$ и $v(z)$. Таким образом, учет рефракции рассеянных волн в слое дает заметный эффект тогда, когда даже при медленном изменении $\varepsilon(z)$ ее отклонение от значения вне слоя не мало. Это имеет место, например, при распространении радиоволн в ионосфере, солнечной короне и при распространении звука в море.

Отметим, что учет рефракции несколько изменяет и пределы применимости приближения геометрической оптики. Последнее получается из (8), если $(\varkappa^2/2k_0)v(L_1) \ll 1$ или (так как $\varkappa \sim 1\ l$) $\lambda_0 v(L_1)\,l^{-2} \ll 1$.

Корреляционные функции уровня и набега фазы можно подсчитать по формулам

$$R_{\substack{A\\S}}(\xi, \eta) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\substack{A\\S}}\,e^{i(\varkappa_1\xi + \varkappa_2\eta)}\,d\varkappa_1\,d\varkappa_2.$$

Из (8) легко найти также и корреляционную функцию комплексной фазы:

$$R_\Phi(\xi, \eta) = \overline{\Phi_1(x, y, L_1)\Phi_1^*(x + \xi, y + \eta, L_1)} = R_A + R_S.$$

Спектр этой функции, согласно (8), равен

$$F_A + F_S = \frac{k_0^2}{2}\int\limits_0^{L_0} C(z)\,dz\int\limits_0^\infty F_0(\varkappa_1, \varkappa_2, \varsigma)\,d\varsigma; \qquad (9)$$

следовательно,

$$R_\Phi(\xi, \eta) = \frac{k_0^2}{2}\int\limits_0^{L_0} C(z)\,dz\int\limits_0^\infty \rho(\xi, \eta, \varsigma)\,d\varsigma, \qquad (10)$$

Отсюда видно, что масштаб неоднородностей комплексной фазы совпадает с поперечным масштабом неоднородностей $\Delta\varepsilon$.

Корреляционная функция комплексной фазы тесно связана с корреляционной функцией комплексного поля и, следовательно, с угловым энергетическим спектром.

Как показал Келлер [5], при довольно общих предположениях о характере случайного поля корреляционная функция комплексного поля равна

$$\rho_E(\xi,\eta) = \frac{\overline{E(x,y,z)E^*(x+\xi,y+\eta,z)}}{\overline{E(x,y)E^*(x,y)}} = e^{R_\Phi(\xi,\eta) - R_\Phi(0,0)}, \tag{11}$$

а ее фурье-сопряжение, как известно, представляет собой угловой энергетический спектр [6].

Формула (9) не содержит фактора $\varkappa^2 v(L_1)/k_0^2$, так как при сложении R_A и R_S он выпадает. Таким образом, корреляционная функция комплексной фазы и, следовательно, корреляционная функция комплексного поля (11) при $l \gg \lambda$ не зависят от расстояния между точкой наблюдения ($z=L_1$) и краем рассеивающего слоя ($z=L_0$), т. е. не зависят от толщины L_1-L_0 той части неоднородного слоя, в котором нет случайных неоднородностей. Сохранение $\rho_E(\xi,\eta)$ может быть показано при помощи простых рассуждений [6].

В этой связи необходимо заметить, что корреляционная функция комплексной фазы (10) при $l \gg \lambda$ практически совпадает с тем, что дает приближение геометрической оптики [7]. Это указывает на то, что область применимости формул для функции $\rho_E(\xi,\eta)$ и углового энергетического спектра, полученных методами геометрической оптики, определяется только неравенством $l \gg \lambda$.

Автор признателен В. Л. Гинзбургу за замечания, сделанные им при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
2. В. И. Татарский, ДАН СССР, **107**, 245 (1956).
3. В. И. Татарский, ДАН СССР, **120**, 289 (1958).
4. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТТЛ, М., 1953.
5. G. Keller, Astron. J., **58**, 113 (1953).
6. Д. Ж. Ратклифф, сб. Проблемы современной физики, вып. 10, ИЛ, М., 5, 1957.
7. H. Scheffler, Zs. f. Astrophys., **45**, 113 (1958).

Исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 13 февраля 1959 г.

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРИБОРА В КОРРЕЛЯТОРЕ

В. И. Шмальгаузен

При исследовании некоторых процессов в колебательных системах и системах автоматического регулирования нужно экспериментально определять корреляционные функции случайных сигналов.

Для измерения коэффициента корреляции двух стационарных процессов обычно усредняют их произведение по достаточно большому интервалу времени. В некоторых установках [1—3] для этой цели применяются специальные электронные схемы (перемножающие и интегрирующие). Вследствие этого вся конструкция получается довольно сложной. Однако практически возможно использовать и значительно более простые устройства; одно из них описано в данной работе. Возможность применения этого прибора объясняется тем, что в корреляторе не нужно получать мгновенное значение произведения, а достаточно определить лишь его среднюю величину.

Описываемый ниже перемножающий и усредняющий блок коррелятора работает по принципу электродинамического прибора. Подвижная рамка находится в поле двух неподвижных катушек. Благодаря инерции системы и действию связанного с ней демпфера угол отклонения рамки определяется средним моментом действующих на нее сил. Иными словами, усреднение производится с помощью электромеханического фильтра низких частот.