

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Л. Н. Белюстина

В работе дается качественное исследование нелинейной системы дифференциальных уравнений, к которой сводится задача о режимах работы системы фазовой автоподстройки частоты с интегрирующим фильтром, с учетом запаздывания при синусоидальной характеристике фазового детектора.

### ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное уравнение системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) с запаздыванием при некоторых упрощающих предположениях (см., например, [1]) может быть представлено в виде:

$$p\varphi + \Omega(1 - T_1 p)K(p)F(\varphi) = \delta\omega, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — разность фаз колебаний подстраиваемого и эталонного генераторов,  $K(p)$  — коэффициент передачи,  $F(\varphi)$  — характеристика фазового детектора,  $\Omega$ ,  $T_1$ ,  $\delta\omega$  — параметры системы ( $\Omega$  — максимальная расстройка, создаваемая фазовым детектором и реактивной лампой,  $T_1$  — время запаздывания,  $\delta\omega$  — расстройка подстраиваемого генератора относительно эталонного).

В работе рассматривается система с синусоидальной характеристикой\*  $F(\varphi) = \sin\varphi$  и интегрирующим фильтром  $K(p) = (Tp + 1)^{-1}$ , где  $T$  — постоянная времени.

Преобразуем уравнение (1), вводя относительную расстройку  $\gamma$ , безразмерное время  $\tau$  и величины  $\lambda$ ,  $d$ , пропорциональные соответственно затуханию и запаздыванию:

$$\gamma = \delta\omega/\Omega; \quad \tau = t\sqrt{\Omega/T}; \quad \lambda = 1/\sqrt{\Omega T}; \quad d = \Omega T_1,$$

а также новое переменное  $z = d\varphi/d\tau$ . Тогда вместо (1) имеем систему

$$\begin{aligned} dz/d\tau &= \gamma - \sin\varphi - \lambda(1 - d\cos\varphi)z \equiv Z(\varphi, z); \\ d\varphi/d\tau &= z \equiv \Phi(\varphi, z), \end{aligned} \quad (2)$$

эквивалентную одному дифференциальному уравнению

$$dz/d\varphi = [\gamma - \sin\varphi - \lambda(1 - d\cos\varphi)z]/z. \quad (3)$$

Фазовым пространством рассматриваемой системы является поверхность кругового цилиндра [2] с осью, параллельной оси  $z$  ( $\varphi$  и  $z$  — прямоугольные координаты на цилиндрической фазовой поверхности). В дальнейшем поверхность кругового цилиндра будет также рассматриваться развернутой на плоскость.

Качественное исследование дифференциального уравнения (3), проведенное ниже, позволяет разделить пространство параметров си-

\* Результаты, полученные ниже, справедливы и в случае косинусоидальной характеристики; этот случай сводится к рассмотренному заменой переменных  $\varphi = \bar{\varphi} + \pi/2$ .

стемы ФАП на области, для точек которых система имеет качественно различные режимы работы. Особые траектории системы на фазовой поверхности (состояния равновесия, предельные циклы и сепаратрисы седел), изучению которых посвящена работа, имеют существенно определенный физический смысл. На цилиндрической поверхности существуют два типа предельных циклов [2]: предельные циклы первого рода, охватывающие состояния равновесия, и предельные циклы второго рода, охватывающие цилиндр.

Для системы ФАП особые траектории на цилиндрической фазовой поверхности имеют следующее физическое истолкование.

Устойчивое состояние равновесия—это стационарный режим работы системы при постоянной разности фаз и нулевой разности частот (режим синхронизма).

Устойчивый предельный цикл I рода—это стационарный режим биений в системе около постоянной разности фаз и нулевой разности частот (режим биений I рода).

Устойчивый предельный цикл II рода—это стационарный режим биений в системе, при котором происходит периодическое повторение некоторой постоянной разности частот при неограниченно увеличивающейся разности фаз (режим биений II рода).

Сепаратрисы седел разделяют на фазовой поверхности траектории, имеющие различное предельное поведение либо с возрастанием, либо с убыванием времени. Взаимное расположение сепаратрис не только определяет существование и расположение областей начальных значений, начиная с которых система приходит к тому или иному стационарному режиму, но и позволяет во многих случаях установить появление и существование периодических стационарных режимов. В настоящей работе большое место отведено исследованию поведения сепаратрис.

Неустойчивые состояния равновесия и неустойчивые предельные циклы хотя и не имеют физического смысла\*, но они являются границами областей начальных значений, начиная с которых система приходит к определенному стационарному режиму.

Каждой неособой траектории фазовой поверхности соответствует переходный процесс к стационарному режиму, соответствующему множеству ее предельных точек.

## 1. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

а) При  $\lambda=0$  система становится консервативной [2]. Уравнение (3) в этом случае имеет вид

$$dz/d\varphi = (\gamma - \sin \varphi) / z;$$

его общий интеграл

$$z^2 = 2\gamma\varphi + 2\cos\varphi + C.$$

Координаты состояний равновесия определяются равенствами

$$\varphi_1 = \pi - \arcsin \gamma, \quad z_1 = 0; \quad \varphi_2 = \arcsin \gamma, \quad z_2 = 0. \quad (4)$$

Характер состояний равновесия  $(\varphi_1, 0)$ ,  $(\varphi_2, 0)$  и интегральных кривых можно установить, рассматривая (как это сделано в [2]) общий интеграл в виде

$$z = \pm \sqrt{z_1 + C} \quad (z_1 = 2\gamma\varphi + 2\cos\varphi)$$

\* Ввиду того, что соответствующие им режимы практически не осуществляются, так как любые сколь угодно малые возмущения нарушают его.

и строя предварительно кривые  $y=z_1+C$ . Фазовые траектории для  $\gamma > 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $\gamma = 0$  представлены на рис. 1. Состояние равновесия  $(\varphi_1, 0)$  — седло,  $(\varphi_2, 0)$  — центр.

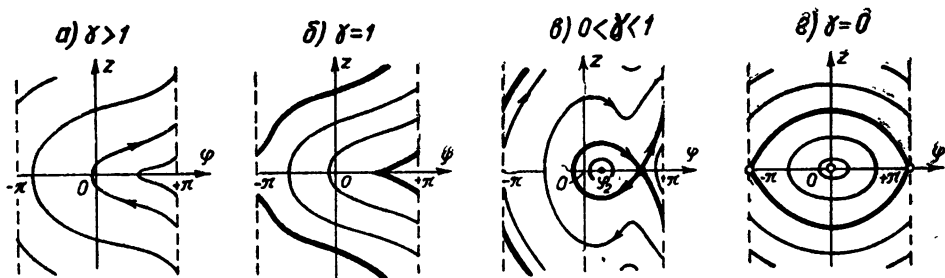


Рис. 1.

б) При  $\lambda \neq 0$ ,  $d \geq 0$  система — неконсервативная.

**Состояния равновесия.** В случае  $\lambda \neq 0$  и  $d \geq 0$  система (2) имеет состояния равновесия, координаты которых определяются, как и в консервативном случае, уравнениями (4) и не зависят ни от  $\lambda$ , ни от  $d$ . При  $\gamma < 1$  система имеет два состояния равновесия, при  $\gamma > 1$  состояний равновесия нет. Характер состояний равновесия определяется корнями  $S_{12}$ ,  $S_{12}^*$  соответствующих характеристических уравнений. Для состояния равновесия  $(\varphi_1, 0)$

$$S_{12} = \frac{-\lambda(d\sqrt{1-\gamma^2}+1)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2(d\sqrt{1-\gamma^2}+1)^2 + \sqrt{1-\gamma^2}};$$

для состояния равновесия  $(\varphi_2, 0)$

$$S_{12}^* = \frac{\lambda(d\sqrt{1-\gamma^2}-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2(d\sqrt{1-\gamma^2}-1)^2 - \sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Состояние равновесия  $(\varphi_1, 0)$  для любых  $d \geq 0$  и  $\lambda < 1$  — седло. Состояние равновесия  $(\varphi_2, 0)$  — фокус или узел (при  $\delta \equiv \lambda^2(d\sqrt{1-\gamma^2}-1)^2 - 4\sqrt{1-\gamma^2} < 0$  — фокус, при  $\delta > 0$  — узел). На рис. 2 представлена поверхность  $\delta = 0$ , отделяющая область  $\delta > 0$  пространства параметров  $\gamma, \lambda, d$  (для точек которых состояния равновесия  $(\varphi_2, 0)$  — фокус) от области  $\delta < 0$  (для точек которой  $(\varphi_2, 0)$  — узел). Фокус  $(\varphi_2, 0)$  меняет устойчивость при значениях параметров, удовлетворяющих равенству:

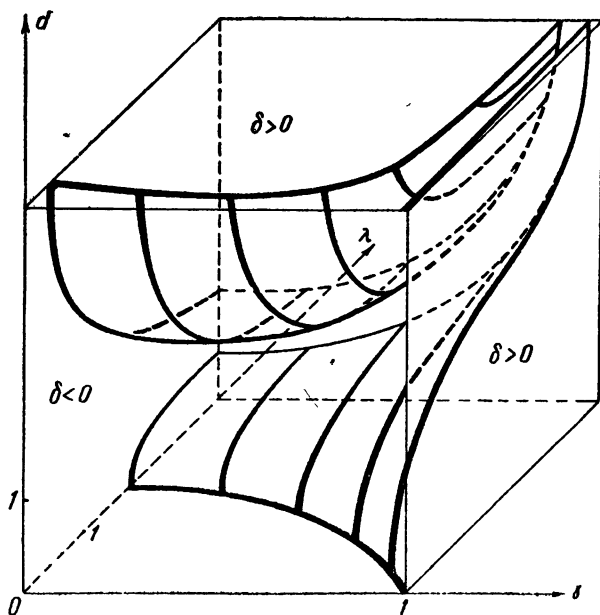


Рис. 2.

$$D \equiv \lambda(d\sqrt{1-\gamma^2}-1) = 0. \quad (5)$$

(Соотношение (5) есть условие обращения в нуль действительных частей корней характеристического уравнения для  $(\varphi_2, 0)$ .) При  $D < 0$  фокус устойчив, при  $D > 0$  фокус неустойчив. При переходе через значение  $\lambda = 0$  фокус  $(\varphi_2, 0)$  меняет устойчивость через центр; при этом система проходит через консервативный случай (см. выше).

При  $\gamma = 1$  узел  $(\varphi_2, 0)$  и седло  $(\varphi_1, 0)$  сливаются, образуя сложное состояние равновесия типа седло—узел; при  $\gamma > 1$  состояние равновесия исчезает.

*Сепаратрисы седла.* Критические направления  $x_{12}$  седла  $(\varphi_1, 0)$ , т. е. направления касательных к сепаратрисам в седле, определяются соотношениями

$$x_{12} = -\frac{\lambda}{2} (1 + d\sqrt{1-\gamma^2}) \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} (1 + d\sqrt{1-\gamma^2})^2 + \sqrt{1-\gamma^2}}. \quad (6)$$

Сепаратрисы седла  $(\varphi_1, 0)$  с отрицательным и положительным наклоном (6) будем обозначать соответственно через  $S_1$  и  $S_2$  (в верхней полуплоскости), через  $S_3$  и  $S_4$  (в нижней полуплоскости). При возрастании параметра  $\lambda$  касательные к сепаратрисам в седле поворачиваются по часовой стрелке. Действительно,

$$\frac{\partial x_{12}}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} (1 + d\sqrt{1-\gamma^2}) \pm \frac{\alpha}{2} < 0, \quad (7)$$

так как

$$\alpha \equiv \frac{\lambda (1 + d\sqrt{1-\gamma^2})}{2\sqrt{(\lambda/2)^2 (1 + d\sqrt{1-\gamma^2})^2 + \sqrt{1-\gamma^2}}} < 1.$$

*Расположение сепаратрис седла при  $\lambda \neq 0$  и  $0 \leq d \leq 1$ .* Сравнение векторных полей уравнений (3) при  $\lambda \neq 0$  и при  $\lambda = 0$  позволяет установить для достаточно малых, но не равных нулю значений  $\lambda$  возможное взаимное расположение сепаратрис седла для  $0 \leq d \leq 1$ ;  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Пользуясь свойством (7) направлений сепаратрис в седле, а также тем, что с ростом  $\lambda$  ( $\lambda_2 > \lambda_1$ ) разность направлений векторных полей \* уравнений (3) остается отрицательной:

$$R = (dz/d\varphi)_{\lambda=\lambda_2} - (dz/d\varphi)_{\lambda=\lambda_1} = -(\lambda_2 - \lambda_1)(1 - d \cos \varphi) < 0 \quad (8)$$

(выражение  $1 - d \cos \varphi$  для  $d \leq 1$  не меняет знака), устанавливаем, что при достаточно малых, но отличных от нуля  $\lambda$  для  $\gamma > 0$  и  $d \leq 1$  имеет место расположение сепаратрис, представленное на рис. 3а, а для  $\gamma = 0$  и  $d \leq 1$  — на рис. 3б. Пунктирными линиями на рис. 3а и 3б представлены сепаратрисы в соответствующих консервативных случаях. Для достаточно больших  $\lambda$  и  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $0 \leq d \leq 1$  взаимное расположение сепаратрис седла может быть установлено с помощью оценок для частей сепаратрис  $S_1$ ,  $S_2$  аналогично тому, как это сделано в [4] и [5] для соответствующих уравнений.

Рассмотрим вспомогательные кривые

$$\begin{aligned} z = z_1 &\equiv \sqrt{2\gamma(\varphi - \varphi_1 + 2\pi) + 2(\cos \varphi - \cos \varphi_1) - \lambda(1+d)(\varphi - \varphi_1 + 2\pi)}; \\ z = z_2 &\equiv \sqrt{2\gamma(\varphi - \varphi_1 + 2\pi) + 2(\cos \varphi - \cos \varphi_1)}; \\ z = z_3 &\equiv \sqrt{2\gamma(\varphi - \varphi_1) + 2(\cos \varphi - \cos \varphi_1)}; \\ z = z_4 &\equiv \sqrt{2\gamma(\varphi - \varphi_1) + 2(\cos \varphi - \cos \varphi_1) + \lambda(1+d)(\varphi_1 - \varphi)} \end{aligned} \quad (9)$$

\* О повороте векторного поля в аналогичных случаях см., например, [3].

и дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют. На каждой из кривых (9) можно найти знак разности направлений, определяемых уравнением (3) и дифференциальным уравнением рассматриваемой кривой (принимая во внимание критические направления в седле). По знаку разности устанавливаем, что кривые (9) являются мажорирующими кривыми для частей сепаратрис  $S_1$  и  $S_2$  седла урав-

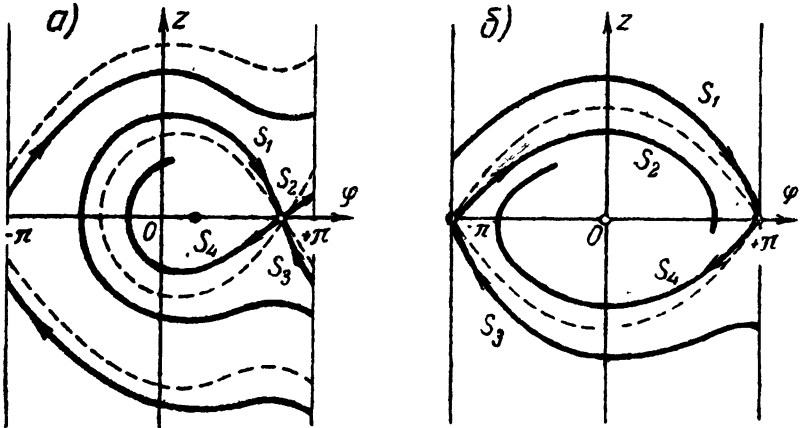


Рис. 3.

нения (3). А именно, ординаты  $z_{S_1}, z_{S_2}$  сепаратрис  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 4) удовлетворяют следующим неравенствам: на отрезке  $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1$

$$z_3 \leq z_{S_1} \leq z_4, \quad (10)$$

на отрезке  $\varphi_1 - 2\pi \leq \varphi \leq \varphi_2$

$$z_1 \leq z_{S_2} \leq z_2. \quad (11)$$

При условии

$$\lambda \geq 2\sqrt{\pi\gamma} / (1 - d) (\pi - 2 \arcsin \gamma), \quad (12)$$

поскольку кривая  $z=z_3$  пересекает прямую  $\varphi=\varphi_2$  выше, чем кривая  $z=z_2$ , сепаратриса  $S_1$  пересечет прямую  $\varphi=\varphi_2$  выше, чем сепаратриса  $S_2$ . Стало быть, при значениях параметров, удовлетворяющих неравенству (12), имеет место расположение сепаратрис\*, представленное на рис. 5а.

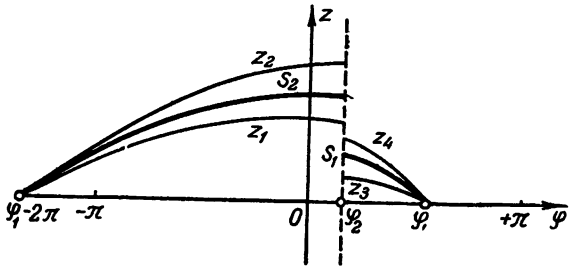


Рис. 4.

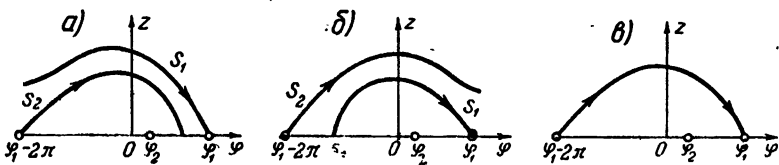


Рис. 5.

При условии

\* Такое расположение сепаратрис установлено выше для  $\gamma=0$  и  $\lambda > 0$ .

$$\lambda \leq \frac{1}{2\pi(1+d)} \left[ \sqrt{2\gamma(\pi+2\arcsin\gamma)+4\sqrt{1-\gamma^2}} - \sqrt{2\gamma(-\pi+2\arcsin\gamma)+4\sqrt{1-\gamma^2}} \right] \quad (13)$$

значения ординат кривых  $z=z_1$  и  $z=z_4$  при  $\varphi=\varphi_2$  удовлетворяют соотношению  $z_1(\varphi_2) \geq z_4(\varphi_2)$ . Следовательно, сепаратриса  $S_1$  пересекает прямую  $\varphi=\varphi_2$  ниже, чем сепаратриса  $S_2$ , при условии (13) (так же, как это установлено для  $\gamma > 0$  и достаточно малых  $\lambda$ ) имеет место расположение сепаратрис, представленное на рис. 5б.

Согласно (8), векторное поле уравнения (3) с ростом  $\lambda$  при  $0 \leq d \leq 1$  поворачивается в одном направлении (по часовой стрелке). Следовательно, для  $\gamma > 0$  и  $0 \leq d \leq 1$  при переходе от значений  $\lambda$ , удовлетворяющих условию (13), к значениям  $\lambda$ , удовлетворяющим условию (12), система (2) обязательно, и при том единственный раз, при  $\lambda=\lambda_0(\gamma, d)$  проходит через бифуркационное состояние, при котором сепаратриса  $S_1$  ( $S_2$ ) идет из седла в седло, охватывая цилиндр. Расположение сепаратрис при  $\lambda=\lambda_0(\gamma, d)$  представлено на рис. 5в.

Обозначим через  $W$  поверхность  $\lambda=\lambda_0(\gamma, d)$  пространства параметров  $\gamma, \lambda, d$  (см. рис. 6). Система (2) не является грубой [11] для точек поверхности  $W$ , так как при  $\lambda=\lambda_0(\gamma, d)$  сепаратриса седла  $(\varphi_1, 0)$  идет из седла в то же седло, при  $z \geq 0$  охватывая цилиндр. При значениях  $\lambda=\lambda_0(\gamma, d)$  система (2) является негрубой системой первой степени [12]. Для точек пространства параметров, удовлетворяющих неравенству  $\lambda > \lambda_0(\gamma, d)$ , имеет место расположение сепаратрис, представленное на рис. 5а, для  $\lambda < \lambda_0(\gamma, d)$  — на рис. 5б. Неравенства (12) и (13) дают оценки\* поверхности  $W$  по разные стороны от нее. На рис. 7а и 7б представлены сечения  $\gamma=\text{const}$  и  $d=\text{const}$  поверхности  $\lambda=\lambda_0(\gamma, d)$  (см. часть кривых, относящихся к  $d \leq 1$ ), полученные с помощью построения приближенными методами сепаратрис, идущих из седла в седло.

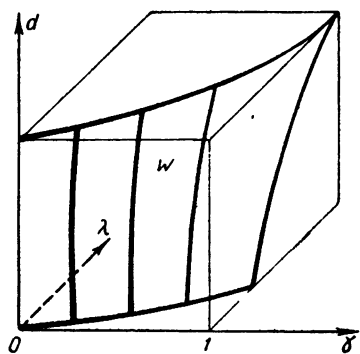


Рис. 6.

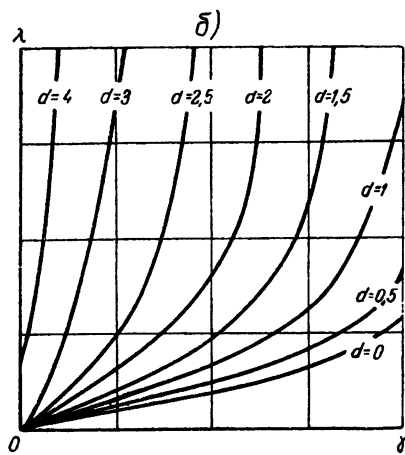
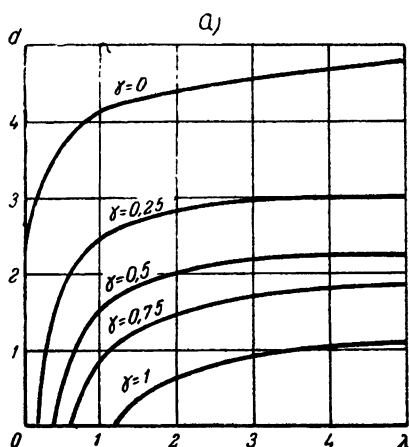


Рис. 7.

\*Оценке значений параметров  $\lambda=\lambda_0(\gamma, d)$  при  $d=0$  посвящен ряд работ [6–10]. В [10] значения  $\lambda_0$  при  $d=0$  даны с точностью до  $10^{-3}$ .

Бифуркационная поверхность  $W(\lambda=\lambda_0(\gamma, d))$  для значений  $d > 1$ . Установим существование при  $d > 1$  бифуркационной поверхности  $W$ , для точек которой сепаратриса седла при  $z \geq 0$  идет из седла в то же седло, охватывая цилиндр. Для этого воспользуемся установленным выше существованием поверхности  $W$  при  $d \leq 1$  и применим рассуждения о непрерывности изменения векторного поля системы (2) при непрерывном изменении параметров системы. При рассмотрении этого вопроса существенным образом используется тот факт, что для постоянных  $\lambda$  и  $d$  при  $z \geq 0$  (а также и при  $z \leq 0$ ) с уменьшением (возрастанием) параметра  $\gamma$  поворот векторного поля системы (2) происходит в одну сторону. При  $d > 1$  (так же, как и при  $d \leq 1$ ) разность направлений векторных полей системы (2) при  $\gamma = \gamma_1$  и  $\gamma = \gamma_2$  в каждой точке  $(\varphi, z)$  определяется равенством

$$R = (\gamma_2 - \gamma_1) / z. \tag{14}$$

При  $z \geq 0$  с ростом  $\gamma$  ( $\gamma_2 > \gamma_1$ ) поворот поля происходит против часовой стрелки ( $R > 0$ ), с уменьшением  $\gamma$  ( $\gamma_2 < \gamma_1$ ) — по часовой стрелке ( $R < 0$ ). Пусть для некоторой точки  $M_0(\gamma_0, \lambda_0, d_0)$  пространства параметров при  $z \geq 0$  сепаратриса идет из седла в седло, охватывая цилиндр. Сепаратриса  $S_1$  в этом случае совпадает с сепаратрисой  $S_2$ ; на рис. 8 она представлена жирной линией.

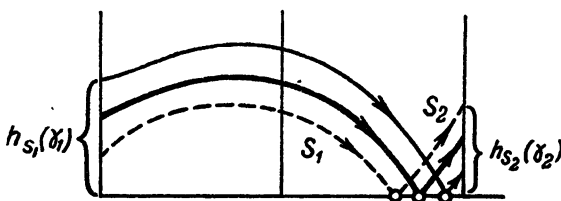


Рис. 8.

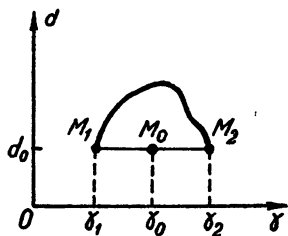


Рис. 9.

Оставим постоянными  $\lambda_0$  и  $d_0$  и будем изменять  $\gamma$ . Расстояние, которое отсекает сепаратриса  $S_i$  ( $i=1,2$ ) при некотором  $\gamma$  на прямой  $\varphi = \pm \pi$ , обозначим через  $h_{S_i(\gamma)}$ . При  $\gamma = \gamma_0$  имеет место равенство

$$h_{S_1(\gamma_0)} = h_{S_2(\gamma_0)}. \tag{15}$$

С уменьшением  $\gamma$  седло  $(\varphi_1, 0)$  сдвигается в сторону возрастания  $\varphi$ , стало быть, при  $\gamma = \gamma_1 < \gamma_0$  (в силу свойства (14)) для отрезков  $h_{S_i}$  выполняется неравенство

$$h_{S_1(\gamma_1)} < h_{S_1(\gamma_0)} < h_{S_2(\gamma_1)}, \tag{16}$$

а при  $\gamma = \gamma_2 > \gamma_0$  — неравенство

$$h_{S_1(\gamma_2)} < h_{S_1(\gamma_0)} < h_{S_2(\gamma_2)}. \tag{17}$$

Сепаратрисы для  $\gamma = \gamma_1$  и  $\gamma = \gamma_2$  на рис. 8 представлены соответственно тонкой и пунктирной линиями.

В пространстве параметров  $\gamma, \lambda, d$  точки  $M_1(\gamma_1, \lambda_0, d_0)$  и  $M_2(\gamma_2, \lambda_0, d_0)$  соединим некоторой дугой  $l$ , лежащей в части  $d > d_0$  плоскости  $\lambda = \lambda_0$ . При движении по дуге  $l$  (см. рис. 9) от точки  $M_1$  к точке  $M_2$  расположение сепаратрис меняется так, что вместо неравенства (16) становится справедливым неравенство (17). В силу непрерывности на дуге  $l$  существует, по крайней мере, одна точка  $N$ , для которой выполняется равенство (15). Стало быть, если для точки  $M_0(\gamma_0, \lambda_0, d_0)$  сепаратриса идет из седла в седло, охватывая цилиндр,

то в плоскости  $\lambda = \lambda_0$  существует проходящая через точку  $M$  кривая, для точек которой сепаратриса также идет из седла в седло, охватывая цилиндр. Приняв за точки  $M$  точки поверхности  $\lambda = \lambda_0(\gamma, d)$  ( $d \leq 1$ ), лежащие в плоскости  $d = 1$ , устанавливаем существование поверхности  $W$  для  $d > 1$ .

В силу свойства (14) системы (2) поверхность  $W$  для  $d > 1$  (так же, как и для  $d \leq 1$ ) однозначна по  $\gamma$ . Расположение части  $d > 1$  поверхности  $W$  может быть изучено определением ее сечений. На рис. 7а и 7б представлены сечения поверхности  $W$ , полученные с помощью построения сепаратрисы, идущей из седла в седло, приближенными методами\*.

Поверхность  $W$  пересекается с плоскостью  $\gamma = 0$  по кривой  $\lambda = \lambda_0(0, d)$ ; обозначим эту кривую через  $L$ . Отметим свойство уравнения (3), заключающееся в том, что уравнение (3) при  $\gamma = 0$  не изменяется от замены  $z = -\bar{z}$ ,  $\varphi = -\bar{\varphi}$ . Поэтому расположение сепаратрис  $S_3$  и  $S_4$  седла  $(\varphi_1, 0)$  в части  $z \leq 0$  фазовой поверхности определяется расположением сепаратрис  $S_1$  и  $S_2$  в части  $z \geq 0$  фазовой поверхности, а именно: сепаратрисы  $S_3$  и  $S_4$  являются симметричным отображением сепаратрис  $S_2$  и  $S_1$  относительно осей  $z = 0, \varphi = 0$ .

Из сказанного следует, что для точек кривой  $L$ , кроме сепаратрис  $S_1$  и  $S_2$ , сливаются также и сепаратрисы  $S_3$  и  $S_4$ , образуя петлю, охватывающую цилиндр при  $z \leq 0$  (см. рис. 10п). Для точек кривой  $L$ , согласно определению, данному в работе [12], система (2) является негрубой системой степени выше первой. Из расположения сепаратрис  $S_1$  и  $S_2$  при  $\lambda < \lambda_0(\gamma, d)$  и указанного выше свойства уравнения (3) при  $\lambda < \lambda_0(0, d)$  однозначно устанавливается взаимное расположение всех сепаратрис седла (см. рис. 10 о). Аналогично устанавливается расположение сепаратрис при  $\lambda > \lambda_0(0, d)$ , представленное на рис. 10 г.

Для точек плоскости  $\gamma = 1$  пространства параметров состояния равновесия устойчивый узел и седло сливаются, образуя сложное состояние равновесия типа седло—узел (см. выше). При значениях  $\gamma < 1$ , но достаточно близких к единице, сепаратриса седла  $S_4$ , стягивающаяся в точку при  $\gamma = 1$ , имеет при  $d > 1$  расположение по отношению к сепаратрисе  $S_3$  такое же, что и при значениях параметров, удовлетворяющих неравенству  $d \leq 1$  (см. рис. 3а и 3б). Сравнивая расположение сепаратрис при  $\gamma \rightarrow 1$  и  $\gamma = 0$  и применяя свойство (14) системы (2), приходим к установлению в части пространства параметров  $\lambda < \lambda_0(\gamma, d)$  существования однозначной по  $\gamma$  бифуркационной поверхности  $U[\gamma = \gamma^*(\lambda, d)]$ , для точек которой сепаратриса  $S_3$  идет из седла в седло, охватывая цилиндр при  $z \leq 0$  (рис. 10н).

Рассматривая изменение поведения сепаратрис  $S_1$  и  $S_4$  для точек части  $\lambda < \lambda_0(\gamma, d)$  пространства параметров при изменении параметра  $\gamma$  от значений, близких к единице, до значений  $\gamma = \gamma^*(\lambda, d)$  (поверхности  $U$ ), мы приходим к установлению существования (в части пространства параметров  $\lambda < \lambda_0(\gamma, d)$ ,  $\gamma^* < \gamma < 1$ ) поверхности  $V[\gamma = \gamma^{**}(\lambda, d)]$ , для точек которой сепаратрисы  $S_1$  и  $S_4$  совпадают, образуя петлю, охватывающую состояние равновесия. Однозначность поверхности  $V$  по  $\gamma$  не установлена\*\*. Изучение расположения сепаратрис при  $\gamma = 0$ , проведенное выше, позволяет сделать однозначный вывод о том, что поверхность  $V$  пересекает плоскость  $\gamma = 0$  по кривой  $L$  (т. е. по кривой пересечения поверхности  $W$  и плоскости  $\gamma = 0$ ). Примерное расположение поверхностей  $U$  и  $V$  представлено на рис. 11.

\*Счет по определению приближения сепаратрисы седла для ряда значений параметров спроектирован и проведен на электронной цифровой машине ГИФТИ программистом З. С. Баталовой.

\*\*Численным методом, исходя из приближенного построения сепаратрис грубых систем (2), близких к негрубой, установлена неоднозначность по  $\gamma$  части поверхности  $V$ .



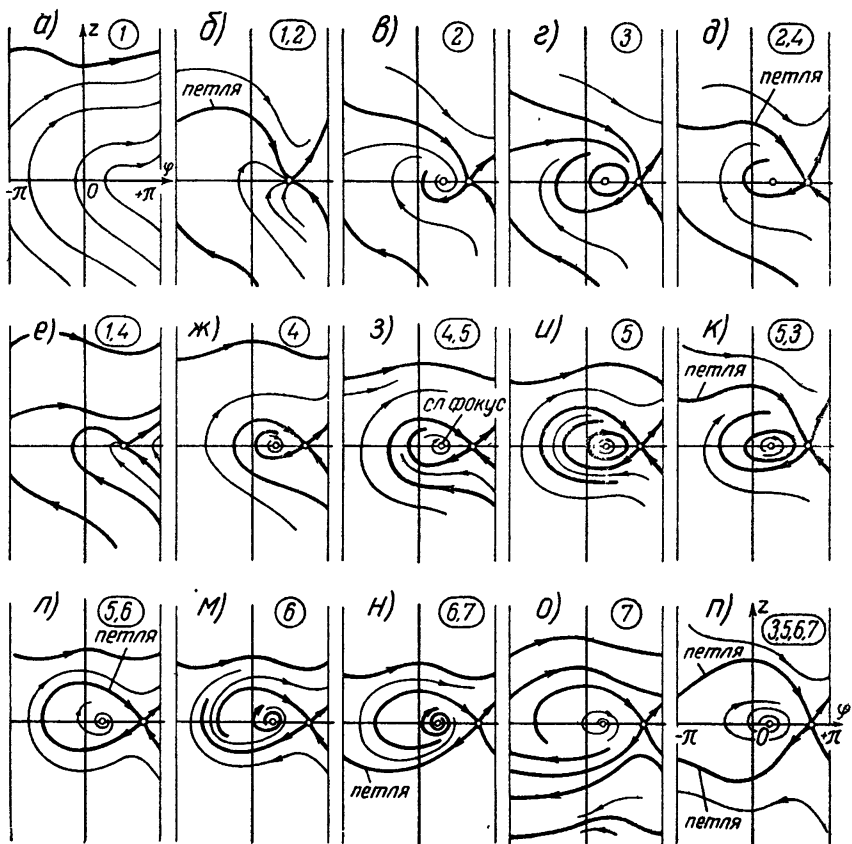


Рис. 10.

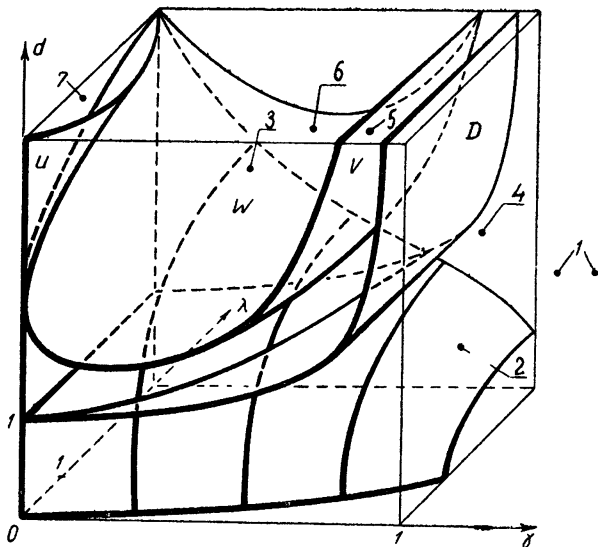


Рис. 11.

Для определения устойчивости замкнутых контуров, составленных из сепаратрис седла, применим результаты работ [13-15]. Для определения устойчивости замкнутого контура, составленного из сепаратрис седла  $(\varphi^0, z^0)$ , в случае, если такой контур допускается системой, согласно [15], достаточно рассмотреть в седле знак величины  $\sigma = \Phi'_\varphi(\varphi^0, z^0) + Z'_z(\varphi^0, z^0)$ , называемой седловой величиной. Контур является устойчивым, если  $\sigma < 0$ , и неустойчивым, если  $\sigma > 0$ .

Для седла  $(\varphi_1, 0)$  системы (2) седловая величина

$$\sigma = -\lambda(1-d \cos \varphi_1) = -\lambda(1+d\sqrt{1-\gamma^2}) < 0, \quad (18)$$

и, следовательно, для точек поверхностей  $U, V, W$  все замкнутые контуры, составленные из сепаратрис седла  $(\varphi_1, 0)$ , устойчивы. Устойчивость контура, составленного из сепаратрис, определяет [13-15] устойчивость рождающихся от него предельных циклов (ниже мы вернемся к этому вопросу).

*Предельные циклы.* При рассмотрении вопроса о предельных циклах применим критерий Бендиксона—Дюляка на цилиндре [5, 16]. Составим для системы (2) выражение

$$J = \int_C \Phi dz - Z d\varphi = \iint (\partial\Phi/\partial\varphi + \partial Z/\partial z) d\varphi dz, \quad (19)$$

где  $C$ —произвольная кусочно-гладкая кривая, ограничивающая односвязную область  $D$ .

В том случае, когда величина

$$B \equiv \partial\Phi/\partial\varphi + \partial Z/\partial z \quad (20)$$

в некоторой области  $G$  фазовой поверхности не меняет знак, выражение  $\iint_G B d\varphi dz$  не обращается в нуль. Тогда в силу (19) система (2)

в области  $G$  не имеет предельных циклов I рода и не может иметь более одного предельного цикла II рода. Рассмотрим отдельно случаи, когда  $0 < d < 1$  и  $d > 1$ .

Если  $d$ —в интервале от 0 до 1, то в этом случае величина (20) не меняет знак, поскольку  $B = -\lambda(1-d \cos \varphi) \leq 0$ . Согласно критерию Бендиксона—Дюляка, система (2) при этом не имеет предельных циклов I рода; если же она имеет предельный цикл II рода, то он—единственный. Покажем, что существует область пространства параметров  $\gamma, \lambda, d$ , для точек которой система (2) имеет устойчивый предельный цикл II рода. При  $d < 1, \lambda > 0$  ординаты изоклины горизонтальных наклонов  $z = (\gamma - \sin \varphi) / \lambda(1-d \cos \varphi)$  ограничены некоторой величиной  $z_{\max}$ , поскольку при этих значениях параметров выражение  $1-d \cos \varphi$  не обращается в нуль.

В части фазовой поверхности, определенной неравенством  $z > z_{\max}$ , все траектории системы (2) имеют отрицательный наклон. Стало быть, для траекторий системы (2), проходящих в области  $z > z_{\max}$ , выполняется неравенство

$$z(\varphi + 2\pi) < z(\varphi). \quad (21)$$

При выполнении неравенства (21) для наличия у системы (2) цикла II рода достаточно [2] существования траектории, для которой выполняется неравенство

$$z(\varphi + 2\pi) \geq z(\varphi). \quad (22)$$

В силу расположения сепаратрис  $S_1$  и  $S_2$  траектории системы (2), удовлетворяющие неравенству (22), существуют при значениях параметров  $\lambda \leq \lambda_0(\gamma, d), \gamma \leq 1$  и при  $\gamma > 1$ . Следовательно, при этих значе-

ниях параметров существует цикл II рода, единственный в силу критерия Бендиксона—Дюляка и устойчивый, так как характеристический показатель  $h_S$  для него имеет отрицательный знак:

$$h_S = -\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \lambda (1-d \cos \varphi) d\varphi < 0. \quad (23)$$

(Величина  $1-d \cos \varphi \geq 0$  при  $d \leq 1$ .) Поверхности бифуркационных значений  $\lambda = \lambda_0(\gamma, d)$ ,  $\gamma \leq 1$  и  $\lambda > \lambda_0(1, d)$ ,  $\gamma = 1$  отделяют области пространства параметров  $A_1[\lambda \leq \lambda_0(\gamma, d), \gamma < 1]$  и  $A_2[\gamma \geq 1]$ , для точек которых существует единственный устойчивый предельный цикл II рода, от области  $B_1(\lambda > \lambda_0, \gamma < 1)$ , для точек которой циклов II рода не существует (см. рис. 6). Поверхность  $\lambda = \lambda_0(\gamma, d)$ ,  $d \leq 1$  определяет зависимость полосы захвата от параметров затухания и запаздывания системы.

Если  $d > 1$ , то в этом случае применить критерий Бендиксона—Дюляка нельзя, поскольку величина  $B = -\lambda(1-d \cos \varphi)$  не сохраняет знак на всей фазовой поверхности. При рассматриваемых значениях параметров, как мы увидим ниже, система (2) может иметь циклы I и II рода.

При значениях параметров, удовлетворяющих равенству (5), фокус  $(\varphi_2, 0)$  системы (2) становится сложным. Для выяснения возможности появления предельного цикла от сложного фокуса [14, 17, 18] и установления его устойчивости определяем знак первой ляпуновской

величины. В окрестности фокуса  $\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi_2 = 0$ ,  $z = 0$  разложение, включающее вторые и третьи степени, имеет вид:

$$dz'd\tilde{\varphi} = \left[ -\sqrt{1-\gamma^2} \tilde{\varphi} - K(1-d\sqrt{1-\gamma^2})z + \frac{\gamma\tilde{\varphi}^2}{2} - \lambda d \gamma \tilde{\varphi} z + \frac{\sqrt{1-\gamma^2} \tilde{\varphi}^3}{6} - \frac{\lambda d \sqrt{1-\gamma^2} \tilde{\varphi}^2 z}{2} \right] / z.$$

Следуя [19], находим, что первая ляпуновская величина  $L$  при  $d = 1/\sqrt{1-\gamma^2}$  имеет отрицательный знак:

$$L(d = 1/\sqrt{1-\gamma^2}) = -\pi \lambda d / 8 q \sqrt{q} < 0$$

(здесь  $q = \sqrt{1-\gamma^2}$ ), и, стало быть, граница устойчивости  $d = 1/\sqrt{1-\gamma^2}$  является безопасной. Поверхность  $d = 1/\sqrt{1-\gamma^2}$  в пространстве параметров  $\gamma, \lambda, d$  будем обозначать через  $D_0$ . При пересечении в пространстве параметров поверхности  $D_0$  от значений  $d < 1/\sqrt{1-\gamma^2}$  к значениям  $d > 1/\sqrt{1-\gamma^2}$  (см. рис. 11) устойчивый фокус (через сложный фокус) становится простым неустойчивым; при этом из сложного фокуса возникает единственный устойчивый предельный цикл I рода. Относительно появившегося цикла I рода справедливы следующие предложения.

Предложение 1. Область неустойчивости, заключающаяся внутри цикла I рода, появившегося из сложного фокуса, растет с ростом  $d$ , по крайней мере, в некоторой области фазовой поверхности.

Действительно, разность направлений векторных полей системы (2) в точке  $(\varphi, z)$  при двух значениях параметра  $d = d_1$  и  $d = d_2$  и постоянных  $\gamma_0$  и  $\lambda_0$  определяется равенством

$$R = \lambda_0 (d_2 - d_1) \cos \varphi. \quad (24)$$

Рассмотрим соответствующий значению  $d = d_1$  ( $d_1$  близко к  $1/\sqrt{1-\gamma^2}$ )

устойчивый цикл  $K_1$ , охватывающий состояние равновесия  $(\varphi_2, 0)$  и расположенный в полосе фазовой плоскости, определенной неравенствами

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (25)$$

С ростом параметра  $d$  ( $d_2 > d_1$ ) векторное поле на этом цикле в силу (24) поворачивается против часовой стрелки, так что траектории системы (2) при  $d = d_2$  пересекут цикл, выходя за пределы области, ограниченной циклом. Таким образом, устойчивый цикл  $K_1$  растет с ростом  $d$ . Однако вследствие того, что невозможность возникновения полуустойчивого цикла I рода из уплотнения траектории с последующим разделением его на два цикла остается недоказанной, следует учитывать, что устойчивый цикл  $K_1$  с ростом  $d$  может исчезнуть после слияния с некоторым неустойчивым предельным циклом системы. В последнем случае в силу расположения сепаратрис седла как при  $\lambda > \lambda_0(\gamma, d)$ , так и при  $\lambda < \lambda_0(\gamma, d)$  (см. рис. 10в—10к) существует охватывающий состояние равновесия  $(\varphi_2, 0)$  устойчивый предельный цикл  $K_2$  большего размера, чем  $K_1$  (здесь мы пользуемся тем, что поверхности  $U$  и  $V$  не пересекают некоторую конечную окрестность поверхности  $D_0$ ). Предложение доказано.

Предложение 2. Амплитуда по  $\varphi$  области неустойчивости внутри цикла  $K_1$  при  $d > 1/\sqrt{1-\gamma^2}$  растет по модулю, по крайней мере, как  $|\varphi| = \arccos(1/d)$ .

Для доказательства воспользуемся критерием Бендиксона—Дюляка [3]. Величина  $B$ , определенная равенством (20), при  $d > 1$  меняет знак на прямой  $\varphi = \pm \arccos(1/d)$ . Внутри области фазовой поверхности, определенной неравенствами

$$-\arccos(1/d) < \varphi < \arccos(1/d), \quad (26)$$

величина  $B$  знак не меняет, так что внутри полосы (26) фазовой поверхности нет циклов I рода. В силу неустойчивости состояния равновесия  $(\varphi_2, 0)$  при  $d > 1/\sqrt{1-\gamma^2}$  следует справедливость предложения 2.

Пользуясь свойством (14) векторного поля системы (2) на циклах II рода, если они существуют, можно установить также справедливость предложений 3—5.

Предложение 3. Устойчивый предельный цикл II рода в части  $z > 0$  фазовой поверхности с уменьшением  $\gamma$  опускается, т. е. ординаты цикла при  $\gamma = \gamma_1$  и  $\gamma = \gamma_2 < \gamma_1$  удовлетворяют неравенству

$$z_{\gamma_2} < z_{\gamma_1}. \quad (27)$$

Предложение 4. Неустойчивый предельный цикл II рода в части  $z > 0$  фазовой поверхности с уменьшением  $\gamma$  поднимается, т. е. ординаты цикла при  $\gamma = \gamma_1$  и  $\gamma = \gamma_2 < \gamma_1$  удовлетворяют неравенству

$$z_{\gamma_2} > z_{\gamma_1}.$$

Предложение 5. Система (2) не может иметь полуустойчивых предельных циклов II рода.

Для доказательства предположим противное. Пусть для некоторой точки  $M_0(\gamma_0, \lambda_0, d_0)$ ,  $d_0 > 1$  пространства параметров существует полуустойчивый предельный цикл II рода. Тогда из свойства (14) и предложений 3 и 4 следует, что если для значений  $\gamma_1 = \gamma_0 + \Delta$  полуустойчивый цикл распадается на два цикла, то для значений  $\gamma = \gamma_0 - \Delta$  он исчезает.

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве существования поверхности  $W$  ( $d > 1$ ), соединяем точки  $M_1(\gamma_0 + \Delta, \lambda_0, d_0)$  и

$M_2(\gamma_0 - \Delta, \lambda_0, d_0)$  кривой, лежащей в части  $d < d_0$  плоскости  $\lambda = \lambda_0$ . На дуге  $M_1 M_2$  существует по крайней мере одна точка, для которой также существует полуустойчивый цикл.

Из сказанного ясно, что прямая  $\lambda = \lambda_0$ ,  $d = d_0$  пространства параметров пересекает проходящую через точку  $M_0$  поверхность  $E$ , для точек которой существует полуустойчивый цикл. Следовательно, поверхность  $E$  пересекает плоскость  $d = 1$ , а этого быть не может, так как для  $d \leq 1$  не существует (см. выше исследование предельных циклов в случае  $0 \leq d \leq 1$ ) более одного цикла II рода. Предложение 5 доказано.

Перечислим возможности исчезновения устойчивого предельного цикла, кроме рассмотренной выше возможности для цикла I рода слияния с неустойчивым предельным циклом.

Цикл I рода может исчезнуть [13–18], либо стянувшись в точку (в сложный фокус), либо слившись с петлей сепаратрисы, охватывающей состояние равновесия. Такие петли, как мы видели раньше, система (2) имеет для точек поверхности  $V$ .

Цикл II рода может исчезнуть [15, 16], слившись с петлей сепаратрисы седла или седла—узла, охватывающей цилиндр. Такие петли система (2) имеет для точек поверхностей  $U$ ,  $W$  и части  $\lambda \geq \lambda_0(\gamma, d)$  плоскости  $\gamma = 1$ . Напомним далее, что в силу (18) все замкнутые контуры, составленные из сепаратрис седла  $(\varphi_1, 0)$ , устойчивы. Согласно [13, 15], из устойчивого замкнутого контура, составленного из сепаратрис седла, может родиться только единственный устойчивый предельный цикл.

Принимая во внимание сказанное выше, а также расположение сепаратрис для точек пространства параметров, находящихся по разные стороны от поверхностей  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , приходим к следующим заключениям.

1) При пересечении поверхности  $W$  с ростом  $\gamma$  (см. рис. 11) из охватывающей при  $z > 0$  цилиндр петли сепаратрисы седла родится в части  $z > 0$  фазовой поверхности единственный устойчивый предельный цикл II рода.

2) При пересечении части  $\lambda > \lambda_0(\gamma, d)$  плоскости  $\gamma = 1$  (от  $\gamma < 1$  к  $\gamma > 1$ ) из охватывающей цилиндр петли сепаратрисы седло—узла родится в части  $z > 0$  фазовой поверхности единственный устойчивый предельный цикл II рода.

3) При пересечении поверхности  $U$  с уменьшением  $\gamma$  из охватывающей при  $z \leq 0$  цилиндр петли сепаратрисы седла родится в части  $z < 0$  фазовой поверхности единственный устойчивый предельный цикл II рода.

4) При пересечении поверхности  $V$  с уменьшением  $d$  из петли сепаратрисы, охватывающей состояние равновесия (рис. 10л), родится единственный устойчивый предельный цикл I рода (рис. 10к).

Исходя из полученных бифуркационных поверхностей в пространстве параметров и отвлекаясь от возможности появления и исчезновения из уплотнения траекторий двойного цикла I рода, получаем разбиение пространства параметров  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $d$  на области, соответствующие различным качественным структурам траекторий на фазовой поверхности, определяющим, в свою очередь, различные режимы работы системы.

При значениях  $\gamma > 1$  (область 1 рис. 11)\* система (2) не имеет состояний равновесия, а при  $z > 0$  имеет единственный устойчивый цикл II рода (рис. 10а). С уменьшением  $\gamma$  цикл спускается (см. неравенство (27)) и может исчезнуть лишь после слияния либо с пет-

\* На рис. 10 числа в кружках указывают номера соответствующих областей пространства параметров.

лей сепаратрисы седла (рис. 10д и 10к) при пересечении поверхности  $W$ , либо с петлей седла—узла (рис. 10б) при пересечении части  $\lambda > \lambda_0$  ( $\gamma, d$ ) плоскости  $\gamma = 1$ .

Поверхность  $D_0$  (граница  $d = 1/\sqrt{1-\gamma^2}$  устойчивости фокуса), поверхность  $W$  ( $\lambda = \lambda_0$  ( $\gamma, d$ )) и плоскость  $\gamma = 1$  разделяют следующие области пространства параметров (см. рис. 11).

Область 2, для точек которой система не имеет циклов ни I, ни II рода (рис. 10в). Для точек этой области система устойчива в целом. Область 2 определяется неравенствами

$$0 \leq \gamma < 1; \lambda > \lambda_0(\gamma, d); d < 1/\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Область 3, для точек которой система не имеет циклов II рода и имеет устойчивый предельный цикл I рода (рис. 10г). Система неустойчива в малом\*, имеются автоколебания I рода. Возможные режимы: режим биений первого рода при неустойчивости в малом. Область 3 определяется неравенствами

$$0 \leq \gamma < 1; \lambda > \lambda_0(\gamma, d); d > 1/\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Область 4, для точек которой система имеет устойчивый цикл II рода в части  $z > 0$  фазовой поверхности и не имеет циклов I рода (рис. 10ж). Система устойчива в малом, но устойчивость в большом зависит от начальных условий. Возможные режимы: синхронный режим и режим биений II рода. Область 4 определяется неравенствами

$$0 < \gamma < 1; \lambda < \lambda_0(\gamma, d); d < 1/\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Область 5, для точек которой система имеет устойчивый цикл II рода в части  $z > 0$  фазовой поверхности и устойчивый цикл I рода (рис. 10и). Система неустойчива в малом, имеются автоколебания I и II рода. Траектории в зависимости от начальных условий стремятся к циклу I или II рода. Возможные режимы: режим биений I рода при неустойчивости в малом, режим биений II рода для  $z > 0$ . Область 5 определяется неравенствами

$$0 \leq \gamma < 1; \lambda < \lambda_0(\gamma, d); 1/\sqrt{1-\gamma^2} < d < d^{**}.$$

Значения  $d = d^{**}$  соответствуют пересечениям с бифуркационной поверхностью  $V$ , для точек которой сепаратриса идет из седла в седло, охватывая состояние равновесия (рис. 10л и 10п).

Поверхность  $U$ , для точек которой сепаратриса идет из седла в седло, охватывая цилиндр в части  $z \leq 0$  фазовой поверхности (см. рис. 10н), разделяет области 6 и 7 пространства параметров (рис. 11).

Область 6, для точек которой система имеет устойчивый цикл II рода в части  $z < 0$  фазовой поверхности и не имеет циклов I рода (рис. 10м). Система неустойчива; возможные режимы: режим биений II рода для  $z > 0$ . Область 6 ограничена поверхностями  $U$ ,  $V$  и частью плоскости  $\lambda = 0$ .

Область 7, для точек которой система имеет два цикла II рода (один для  $z > 0$ , другой для  $z < 0$ ) и не имеет циклов I рода (рис. 10о). Система неустойчива; возможные режимы: режим биений II рода (как для  $z > 0$ , так и для  $z < 0$ ).

\* Заметим, что при полигональной характеристике [1] система ФАП при значениях  $d < \pi/2$  устойчива в малом, тогда как при косинусоидальной характеристике при этих значениях параметра возможна потеря устойчивости в малом и возникновение автоколебаний I рода.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Капранов, Радиотехника, 11, 37 (1956).
2. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ч. 1, ОНТИ, М., 1937.
3. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 118 (1958).
4. Л. Н. Белюстина, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 175 1955.
5. Л. Н. Белюстина, Изв. АН СССР, отд. техн. наук, 10, 131 (1954).
6. T. Tricomi, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 2, 2 (1933).
7. L. Amerio, Ann. Mat. pura Appl., 30, 75 (1949).
8. C. Bohm, Ann. Mat. pura Appl., 35, 4 (1953).
9. G. Seifert, Zs. für angewandte Mathematik und Physik, 3, 407 (1952).
10. A. Giger, Zs. für angewandte Mathematik und Physik, 7, 121 (1956).
11. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 14, 247 (1937).
12. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 21, 427 (1938).
13. Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 78, 641 (1951).
14. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, Уч. зап. Горьк. ун-та, вып. 6, 3 (1937).
15. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия седло—узел, Матем. сб. (в печати).
16. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 2-ое изд., Физматгиз, М.—Л., 1959.
17. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 99, 885 (1954).
18. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, Матем. сб., 40, 179 (1956).
19. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М.-Л., 1949.

Исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
26 ноября 1958 г.