

ЗАХВАТЫВАНИЕ ЧАСТОТЫ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. М. Шауман, П. Н. Занадворов

Рассмотрена стационарная задача о захватывании частоты в двухконтурном автогенераторе. Исследование проведено методом асимптотического разложения по малому параметру в первом приближении. Выяснен характер областей устойчивости и „резонансных“ кривых для автогенератора анализируемого вида при различных значениях параметров в широкой области изменения расстроек. Проведено экспериментальное наблюдение процессов в автогенераторе с двумя степенями свободы, находящимся под воздействием внешней силы.

Теория автоколебательных систем с двумя степенями свободы, близких к линейным консервативным системам, находящихся под воздействием внешней периодической силы, для ряда частных случаев (при большом расщеплении нормальных частот вблизи от одной из них, для далекой нерезонансной области и т. д. [1-3]) изучена достаточно хорошо. В настоящей работе исследуется поведение автогенератора с двумя контурами в цепи сетки при малом расщеплении нормальных частот в широкой области изменения расстройки и связи между контурами.

Решения основных уравнений находятся методом асимптотического разложения по малому параметру в первом приближении (метод усреднения [4]). Устойчивость полученных решений исследуется на основе методов А. М. Ляпунова.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения автоколебательной системы с двумя степенями свободы, в качестве которой выбран генератор, выполненный по схеме рис. 1 (в предположении, что лампа имеет характеристику „мягкого режима“), имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} - \gamma_1 \frac{d^2y}{dt^2} + n_1^2 x = \mu n_1 (1-x^2) \frac{dx}{dt} + E' \cos pt; \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \gamma_2 \frac{d^2x}{dt^2} + n_2^2 y = -\mu \frac{n_2^2}{n_1} \delta \frac{dy}{dt}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\mu = n_1(MS_0 - R_1C_1)$ — безразмерная величина, выбранная в качестве малого параметра, x и y — безразмерные переменные, $n_1^2 = 1/L_1C_1$ и $n_2^2 = 1/L_2C_2$ — собственные частоты контуров,

$$E' = E_m n_1^2 \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - R_1C_1}}; \quad \delta = \frac{R_2 C_2}{MS_0 - R_1C_1};$$

$$\gamma_1 = NC_2 n_1^2; \quad \gamma_2 = NC_1 n_2^2.$$

Фундаментальное уравнение системы (1) запишется следующим образом:

$$\alpha \omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0, \quad (2)$$

где $\alpha = 1 - \gamma_1 \gamma_2$.

Следует заметить, что при выполнении условия

$$(n_1^2 + n_2^2)^2 = 4\alpha n_1^2 n_2^2 \quad (3)$$

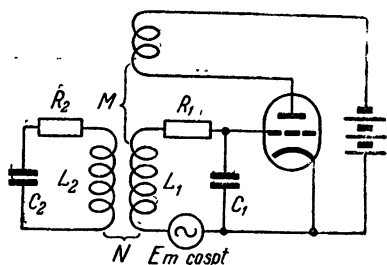


Рис. 1. Схема генератора с двумя контурами в цепи сетки.

имеет место вырождение корней фундаментального уравнения (2). Так как $0 \leq \alpha \leq 1$, условие (3) выполняется только при $n_1^2 = n_2^2$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. При этом, однако, система (1) распадается на два независимых уравнения: одно описывает поведение генератора с единственной степенью свободы, а другое—свободные колебания во втором контуре.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРИ МАЛОМ РАСЩЕПЛЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ЧАСТОТ

Случай, соответствующий близким значениям частоты внешней силы p и собственной частоты системы (или одной из нормальных частот) ω , когда относительная расстройка между ними имеет порядок малости μ , принято называть резонансным. Если же разность между нормальными частотами мала (относительная разность порядка μ), то условие резонанса будет выполняться для обеих нормальных частот одновременно. Такой случай условимся называть „двойным резонансом“. Так как резонанс с каждой из нормальных частот характеризуется вполне определенными фазовыми соотношениями, для „двойного резонанса“ общее решение системы (1) необходимо представить в виде:

$$\begin{cases} x = A \cos pt + B \sin pt + C \cos pt + D \sin pt; \\ y = Ak_1 \cos pt + Bk_1 \sin pt + Ck_2 \cos pt + Dk_2 \sin pt, \end{cases} \quad (4)$$

где A, B, C и D — медленно меняющиеся функции времени, первые производные которых имеют порядок малости μ , а вторые— μ^2 ; коэффициенты k имеют значения:

$$k_1 = \frac{\gamma_2 \omega_1^2}{\omega_1^2 - n_2^2} = \frac{\omega_1^2 - n_1^2}{\gamma_1 \omega_1^2}; \quad k_2 = \frac{\gamma_2 \omega_2^2}{\omega_2^2 - n_2^2} = \frac{\omega_2^2 - n_1^2}{\gamma_1 \omega_2^2}.$$

Используя решение (4), из уравнения (1) могут быть получены выражения для dA/dt , dB/dt , dC/dt и dD/dt , которые после усреднения их по времени (на основе общего метода) дадут уравнения первого приближения системы (укороченные уравнения):

$$\begin{cases} dA/dt = \mu \{-aB + \alpha_1 \beta_1 A + \alpha_1 \beta_3 C - \alpha_1 (A+C) [(A+C)^2 + (B+D)^2]\} = \mu P_1; \\ dB/dt = \mu \{aA + \alpha_1 E + \alpha_1 \beta_1 B + \alpha_1 \beta_3 D - \alpha_1 (B+D) [(A+C)^2 + (B+D)^2]\} = \mu P_2; \\ dC/dt = \mu \{-(a+b)D + \alpha_2 \beta_2 C + \alpha_2 \beta_3 A - \alpha_2 (A+C) [(A+C)^2 + (B+D)^2]\} = \mu P_3; \\ dD/dt = \mu \{(a+b)C + \alpha_2 E + \alpha_2 \beta_2 D + \alpha_2 \beta_3 B - \alpha_2 (B+D) [(A+C)^2 + (B+D)^2]\} = \mu P_4. \end{cases} \quad (5)$$

В системе (5) приняты следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{n_1(\omega_1^2 - n_2^2)}{8\alpha(\omega_1^2 - \omega_2^2)}; \quad \beta_1 = 4 \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \delta \frac{\omega_1^2 - n_1^2}{\omega_1^2 - n_2^2} \right); \quad \beta_3 = 4(1 + \delta);$$

$$\alpha_2 = \frac{n_1(n_2^2 - \omega_2^2)}{8\alpha(\omega_1^2 - \omega_2^2)}; \quad \beta_2 = 4 \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \delta \frac{\omega_2^2 - n_1^2}{\omega_2^2 - n_2^2} \right); \quad E = \frac{4E''}{pn_1}.$$

При составлении уравнений предполагалось, что все расстройки (между нормальными частотами и частотой внешней силы), а также амплитуда внешней силы имеют порядок μ , т. е. что

$$\omega_1 - p = -\mu a; \quad \omega_2 - p = -\mu(a+b); \quad E' = \mu E'',$$

где $(\omega_{1,2} - p)$ — величины одного порядка с $\omega_1 - \omega_2 = \mu b$.

В стационарном случае система (5) вырождается в систему алгебраических уравнений, из которой могут быть найдены „резонансные кривые“.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

Условием устойчивости решения является отрицательность вещественной части корней характеристического уравнения для системы (5). Характеристическое уравнение для нашей задачи может быть записано следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial A} - \lambda; & \frac{\partial P_1}{\partial B}; & \frac{\partial P_1}{\partial C}; & \frac{\partial P_1}{\partial D} \\ \frac{\partial P_2}{\partial A}; & \frac{\partial P_2}{\partial B} - \lambda; & \frac{\partial P_2}{\partial C}; & \frac{\partial P_2}{\partial D} \\ \frac{\partial P_3}{\partial A}; & \frac{\partial P_3}{\partial B}; & \frac{\partial P_3}{\partial C} - \lambda; & \frac{\partial P_3}{\partial D} \\ \frac{\partial P_4}{\partial A}; & \frac{\partial P_4}{\partial B}; & \frac{\partial P_4}{\partial C}; & \frac{\partial P_4}{\partial D} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

или же кратко:

$$A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0,$$

где коэффициенты A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 соответственно равны:

$$A_4 = 1;$$

$$A_3 = 2[\alpha_1(2R^2 - \beta_1) + \alpha_2(2R^2 - \beta_2)];$$

$$A_2 = [\alpha_1(\beta_1 - 2R^2) + \alpha_2(\beta_2 - 2R^2)]^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 R^4 - 2\alpha_1\alpha_2[(\beta_3^2 - \beta_1\beta_2) - 2R^2(2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2)] + a^2 + (a+b)^2;$$

$$A_1 = 6\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)(2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2)R^4 - 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_3^2 - \beta_1\beta_2)R^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2)R^2 + 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(\beta_3^2 - \beta_1\beta_2) + 2\alpha_2 a^2(2R^2 - \beta_2) + 2\alpha_1(a+b)^2(2R^2 - \beta_1);$$

$$A_0 = \alpha_1^2 \alpha_2^2 [(\beta_3^2 - \beta_1\beta_2) - 2R^2(2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2)]^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 (2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2)^2 R^4 + 2\alpha_1\alpha_2 a(a+b)(\beta_3 - R^2)(\beta_2 - 3R^2) + \alpha_1^2(a+b)^2(\beta_1 - R^2)(\beta_1 - 3R^2) + \alpha_2^2 a^2(\beta_2 - R^2)(\beta_2 - 3R^2)$$

(здесь $R^2 = (A+C)^2 + (B+D)^2$).

Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим практически

важный случай равенства собственных частот и затухания обоих контуров, т. е. положим $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. В этом случае расщепление нормальных частот определяется связью между контурами, и анализ устойчивости следует проводить в функции связи.

Значения параметров, при которых корни уравнения (6) имеют отрицательные вещественные части, можно найти, используя критерий Раута—Гурвица. Аналитическое исследование отрицательности корней в общем случае затруднительно ввиду сложности выражений для коэффициентов A_i ; поэтому в дальнейшем мы ограничимся анализом одного частного случая рассматриваемой задачи. Для этого выберем значения $\mu = 0,05$ и $\delta = 0,25$, что соответствует реальному двухконтурному автогенератору. Вычисляя теперь области устойчивости при различных значениях связи (т. е. при различных γ), попытаемся дать общую картину устойчивости процесса захватывания частоты в автоколебательной системе с двумя степенями свободы.

1. $\gamma = 0,05$. Проанализируем условия устойчивости, полученные на основании критерия Раута—Гурвица.

а) $A_3 > 0$. Подставляя в A_3 значения δ , получим:

$$R^2 > \beta/2 = 1,5.$$

На плоскости R^2 , а условие $A_3 = 0$ дает прямую, параллельную оси абсцисс и ограничивающую снизу область устойчивости (на рис. 2 неустойчивые области заштрихованы).

б) $A_2 > 0$. Уравнение $A_2 = 0$ является уравнением эллипса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left\{ R^2 - \frac{2}{3} \left[\beta - \frac{2\alpha_1\alpha_2(\beta_3 - \beta)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \right] \right\}^2}{k^2} + \frac{2}{3(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 = 1; \\ k^2 = \frac{2\alpha_1\alpha_2(\beta_3^2 - \beta^2)}{3(\alpha_1 + \alpha_2)^2} - \frac{\beta^2}{3} - \frac{b^2}{12(\alpha_1 + \alpha_2)^2} + \frac{4}{9} \left[\beta - \frac{2\alpha_1\alpha_2(\beta_3 - \beta)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \right]^2 \end{array} \right.$$

Центр эллипса $R^2 = (2/3) \left[\beta - \frac{2\alpha_1\alpha_2(\beta_3 - \beta)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \right]$; $a = -b/2$; его полуоси

$a' = k$, $b' = k(\alpha_1 + \alpha_2) \sqrt{3/2}$. Внутренняя часть эллипса отвечает условию неустойчивости решения. При выбранном значении γ уравнение $A_2 = 0$ не имеет положительных корней, и поэтому эллипс не существует.

в) $A_1 > 0$. Уравнение $A_1 = 0$ определяет кривую третьего порядка относительно переменных R^2 и a , симметричную относительно a ; ось симметрии (и точка максимума кривой) лежит при $a^0 = -a_1 b / (\alpha_1 + \alpha_2)$. Значение максимума при $\gamma = 0,05$ равно 1,58 и $a^0 = -0,52 b$, т. е. ось симметрии сдвинута от середины интервала между нормальными частотами; при увеличении связи этот сдвиг уменьшается. Поскольку сдвиг незначителен, он не нашел отражения на чертеже рис. 2а.

г) $A_0 > 0$. Условие $A_0 = 0$ дает кривую четвертого порядка относительно переменных R^2 и a , симметричную относительно расстройки a , причем ось симметрии проходит достаточно близко от значения $a = -0,5 b$. Для выбранного γ кривая $A_0 = 0$ разбивается на две замкнутые кривые, лежащие по разные стороны от оси симметрии. Области, ограниченные этими кривыми, представляют собой несколько деформированные эллипсы, внутренняя часть которых будет областью нахождения неустойчивых колебаний системы. „Эллипсы“ лежат вблизи расположения каждой из нормальных частот, абсциссы которых $a_1 = 0$ и $a_2 = -b$, и отличаются от областей неустойчивых колебаний в случае

сильного расщепления нормальных частот помимо деформации тем, что оси симметрии „эллипсов“ повернуты по часовой стрелке относительно системы координат R^2, a в первом квадранте и против часовой стрелки—во втором квадранте. Такое изменение вида областей устойчивости для случая слабой связи обусловлено взаимным влиянием близких нормальных частот.

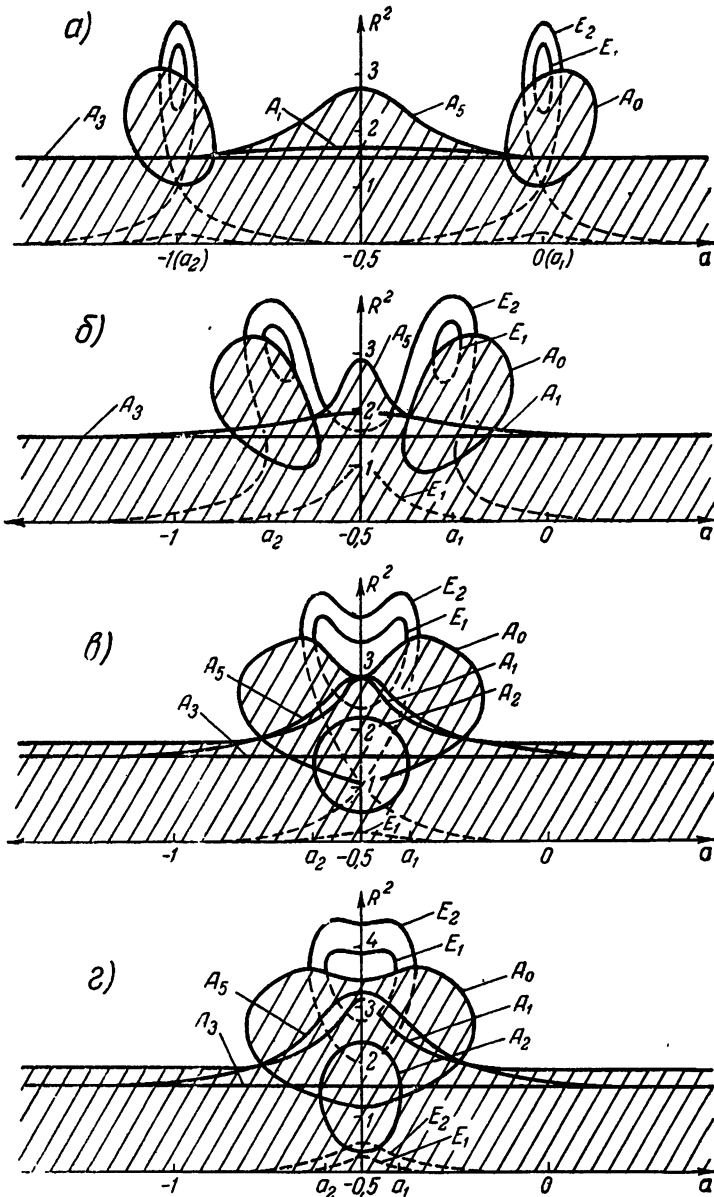


Рис. 2. Вид областей устойчивости и „резонансных“ кривых для значений связи:

а) $\gamma = 0,05$, б) $\gamma = 0,025$, в) $\gamma = 0,0125$, г) $\gamma = 0,01$.

д) $A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_0 A_3^2 = A_5 > 0$. Уравнение $A_5 = 0$ характеризует кривую пятого порядка относительно R^2 . Выясненный ранее характер кривых $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ и $A_0 = 0$ позволяет сделать ряд замечаний относительно особенностей кривой $A_5 = 0$.

Если $A_3 = 0$, то $A_5 \neq 0$ (так как $A_1 \neq 0$ в случае $A_3 = 0$). Отсюда следует, что кривая $A_5 = 0$ не пересекает прямой $A_3 = 0$.

Если $A_0 = 0$, то $A_5 = 0$ (при условии, что $A_1 = 0$ или $A_2 A_3 - A_1 = 0$). Поскольку кривая $A_1 = 0$ лежит выше прямой $A_3 = 0$, то и кривая $A_5 = 0$ тоже расположена над прямой $A_3 = 0$.

Для выбранной связи $\gamma = 0,05$ кривая $A_5 = 0$ обладает резко выраженным максимумом, лежащим на оси симметрии. Эта особенность, с учетом расположения кривой $A_5 = 0$, накладывает дополнительное ограничение на область неустойчивых колебаний, так как область внутри этой кривой отвечает условию неустойчивости решения. Максимум кривой $A_5 = 0$ является как бы разделом для колебаний с нормальными частотами. Поэтому, если частота внешней силы будет в одинаковой степени близка к нормальным частотам, то появление устойчивых колебаний с частотой внешней силы будет затруднено. (Возможность существования устойчивых колебаний зависит и от величины амплитуды внешней силы и от вида „резонансных“ кривых; поэтому окончательный вывод будет сделан позже.)

II. $\gamma = 0,025$. Рассмотрим характер изменения условий устойчивости при уменьшении расщепления нормальных частот.

а) Положение прямой $A_3 = 0$ сохраняется, так как ее уравнение не зависит от величины связи (рис. 2б).

б) Эллипс, отвечающий уравнению $A_2 = 0$, по-прежнему не существует.

в) Кривая A_1 , отвечающая уравнению $A_1 = 0$, сохраняет свой характер, однако уменьшение связи сказывается на увеличении максимума и на уменьшении сдвига оси симметрии от середины расстройки между нормальными частотами.

г) Условию $A_0 = 0$ опять соответствует наличие двух замкнутых кривых. Однако сблизившиеся нормальные частоты сильнее влияют друг на друга, и деформация эллипса в рассматриваемом случае значительно сильнее.

д) Кривая A_5 , отвечающая условию $A_5 = 0$, имеет тот же характер, но ее максимум несколько увеличивается.

III. $\gamma = 0,0125$. Проанализируем особенности условий устойчивости в случае критической связи для двух связанных контуров.

а) Уравнение $A_2 = 0$ описывает эллипс, который целиком лежит ниже кривой $A_5 = 0$, и поэтому не накладывает новых ограничений на области устойчивости (рис. 2б).

б) Кривая $A_1 = 0$ целиком лежит внутри $A_5 = 0$ и не влияет на характер областей устойчивости.

в) Условие $A_0 = 0$ определяет теперь одну кривую четвертого порядка на плоскости $R^2 a$. Область, ограниченная кривой $A_0 = 0$, представляет собой деформированный эллипс с вырезом в верхней части.

г) Кривая $A_5 = 0$ для выбранной связи не вносит, как раньше, ограничений на области устойчивости в интервале между нормальными частотами (так как лежит внутри кривой $A_0 = 0$). Однако при больших расстройках она сохраняет практически постоянное значение, которое больше, чем асимптота $A_3 = 0$, т. е. поднимает границу разделения областей устойчивых и неустойчивых колебаний. Критическая связь здесь характеризуется тем, что максимумы кривых $A_3 = 0$, $A_5 = 0$ и минимум значений R^2 на оси симметрии для кривой $A_0 = 0$ лежат в одной точке.

IV. $\gamma = 0,01$. Выбранное значение связи меньше, чем $\gamma_{кр}$; такое изменение связи приводит к тому, что наблюдается повышение асимптоты кривой $A_5 = 0$ и уменьшение деформации „эллипса“, отвечающего уравнению $A_0 = 0$. В остальном отличительные особенности кривых $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_5 = 0$ сохраняются (рис. 2а). Область, отвечаю-

щая условию неустойчивости колебаний с частотой внешней силы для генератора с одной степенью свободы при воздействии на него периодической внешней силы, ограничена эллипсом с центром (принимая во внимание введенные обозначения) $R_c^2 = 8/3$, $a_c = -1/2$ и полуосями $a' = 5/4$, $b' = 0,29$. Колебания неустойчивы также в области, лежащей ниже прямой $R^2 = 2$. При выбранной связи $\gamma = 0,01$ для генератора с двумя степенями свободы ордината асимптоты есть $R^2 = 1,9$ и „эллипс с вырезом“ характеризуется следующими параметрами (если заменить область, ограниченную кривой $A_0 = 0$, эллипсом, имеющим ту же максимальную величину расстройки и наиболее близко совпадающим с данной областью): $R_c^2 = 2,6$, $a_c = -1/2$, $a' = 1,4$, $b' = 0,33$. Сравнение областей устойчивости в этих двух случаях указывает на их значительное количественное и качественное сходство. С уменьшением связи это сходство будет усиливаться, и при $\gamma = 0$ вид областей, отвечающих условию неустойчивости решения, совпадает с видом областей для автогенератора с одной степенью свободы (ранее отмечалось, что значение связи $\gamma = 0$ соответствует случаю вырождения корней фундаментального уравнения (2)).

На основании анализа ряда частных случаев значений связи можно попытаться дать общую картину изменения областей, соответствующих условию неустойчивости решения, в зависимости от связи между контурами в трехмерном пространстве с осями R^2 , a и γ (см. рис. 3). Пусть γ меняется от 0 до $\gamma_{кр}$; тогда с увеличением связи

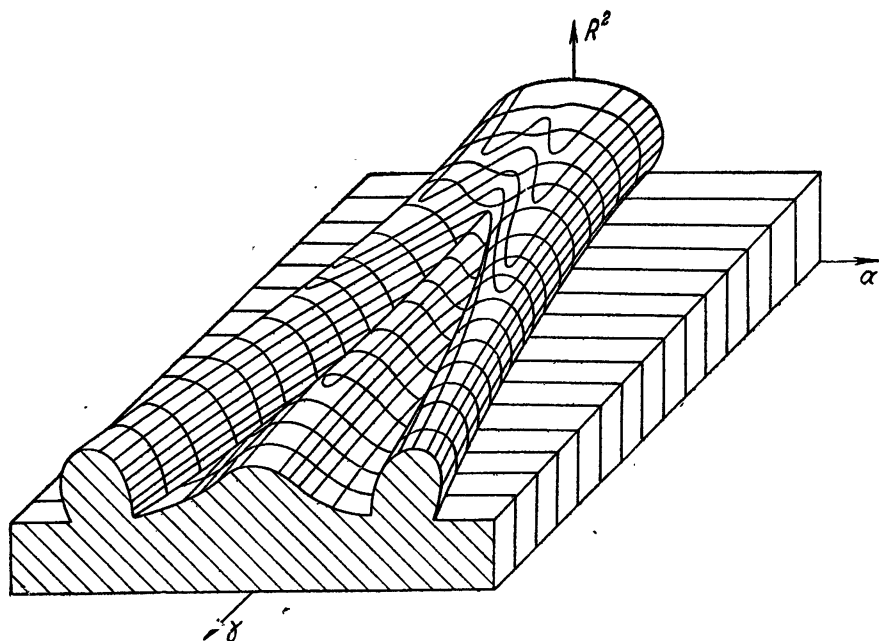


Рис. 3. Вид областей устойчивости при изменении связи между контурами.

в эллипсе, соответствующим значению $\gamma = 0$, появляется вырез, который растет по мере изменения γ ; при этом сам эллипс претерпевает все более сильную деформацию. Наряду с этим при увеличении γ уменьшается ордината прямой, параллельной оси расстроек a . Если $\gamma = \gamma_{кр}$, то минимум значения R^2 в вырезе „эллипса“ и максимум кривой $A_5 = 0$ лежат в одной точке. Когда значения γ больше, чем $\gamma_{кр}$, то максимум кривой $A_5 = 0$ начинает превосходить значение кривой $A_0 = 0$ на оси

симметрии. Увеличение связи вызывает деление „эллипса“, отвечающего уравнению $A_0=0$, на два сильно деформированных „эллипса“, лежащих по разные стороны от оси симметрии. Последующие изменения связи сильнее расщепляют нормальные частоты; поэтому они в меньшей степени влияют друг на друга, что приводит к уменьшению деформаций „эллипсов“. Ордината прямой, параллельной оси абсцисс, снижается до значения $R^2=1,5$ и затем при увеличении γ остается постоянной. Максимум кривой $A_5=0$ при движении по оси γ все время уменьшается. Дальнейшее увеличение связи вызовет появление тех областей неустойчивости, которые получаются в случае сильной связи.

4. „РЕЗОНАНСНЫЕ“ КРИВЫЕ

Уравнение для „резонансных“ кривых найдем из системы уравнений (5), взятой для стационарного случая. Если расщепление нормальных частот определяется только связью между контурами, уравнение „резонансных“ кривых имеет вид:

$$E^2=R^2\{k^2\tau^2+[2\alpha_1\alpha_2(\beta_3-\beta)k+(R^2-\beta)]^2\},$$

где

$$\tau=\alpha_1(a+b)+\alpha_2a; \quad k=-\frac{a(a+b)+\alpha_1\alpha_2(\beta_3-\beta)^2}{\tau^2+4\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_3-\beta)^2}.$$

Проанализируем вид „резонансных“ кривых для тех же значений γ , которые выбирались при исследовании характера областей устойчивости. Возьмем также конкретные значения приведенной амплитуды внешней силы $E_1=1$ и $E_2=2$. Для связи $\gamma=0,05$ „резонансные“ кривые обладают двумя резко выраженными максимумами, которые расположены вблизи нормальных частот. Таким образом, для выбранной связи существуют две разделенные области захватывания, соответствующие двум нормальным частотам (рис. 2а). Если расщепление нормальных частот уменьшается (рис. 2б), то провал между максимумами уменьшается и тем скорее, чем больше амплитуда внешней силы.

Выше отмечалось, что когда частота внешней силы в одинаковой мере близка к каждой из нормальных частот, то возможность возникновения устойчивых колебаний с частотой внешней силы затруднена из-за особенностей характера областей устойчивости. Действительно, для связи больше критической (когда максимум кривой $A_5=0$ является разделом между двумя областями захватывания) значения „резонансных“ кривых в провале наименьшие, что обуславливает разделение областей захватывания. Однако если выбрать связь, близкую к критической, то при увеличении E будет происходить слияние двух областей захватывания, существующих при малом E . Для значений γ меньше критической связи существует одна область захватывания для сколь угодно малых значений амплитуды внешней силы. Если при $E=0$ в случае критической связи провал между максимумами совсем исчезает, то при $E\neq 0$ он еще существует и уменьшается с уменьшением связи, причем ширина областей захватывания сокращается.

5. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальное исследование поведения генератора с двумя степенями свободы под воздействием внешней периодической силы проведено с помощью установки, блок-схема которой показана на рис. 4. Исследуемый автогенератор выполнен по схеме рис. 1. Собственная частота контуров генератора выбрана равной 170 кГц; варио-

метр позволяет изменять связь между контурами от значения $\gamma=0$ до $\gamma=0,1$. Для изучения спектра автоколебаний использован анализатор АСЧХ-1 (диапазон частот от 0 до 20 кгц) с предварительным преобразованием частоты исследуемого генератора (частота местного гетеродина 160–180 кгц).

На экране анализатора наблюдалась линия, соответствующая частоте автономных колебаний генератора, и одновременно с этим линия, соответствующая частоте внешнего воздействия. При сближении

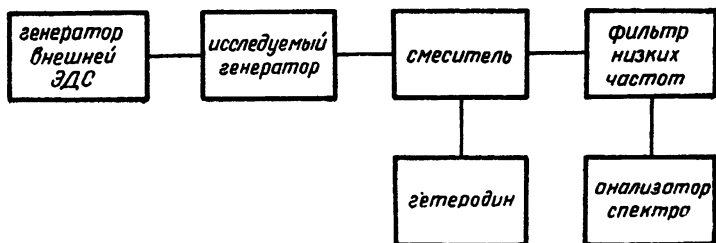


Рис. 4. Блок-схема установки для наблюдения процессов в автогенераторе с двумя степенями свободы при воздействии внешней силы.

частот наблюдалось явление полигармонических биений („развал спектра“), а затем переход к режиму захватывания частоты колебаний. При работе генератора на одной из нормальных частот и значительной связи наблюдалось явление заочного захватывания, если частота воздействия оказывалась близкой ко второй нормальной частоте. В этом случае генератор при включении внешнего воздействия продолжал работать уже на второй нормальной частоте. Области устойчивости при захватывании выяснялись непосредственно по экрану анализатора. Для некоторого постоянного значения E (амплитуда внешней силы) при изменении связи между контурами γ наблюдалось постепенное расширение полосы захватывания, а начиная с некоторого значения γ , зависящего от E , наблюдалось расщепление области захватывания (появление областей заочного захватывания). При дальнейшем увеличении связи каждая из областей захватывания уменьшалась по ширине, стремясь к некоторому пределу.

Аналогичные явления наблюдались и при изменении амплитуды воздействия E и фиксированных значениях связи: если при малых E существовали две области захватывания, то при увеличении внешней силы они расширялись, а затем сливались в одну.

Все наблюдавшиеся явления находят естественное объяснение на основе построенной теории и, в частности, следуют из вида областей устойчивости и „резонансных кривых“.

Рассмотрение слабого расщепления нормальных частот и „двойного резонанса“ позволяет найти области устойчивости при захватывании частоты. Полученные выражения для определения границ этих областей дают возможность выяснить, как меняются области, соответствующие условию неустойчивости решения, в зависимости от изменения величины связи между контурами. При увеличении связи каждая из областей неустойчивости, полученная таким методом, совпадает с областями, вытекающими из теории сильной связи. Для сколь угодно малых значений связи области неустойчивых колебаний столь же мало отличаются от областей для генератора с одной сте-

пению свободы. Аналогичное совпадение получено для „резонансных“ кривых. Результаты проведенного эксперимента дали хорошее совпадение с теоретическими. Представляется возможным качественное обобщение результатов на случай большого числа степеней свободы (путем сопоставления всех полученных кривых с резонансными кривыми для системы без обратной связи).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Г. Майер, Ученые записки ГГУ, вып. 6, 25 (1939).
2. И. Л. Берштейн, Е. И. Иконников, ЖТФ, 4, 172 (1934).
3. С. М. Рытов, ЖТФ, 5, 3 (1935).
4. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, изд. АН УССР, 1945.

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
12 декабря 1958 г.