ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том II, № 2 РАДИОФИЗИКА 1959

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛЮКТУАЦИИ В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В. П. Силин

Рассмотрен вопрос о флюктуациях электромагнитного поля в средах, где индукция и напряженность поля связаны произвольной, вообще говоря, нелокальной, линейной связью. Получены формулы, определяющие флюктуации поля в неограниченной изотропной среде. Выявлена роль продольных электромагнитных волн, возможность существования которых приводит к существенному уменьшению сингулярности в корреляционных формулах для напряженностей электромагнитного поля.

В теории электромагнитных флюктуаций [1–4], принимающей локальную связь между индукцией и напряженностью электромагнитного поля:

$$D_i(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega)E_j(\boldsymbol{r}), \qquad B_i(\boldsymbol{r}) = \mu_{ij}(\omega)H_j(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

корреляция случайных индукций оказывается также локальной. Некоторые следствия такой теории, нуждающиеся в дополнительном обсуждении, могут быть усмотрены из следующей формулы (см. [4], формула (90. 24)), определяющей флюктуации электромагнитного поля в неограниченной изотропной среде:

$$\left(E(\boldsymbol{r})E(\boldsymbol{r}')\right)_\omega = 2\hbar\,\mathrm{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left\{-\frac{\varepsilon''(\omega)}{|\varepsilon(\omega)|^2}\delta(\boldsymbol{R}) + \frac{i\omega^2}{Rc^2}\left[e^{-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon}R} - e^{-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon^*}R}\right]\right\}. \tag{2}$$

Левая часть формулы (2) связана со средним значением произведения компонент поля соотношением

$$\overline{E_i(\boldsymbol{r},\omega)E_j(\boldsymbol{r}',\omega')} = \left(E_i(\boldsymbol{r})\,E_j(\boldsymbol{r}')\right)_\omega \delta(\omega+\omega')\,. \tag{3}$$

При этом используются следующие обозначения: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$, $\varepsilon''(\omega)$ — мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости ($\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$), ω—частота электромагнитного поля (принимается зависимость от времени $e^{i\omega t}$, что соответствует $\varepsilon'' < 0$), T — температура, $\varkappa$ — постоянная Больцмана. При извлечении корня из $-\varepsilon$ реальная часть $\sqrt{-\varepsilon}$ должна быть больше нуля.

Одной из особенностей формулы (2) является наличие δ-функции перед членом, пропорциональным мнимой части диэлектрической проницаемости и приводящим к бесконечно большим флюктуациям электрического поля в поглощающих средах. Нетрудно убедиться, что такая сингулярность соответствует флюктуациям продольного поля.

Рытов [1], замечая, что фактически корреляция случайных индукций распространяется на атомные расстояния, использовал корреляционную функцию с отличным от нуля радиусом корреляции. Последнее позволяет устранить сингулярность в формуле (2), где именно эта корреляционная функция возникает вместо $\delta(\boldsymbol{R})$. Однако при этом остается еще одна особенность, соответствующая неограниченному росту флюктуаций продольного поля при стремлении частоты ω к частоте продольных колебаний, определяемой условием $\varepsilon(\omega)=0$.

На самом деле такое возрастание всегда ограничено потому, что диэлектрическая проницаемость является комплексной величиной, а одновременное обращение в нуль действительной и мнимой части ε практически невероятно. Физическая причина такого возрастания довольно проста. Дело в том, что условие $\varepsilon(\omega)=0$ является условием возможности продольных колебаний, причем получающаяся отсюда частота таких колебаний не зависит от волнового вектора. Следовательно, частоте продольных колебаний отвечает бесконечное число волн с любыми волновыми векторами. Последнее означает, что флюктуационное продольное поле с частотой продольных колебаний соответствует тепловому возбуждению бесконечного числа степеней свободы, что и приводит к сингулярности правой части формулы (2) как функции частоты при совпадении ω с частотой продольных колебаний. Легко понять, что такая особенность может быть устранена при использовании материальных уравнений, допускающих продольные электромагнитные волны, когда каждой частоте ω соответствует волна с вполне определенным волновым вектором $\boldsymbol{k}$. Для этого необходимо учитывать пространственную дисперсию электрического поля, например, в форме соотношения [5]:

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega)E_j + \delta_{ijkl}(\omega)\frac{\partial^2 E_j}{\partial x_k \partial x_l}. \tag{4}$$

Нетрудно усмотреть при этом аналогию с теорией термодинамических флюктуаций в критической точке [6] (§115).

Ниже мы рассмотрим, вообще говоря, общий случай пространственной дисперсии, когда индукции и напряженности электромагнитного поля связаны линейной интегральной нелокальной зависимостью (см., например, [7])*

$$\begin{aligned} D_i(\boldsymbol{r}) &= \int d\boldsymbol{r}' Q^D_{ij}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \omega) E_j(\boldsymbol{r}'); \\ B_i(\boldsymbol{r}) &= \int d\boldsymbol{r}' Q^B_{ij}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \omega) H_j(\boldsymbol{r}'). \end{aligned} \tag{5}$$

Вид ядер Q^D и Q^B может зависеть также от формы рассматриваемых тел.

Для изучения флюктуаций в правые части соотношений (5) нужно добавить случайные индукции соответственно электрического ($\boldsymbol{K}$) и магнитного ($\boldsymbol{L}$) полей. Следуя далее методу, изложенному в [4], нетрудно убедиться, что корреляция сторонних индукций определяется формулами:

$$\begin{aligned} (K_i(\boldsymbol{r})K_j(\boldsymbol{r}'))_\omega &= i\hbar\left[Q^D_{ij}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \omega) - Q^{D*}_{ji}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}; \omega)\right]\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}; \\ (L_i(\boldsymbol{r})L_j(\boldsymbol{r}'))_\omega &= i\hbar\left[Q^B_{ij}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \omega) - Q^{B*}_{ji}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}; \omega)\right]\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}; \\ (K_i L_j)_\omega &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Из соотношений (6) следует, что нелокальная корреляция случайных индукций обусловлена пространственной дисперсией. В связи с этим следует отметить, что упоминавшаяся выше процедура введения регулярной корреляционной функции должна сопровождаться одновременным изменением материальных уравнений поля.

* Электромагнитные флюктуации в таких средах рассматривались в работах [8, 9],

Формулы, аналогичные соотношениям (6), были получены Климонтовичем [8], Бассом и Кагановым [9]. При этом в работе [8] соответствующие корреляционные формулы для случайных индукций были получены в случае однородной среды на основании изучения микромодели газа свободных заряженных частиц (см. также [10]). В работе [9] были сформулированы корреляционные соотношения для случайных токов в том случае, когда плотность тока и напряженность электрического поля связаны линейной нелокальной связью. Это соответствует первому из наших материальных уравнений (5) и, естественно, приводит к корреляционной формуле для случайных плотностей токов, соответствующей первой из наших формул (6).

На основании таких корреляционных соотношений в [9] изучались корреляции случайных полей в изотропном и однородном неограниченном проводнике, для описания которого используется модель электронного газа*. Ниже мы также рассмотрим флюктуации электромагнитного поля в неограниченной изотропной среде. Однако при этом, во-первых, не будем использовать каких-либо конкретных модельных представлений, и поэтому, в частности, учтем случайные индукции магнитного поля, а во-вторых, уделим особое внимание роли продольных волн.

Для неограниченной изотропной среды ядра в соотношениях (5) являются функциями разности $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}$. Общий вид тензора Q может быть представлен следующим образом:

$$Q_{ij}(\boldsymbol{R})=\delta_{ij}Q_1(\boldsymbol{R})+\frac{\partial^2}{\partial R_i\partial R_j}Q_2(\boldsymbol{R}).$$

Для решения уравнений Максвелла удобно воспользоваться преобразованием Фурье**. При этом уравнения поля для фурье-компонент имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{c}{\omega}[\boldsymbol{kH}]=Q_1^D(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{E}-Q_2^D(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kE})+\boldsymbol{K};\\ -\frac{c}{\omega}[\boldsymbol{kE}]=Q_1^B(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{H}-Q_2^B\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kH})+\boldsymbol{L};\\ \boldsymbol{kK}-\{Q_1^D(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{k}^2Q_2^D(\boldsymbol{k},\omega)\}\boldsymbol{kE}=0;\\ \boldsymbol{kL}+\{Q_1^B(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{k}^2Q_2^B(\boldsymbol{k},\omega)\}\boldsymbol{kH}=0,\end{gathered}\tag{7}$$

а соотношения (6) приводят к следующим выражениям:

$$\begin{gathered}(K_i(\boldsymbol{k})K_j(\boldsymbol{k}'))_\omega=-\frac{2\hbar}{(2\pi)^3}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\{\delta_{ij}\operatorname{Im}Q_1^D(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j\operatorname{Im}Q_2^D(\boldsymbol{k},\omega)\};\\ (L_i(\boldsymbol{k})L_j(\boldsymbol{k}'))_\omega=-\frac{2\hbar}{(2\pi)^3}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\{\delta_{ij}\operatorname{Im}Q_1^B(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j\operatorname{Im}Q_2^B(\boldsymbol{k},\omega)\}.\end{gathered}\tag{8}$$

---

* Отметим, что использование такой модели может позволить определить флюктуации поля вблизи поверхности проводника в области аномального скин-эффекта, когда (см. [9]) радиус корреляции в радиочастотной области по порядку величины равен длине свободного пробега.

** $F(\boldsymbol{r})=\int e^{i\boldsymbol{kr}}F(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}$, $F(\boldsymbol{k})=(2\pi)^{-3}\int e^{-i\boldsymbol{kr}}F(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$, но $Q(\boldsymbol{k})=\int e^{-i\boldsymbol{kr}}Q(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$.

Из уравнений (7) получаем:

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{k^2-(\omega^2/c^2)Q_1^DQ_1^B}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}Q_1^B\boldsymbol{K}+\frac{\omega}{c}[\boldsymbol{kL}]-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kK})\frac{1-(\omega^2/c^2)Q_1^BQ_2^D}{Q_1^D-k^2Q_2^D}\right\};$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{k^2-(\omega^2/c^2)Q_1^DQ_1^B}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}Q_1^D\boldsymbol{L}-\frac{\omega}{c}[\boldsymbol{kK}]-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kL})\frac{1-(\omega^2/c^2)Q_1^DQ_2^B}{Q_1^B-k^2Q_2^B}\right\}. \tag{9}$$

Отсюда, учтя формулы (8), имеем:

$$(\mathcal{E}_i(\boldsymbol{k})\mathcal{E}_j(\boldsymbol{k}'))_\omega=-\frac{2\hbar}{(2\pi)^3}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\varphi_{ij}(\boldsymbol{k},\omega);$$

$$(H_i(\boldsymbol{k})H_j(\boldsymbol{k}'))_\omega=-\frac{2\hbar}{(2\pi)^3}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\psi_{ij}(\boldsymbol{k},\omega), \tag{10}$$

где

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{k_ik_j}{k^2}\frac{\operatorname{Im}(Q_1^D-k^2Q_2^D)}{|Q_1^D-k^2Q_2^D|^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(k^2\delta_{ij}-k_ik_j)\frac{[(\omega^2/c^2k^2)\,|Q_1^B|^2\operatorname{Im}Q_1^D+\operatorname{Im}Q_1^B]}{|k^2-(\omega^2/c^2)Q_1^DQ_1^B|^2}. \tag{11}$$

Соответствующая формула для ψ_{ij} получается из (11) заменой Q^B на Q^D и Q^D на Q^B.

Наконец, используя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\overline{E_i(\boldsymbol{r},\omega)E_j(\boldsymbol{r}',\omega')}=(E_i(\boldsymbol{r})E_j(\boldsymbol{r}'))_\omega\,\delta(\omega+\omega')=-2\hbar\delta(\omega+\omega')\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\Phi_{ij}(\boldsymbol{R},\omega), \tag{12}$$

где

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{R},\omega)=\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\varphi_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)e^{i\boldsymbol{kR}}.$$

Отметим, что первое слагаемое правой части формулы (11) соответствует корреляции продольного поля, в то время как второе слагаемое обусловлено поперечным полем. В связи с этим корреляционная формула для продольных полей может быть записана в виде:

$$(E_\parallel(\boldsymbol{r})E_\parallel(\boldsymbol{r}')_\omega=-2\hbar\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{kR}}\frac{\operatorname{Im}(Q_1^D-k^2Q_2^D)}{|Q_1^D-k^2Q_2^D|^2}. \tag{13}$$

Легко убедиться, что для $Q_1^D=\varepsilon$, $Q_2^D=0$ и $Q^B=1$ формула (12) совпадает с формулой (90. 23) книги [4], а также приводит к соотношению (2).

В качестве материального уравнения, допускающего продольные волны, используем, например, следующее [5]:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}+\alpha(\omega)\frac{c^2}{\omega^2}\Delta\boldsymbol{E}+\beta(\omega)\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}. \tag{14}$$

При этом для простоты будем считать, что α и β вещественны. Тогда вместо формулы (2) получаем:

$$(E(\boldsymbol{r})E(\boldsymbol{r}'))_\omega=-\frac{i\hbar}{4\pi R}\frac{\omega^2}{c^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left\{\frac{1}{\alpha+\beta}\left[\exp\left(-R\frac{\omega}{c}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{\alpha+\beta}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\exp\left(-R\frac{\omega}{c}\sqrt{-\frac{\varepsilon^*}{\alpha+\beta}}\right)\right]+\frac{2}{1+\alpha}\left[\exp\left(-R\frac{\omega}{c}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}\right)-\right. \tag{15}$$

$$-\exp\left(-R\frac{\omega}{c}\sqrt{-\frac{\varepsilon^*}{1+\alpha}}\right)\Bigg]\Bigg\}.$$

Первое слагаемое в фигурной скобке правой части (15) соответствует продольному полю, второе — поперечному. На это, в частности, указывает тот факт, что комплексный показатель преломления поперечных волн в среде, характеризующейся материальным уравнением (14), равен $n_\perp = n'_\perp + in''_\perp = \sqrt{\varepsilon/(1+\alpha)}$, а для продольных волн $n_\parallel = n'_\parallel + in''_\parallel = \sqrt{\varepsilon/(\alpha+\beta)}$ [5]. Последнее позволяет записать формулу (15) в виде:

$$(E(r)E(r'))_\omega = \frac{\hbar}{2\pi R}\frac{\omega^2}{c^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left\{\frac{\sin(Rn'_\parallel\omega/c)}{\alpha+\beta}e^{-Rn''_\parallel(\omega/c)} + 2\frac{\sin(Rn'_\perp\omega/c)}{1+\alpha}e^{-Rn''_\perp(\omega/c)}\right\}. \tag{16}$$

Для совпадающих r и r' получаем:

$$(E^2)_\omega = \frac{\omega^3\hbar}{2\pi c^3}\left\{\frac{2n'_\perp}{1+\alpha} + \frac{n'_\parallel}{\alpha+\beta}\right\}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}. \tag{17}$$

Отметим, что формула (17) не допускает перехода к пределу $\alpha+\beta\to 0$, который можно делать в формулах с $R \neq 0$. Это соответствует процедуре, которую оказывается необходимым проделывать и в теории без пространственной дисперсии. Именно, рассматривая неограниченную систему, сначала необходимо задать свойства среды (отсутствие поглощения или отсутствие пространственной дисперсии), а затем перейти к пределу бесконечных размеров среды.

Выражения (15)—(16), в отличие от соотношения (2), как этого и следовало ожидать, не содержат сингулярности вида $\delta(R)$. Кроме того, при стремлении комплексной диэлектрической проницаемости к нулю флюктуации продольного поля отнюдь не стремятся к бесконечности, а наоборот (также как и флюктуации поперечного поля) убывают. Все это, по-существу, достигается благодаря тому, что в отличие от продольных колебаний, имеющих место в теории без пространственной дисперсии, в нашем случае существуют продольные волны, которые естественно приводят к эффектам, во многом аналогичным возникающим от поперечных электромагнитных волн.

В заключение мне хотелось бы выразить признательность В. Л. Гинзбургу за внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Теория электрических флюктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
2. М. Л. Левин, ДАН СССР, **102**, 53 (1955).
3. Ф. В. Бункин, Диссертация, ФИАН, М., 1955.
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
5. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **34**, 1593 (1958).
6. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Статистическая физика, ГИТТЛ, М.-Л., 1951.
7. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, **34**, 1475 (1958); J. Lindhard, Mat. fys. Medd., **28**, № 8 (1954).
8. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ, **34**, 173 (1958).
9. Ф. Г. Басс, М. И. Каганов, ЖЭТФ, **34**, 1151 (1958).
10. В. Д. Шафранов, сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, **4**, изд. АН СССР, М., 416, 1958.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
2 января 1959 г.