

## О ВЗАЙМОДЕЙСТВИИ СИСТЕМЫ ОБЪЕКТОВ С ДВУМЯ УРОВНЯМИ С ПОЛЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И В РЕЗОНАТОРАХ

B. M. Файн

Показано, что для любой системы квантовых объектов, обладающих двумя энергетическими уровнями, можно ввести энергетический спин, аналогичный обычному спину. Уравнения движения энергетического спина аналогичны уравнениям для обычного спина и носят в основном классический характер. Найдено решение этих уравнений для системы объектов в резонаторе. Рассмотрены вопросы, связанные с квантовым характером движения энергетического спина. В связи с этим кратко рассмотрен вопрос о нетепловых шумах в масерах.

Вопрос о взаимодействии молекул, ядер, электронов в магнитном поле, а также других квантовых объектов, обладающих двумя энергетическими уровнями, с полем излучения приобретает в последнее время особую актуальность. Поэтому представляет интерес найти общий подход к этому вопросу. Такой подход оказывается возможным, если ввести некоторую новую характеристику системы—энергетический спин\*—величину, аналогичную обычному спину. В настоящей статье приводятся результаты такого рассмотрения.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим систему идентичных квантовых объектов, обладающих двумя энергетическими уровнями (для определенности будем говорить о молекулах). Пусть система молекул взаимодействует с полем излучения (собственным и внешним). Сейчас мы не будем рассматривать статическое взаимодействие между молекулами, влияние соударений и т. п. На этих вопросах мы остановимся ниже.

Гамильтониан системы молекулы + поле можно записать в виде:

$$H = \sum_j H_0^j + \sum_{\lambda} \frac{1}{2} (p_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2) - \frac{1}{c} \sum_j A(x_j) \frac{d\mu_j}{dt}. \quad (1)$$

Здесь  $H_0^j$  — гамильтониан свободной молекулы, имеющий собственные значения  $\hbar\omega_0/2$  и  $-\hbar\omega_0/2$ ;  $p_{\lambda}$  и  $q_{\lambda}$  — импульс и координата радиационного осциллятора;

$$A(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda}(x) q_{\lambda} \quad (2)$$

—вектор-потенциал электромагнитного поля;  $A_{\lambda}(x)$  — соответствующим образом нормированные векторные функции;  $\mu_j$  — дипольный момент

\* Эта величина, по существу, уже введена в [1, 2, 13]. В настоящей работе она получает несколько иное освещение, и более подробно дискутируются следствия, вытекающие из ее введения.

*j*-той молекулы (электрический или магнитный). Третий член в (1) представляет энергию взаимодействия между полем и молекулами\*.

В том случае, когда роль объектов с двумя энергетическими уровнями играют электроны в магнитном поле, энергия  $H_0^j$  и энергия взаимодействия обычным образом выражаются через спин электрона. Уравнения, описывающие движение системы электронов, суть уравнения для суммарного спина системы (или плотности спина) или для пропорционального спину системы магнитного момента, находящегося в магнитном поле. Поэтому пара- или ферромагнитные системы можно описывать (с огромной точностью) классическими уравнениями для магнитного момента в магнитном поле. В случае системы объектов с двумя уровнями без спина, на первый взгляд, кажется, что таких классических уравнений не существует. Однако мы сейчас покажем, что и в этом случае можно вывести уравнения, аналогичные уравнениям для магнитного момента в магнитном поле. Для этого введем новую величину—энергетический спин частицы\*\*. Энергетический спин частицы, как и обычный спин, есть вектор-оператор  $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$  в некотором пространстве  $R$ . Для электрона в магнитном поле, когда обычный спин совпадает с энергетическим, это пространство  $R$ , которое можно назвать „энергетическим“, совпадает с обычным трехмерным пространством. Компоненты вектора  $\mathbf{r}$  определяются перестановочными соотношениями

$$[r_1 r_2] = ir_3, \quad [r_2 r_3] = ir_1, \quad [r_3 r_1] = ir_2 \quad (3)$$

и тем, что в представлении, в котором  $r_3$  диагонально, компоненты  $r_1, r_2, r_3$  имеют вид:

$$r_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad r_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

С помощью этих компонент операторы  $H_0^j$  можно записать следующим образом:

$$H_0^j = \hbar\omega_0 r_{3j}; \quad \frac{1}{c} \frac{d\mu}{dt} = aI_j + e_1 r_{1j} + e_2 r_{2j} + e_3 r_{3j}, \quad (5)$$

где  $I_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , а индекс  $j$  означает, что операторы действуют на внутренние переменные, описывающие  $j$ -ю молекулу;  $a, e_1, e_2, e_3$  — константы, зависящие от типа молекулы. Используя равенства (2) и (5), можно переписать гамильтониан (1) в виде:

$$H = \hbar\omega_0 \sum r_{3j} + \sum_{\lambda} \frac{1}{2} (p_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2) - \sum_j \sum_{\lambda} A_{\lambda}(x_j) (aI_j + e_1 r_{1j} + e_2 r_{2j} + e_3 r_{3j}) q_{\lambda}. \quad (6)$$

Операторы  $r_1, r_2, r_3$  подчиняются перестановочным соотношениям (3); операторы  $p_{\lambda}, q_{\lambda}$  имеют отличные от нуля перестановки

$$[p_{\lambda} q_{\lambda}] = -i\hbar. \quad (7)$$

\* Обычно выражение для энергии взаимодействия записывается в виде  $-\sum_{cm} \frac{ep}{cm} A$ , однако  $\dot{\mu} = e\dot{x} = ep/m$ ; отсюда следует третий член в (1). При этом мы пренебрегаем членами порядка  $e^2 A^2 / mc^2$ . Можно показать, что в интересующем нас диапазоне частот эти члены дают пренебрежимо малый вклад в величину гамильтониана.

\*\* Совершенно аналогично вводится, как известно, изотопический спин.

Коммутаторы (4), (7) суть единственные отличные от нуля коммутаторы. Производная от оператора  $\hat{A}$  находится, как известно, по правилу

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}\hat{A}] + \frac{\partial\hat{A}}{\partial t}. \quad (8)$$

Используя уравнения (6), (3), (7) и (8), находим уравнения движения для операторов  $r$  и операторов поля:

$$\dot{r}_{1j} + \left[ \omega_0 - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}_j) \mathbf{e}_3 q_{\lambda} \right] r_{2j} + \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}_j) r_{3j} \mathbf{e}_2 q_{\lambda} = 0; \quad (9)$$

$$\dot{r}_{2j} - \left[ \omega_0 - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}_j) \mathbf{e}_3 q_{\lambda} \right] r_{1j} - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}_j) \mathbf{e}_1 r_{3j} q_{\lambda} = 0; \quad (10)$$

$$\dot{r}_{3j} = - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}_j) (\mathbf{e}_1 r_{2j} - \mathbf{e}_2 r_{1j}) q_{\lambda}; \quad (11)$$

$$\ddot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} = \sum_j \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}_j) (aI_j + \mathbf{e}_1 r_{1j} + \mathbf{e}_2 r_{2j} + \mathbf{e}_3 r_{3j}). \quad (12)$$

Далее мы будем рассматривать случай  $\mathbf{e}_3 = 0$ ;  $a = 0$ . Последнее равенство не является ограничением, так как  $a$  можно исключить, произведя каноническое преобразование над  $q_{\lambda}$ :

$$q_{\lambda} \rightarrow q'_{\lambda} + \frac{\sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}_j) aI_j}{\omega_{\lambda}^2}.$$

Равенство  $\mathbf{e}_3 = 0$  означает, что матрица  $d\mathbf{r}_j/dt$  имеет равные нулю диагональные элементы. Для многих объектов это является справедливым; кроме того, члены в скобках (9) и (10) с  $\mathbf{e}_3$  обычно малы по сравнению с  $\omega_0$ .

Все дальнейшие выводы могут быть легко обобщены на случай  $\mathbf{e}_3 \neq 0$ , но в целях простоты мы будем рассматривать случай  $\mathbf{e}_3 = 0$ .

В случае непрерывного распределения энергетических спинов можно ввести плотность  $s_1(\mathbf{x})$ ,  $s_2(\mathbf{x})$ ,  $s_3(\mathbf{x})$  спинов в данной точке  $\mathbf{x}$ . Полный спин системы при этом равен

$$R_1 = \int s_1(\mathbf{x}) dV; \quad R_2 = \int s_2(\mathbf{x}) dV; \quad R_3 = \int s_3(\mathbf{x}) dV. \quad (13)$$

Уравнения движения ( $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ ) и  $q_{\lambda}$  принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 + \omega_0 s_2 + \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_2 s_3 q_{\lambda} &= 0; \\ \dot{s}_2 - \omega_0 s_1 - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_1 s_3 q_{\lambda} &= 0; \\ \dot{s}_3 = - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}) (\mathbf{e}_1 s_2 - \mathbf{e}_2 s_1) q_{\lambda}; \\ q_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} &= \int \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{x}) (\mathbf{e}_1 s_1 + \mathbf{e}_2 s_2) dV. \end{aligned} \quad (14)$$

Это уравнения для операторов; усредняя их по соответствующему

квантово-механическому ансамблю, мы получаем те же уравнения (14) для средних величин\*. Последние являются классическими уравнениями, совершенно аналогичными соответствующим уравнениям для магнитного момента в магнитном поле. В том случае, когда частицы расположены в объеме, линейные размеры которого много меньше длины излучаемой волны, уравнения (14) переходят в уравнения для полного энергетического спина системы

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 + \omega_0 R_2 + \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda} e_2 R_3 q_{\lambda} &= 0; \\ \dot{R}_2 - \omega_0 R_1 - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda} e_1 R_3 q_{\lambda} &= 0; \\ \dot{R}_3 = -\frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda} (e_1 R_2 - e_2 R_1) q_{\lambda}; \\ \ddot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} &= A_{\lambda} (e_1 R_1 + e_2 R_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Решая эти уравнения для случая, когда молекулы находятся в свободном пространстве (нет резонатора), легко получить, в основном, все результаты, относящиеся к когерентному спонтанному излучению, имеющие классический характер\*\* и приведенные в работе Дика [¹] (см. также [²]). Уравнения (14) позволяют решить ту же задачу без ограничения размеров системы. Ниже мы рассмотрим некоторые решения уравнений (15) для случая системы молекул, взаимодействующих с полем излучения в резонаторе.

Остановимся кратко на вопросе о физическом смысле компонент энергетического спина. Уравнения для собственных функций операторов  $R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$  и  $R_3$  имеют вид [¹, ²]:

$$R^2 \psi_{rm} = r(r+1) \psi_{rm}; \quad R_3 \psi_{rm} = m \psi_{rm}; \quad |m| \leq r, \quad (16)$$

где  $m = (n_+ - n_-)/2$ ;  $n_+$  и  $n_-$  — соответственно населенности верхнего и нижнего уровней молекул. Таким образом, компонента  $R_3$  спина просто пропорциональна разности населенностей уровней, т. е. так называемому числу активных молекул. Собственные значения оператора  $R^2$  — квантовые числа  $r$  — дают верхнюю границу для числа  $m$ . Естественно, что  $r \leq n/2$ , где  $n$  — полное число молекул. Компоненты энергетического спина  $R_1$ ,  $R_2$  определяют интенсивность излучения. Дипольный момент системы может быть образован как линейная комбинация этих компонент. Все вышесказанное может быть перенесено на компоненты плотности энергетического спина  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ .

Интересно отметить, что выделенное направление в пространстве энергетических спинов создается наличием разности населенностей энергетических уровней молекул. Так, например, в состоянии теплового равновесия разность населенностей фиксирована. Это означает, что фиксировано направление З, и энергетический спин имеет только компоненту  $R_3$ . Нарушение теплового равновесия приводит к тому,

\* В случае большого числа частиц, что, вообще говоря, соответствует большим квантовым числам, с огромной точностью  $s_3 q_{\lambda} = s_{\lambda} q_{\lambda}$  и т. д.

\*\* Уравнения (14), (15) содержат постоянную Планка  $\hbar$ . Однако уравнения для обычного спина системы электронов в магнитном поле также содержат постоянную Планка. Классический характер рассматриваемых уравнений заключается в том, что эти уравнения для  $s$ -чисел и что квантовые флюктуации пренебрежимо малы (для систем из большого числа объектов). Конечно, называть уравнения (14), (15) классическими или не называть их так — это вопрос терминологии. Можно только сказать, что уравнения (14), (15) в той же мере классические, как и уравнения для обычного спина.

что появляются компоненты спина  $R_1$  и  $R_2$ . Если не учитывать соударений между молекулами и исходить из уравнений (15), можно легко показать, что  $R^2$  является интегралом движения (см. также [1, 2]). Процесс спонтанного излучения можно рассматривать как следствие прецессии вектора  $\mathbf{R}$  относительно направления 3. Максимальную интенсивность излучение достигает в том случае, когда  $\mathbf{R}$  перпендикулярен направлению 3. В этом случае  $R_3 = 0$ , а  $R_1$  и  $R_2$  имеют максимальные значения. Если объекты с двумя уровнями суть обычные спины в магнитном поле, то мы просто имеем прецессию магнитного момента относительно магнитного поля. В уравнениях (14) или (15) можно феноменологически учесть влияние соударений\* между молекулами и потерю в резонаторе. Для этого введем три константы:  $T_1$ ,  $T_2$  — продольное и поперечное времена релаксации и  $Q$  — добротность резонатора\*\*. Тогда, подобно тому, как это делается при написании блоховских уравнений, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 + \omega_0 s_2 + \frac{1}{T_2} s_1 + \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda}(x) e_2 s_3 q_{\lambda} &= 0; \\ \dot{s}_2 - \omega_0 s_1 + \frac{1}{T_2} s_2 - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda}(x) e_1 s_3 q_{\lambda} &= 0; \\ \dot{s}_3 = \frac{1}{T_1} (s_3^0 - s_3) - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda}(x) (e_1 s_2 - e_2 s_1) q_{\lambda}; \\ \ddot{q}_{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\omega_{\lambda}}{Q} \dot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} &= \int A_{\lambda}(x) (e_1 s_1 + e_2 s_2) dV. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $s_3^0$  — равновесное значение  $s_3$  (или, точнее говоря, мгновенное равновесное значение  $s_3$ , соответствующее мгновенному значению электромагнитного поля). Заметим, что при помощи уравнений (17) можно описывать процессы в молекулярных генераторах и масерах. В этих системах  $s_3^0$  нужно считать положительным, что соответствует состояниям с большим числом молекул на верхнем уровне. Функции  $A_{\lambda}$  при этом будут собственными функциями резонатора.

Остановимся теперь кратко на вопросе об учете статического и квазистатического взаимодействий между молекулами. Если считать, что принята калибровка потенциала  $\varphi = 0$ , то фактически все взаимодействия учтены в написанных уравнениях. Конкретный учет взаимодействия, связанного с производной от дипольного момента, проведен в работе [3]. Можно показать, что диполь-дипольное взаимодействие для случая изотропной и однородной системы молекул несущественно. В общем случае это взаимодействие можно учесть точно так же, как в парах или ферромагнетиках.

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОЛЕКУЛ С ПОЛЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим следующую задачу. Молекулы помещены в идеальный резонатор (добротность  $Q = \infty$ ). Необходимо найти, каким образом изменяются величины  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $q_{\lambda}$  (мы будем рассматривать случай, когда молекулы находятся в объеме много меньше  $\lambda^3$ ). Соударений сейчас учитывать не будем. В нашем случае  $A_{\lambda}(x)$  — собственные функции задачи о поле в резонаторе. Будем далее считать, что система

\* Здесь и далее под термином соударения будем понимать любые релаксационные процессы.

\*\* Если система находится в резонаторе. В свободном пространстве следует положить  $Q = \infty$ . Затухание из-за спонтанного излучения в уравнениях (17) учитывается,

молекул взаимодействует только с одним типом колебаний резонатора  $A_0$  (именно с тем, частота которого близка к частоте  $\omega_0$ ; влиянием остальных типов колебаний при этом можно пренебречь). Будем рассматривать сейчас случай  $t \ll T_1, T_2$ . Мы можем пользоваться системой уравнений (15). Вводим следующие обозначения и подстановки:

$$\frac{1}{\hbar} (A_0 e_1) = \alpha_1; \quad \frac{1}{\hbar} (A_0 e_2) = \alpha_2; \quad -\alpha_2 + i\alpha_1 = \alpha;$$

$$R_{\pm} = R_1 \pm iR_2 = r_{\pm} e^{\pm i\omega_0 t} \quad \text{или} \quad R_1 = \frac{1}{2} (r_+ e^{i\omega_0 t} + r_- e^{-i\omega_0 t}); \quad (18)$$

$$\dot{R}_2 = \frac{1}{2i} (r_+ e^{i\omega_0 t} - r_- e^{-i\omega_0 t}); \quad R_1^2 + R_2^2 = \frac{1}{2} (|r_+|^2 + |r_-|^2) = R^2 - R_3^2.$$

Уравнения (15) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{r}_+ &= \alpha q R_3 e^{-i\omega_0 t}; & \dot{r}_- &= \alpha^* q R_3 e^{i\omega_0 t}; \\ \dot{R}_3 &= -\frac{1}{2} (\alpha^* r_+ e^{i\omega_0 t} + \alpha r_- e^{-i\omega_0 t}) q; \\ \ddot{q} + \omega^2 q &= \frac{i\hbar}{2} [\alpha^* r_+ e^{i\omega_0 t} - \alpha r_- e^{-i\omega_0 t}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим сейчас ряд частных решений этой системы.

1) Пусть поле задано, т. е.  $q$ —известная функция времени; тогда для малых амплитуд колебаний  $r_+$  и  $r_-$  (вдали от резонанса) имеем:

$$R_3 \approx R; \quad r_{\pm} = r_{\pm}^0 + \frac{2}{\hbar} R \int_0^t V_{12}(t') e^{\mp i\omega_0 t'} dt, \quad (20)$$

где  $V_{12}(t) = \alpha q \hbar / 2$  и  $V_{21}(t) = \alpha^* q \hbar / 2$ —суть матричные элементы оператора энергии взаимодействия одной молекулы с полем в резонаторе.

2) Теперь рассмотрим случай резонанса ( $\omega_0 \approx \omega$ );  $q$ —опять заданная функция:  $q = q_0 \cos \omega t$ ;  $V_{21}(t) = V_{21} \cos \omega t$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{r}_+ &= \frac{V_{12}}{\hbar} R_3 e^{-i\delta t}; & \dot{r}_- &= \frac{V_{21}}{\hbar} R_3 e^{i\delta t}; & \delta &= \omega_0 - \omega; \\ \dot{R}_3 &= -\frac{1}{2\hbar} [V_{21} r_+ e^{i\delta t} + V_{12} r_- e^{-i\delta t}] \end{aligned} \quad (21)$$

Исключая  $r_+$  и  $r_-$ , получаем:

$$\ddot{R}_3 + \Omega_0^2 \dot{R}_3 = 0; \quad \Omega_0^2 = |V_{12}|^2 \hbar^{-2} + \delta^2 |V_{21}|^2 \hbar^{-2}. \quad (22)$$

Решая, получаем хорошо известное выражение [4, 8] ( $R_3$  пропорционально разности населенности уровней>):

$$R_3 = R_3(0) [ |V_{12}|^2 \hbar^{-2} \cos \Omega_0(t - t_0) + \delta^2] \Omega_0^{-2}.$$

3) Рассмотрим теперь случай строгого резонанса, однако при этом будем считать, что колебание  $q$  модулировано по амплитуде

$$q = q_0(\ell) \cos \omega_0 t. \quad (23)$$

Мы, естественно, предполагаем, что изменение  $q_0(\ell)$  происходит

достаточно медленно. В этом случае оказывается возможным найти решение для  $r_{\pm}$ ,  $R_3$ ,  $q$ , удовлетворяющее уравнениям (19). Для простоты выберем такое представление, когда

$$V_{12} = V_{21} = \alpha q h / 2 = V \quad (\alpha^* = \alpha).$$

В этом случае

$$V(t) = V_0(t) \cos \omega_0 t = \frac{\alpha q_0(t)}{2} h \cos \omega_0 t.$$

Уравнения (19) принимают вид:

$$r_+ = r_- = r; \quad \dot{r} = V_0 R_3 / h; \quad \dot{R}_3 = -Vr/h; \quad (24)$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = -h \alpha r \sin \omega_0 t. \quad (25)$$

Исключая  $r$  из уравнений (24), находим

$$\ddot{R}_3 - \frac{\dot{V}_0}{V_0} \dot{R}_3 + \frac{V_0^2}{h^2} R_3 = 0.$$

Это уравнение имеет решение

$$R_3 = R \cos \Theta; \quad \Theta = \int_{t_0}^t \frac{V_0}{h} dt + \Theta_0. \quad (26)$$

Далее находим  $r = -h \dot{R}_3 / V = R \sin \Theta$ . Подставляя  $q$  в виде (23) в уравнение (25) и пренебрегая второй производной  $\ddot{q}_0$  (медленные изменения  $q_0$ !), получаем:

$$2 \dot{q}_0 \omega_0 = h \alpha R \sin \Theta, \quad (27)$$

Из уравнения (26) находим  $q_0 = 2 \dot{\Theta} / \alpha$  и подставляем в (27):

$$\ddot{\Theta} - \frac{h \alpha^2}{4 \omega_0} R \sin \Theta = 0. \quad (28)$$

Это уравнение физического маятника; для приведения его к обычной форме нужно произвести замену  $\Theta = \Theta_1 + \pi$ . Это же уравнение можно получить, написав закон сохранения энергии для системы поле + молекулы

$$\frac{\omega_0^2 q_0^2}{2} + h \omega_0 R \cos \Theta = E = \text{const}$$

и продифференцировав это соотношение по времени.

Если же существует диссипация энергии благодаря потерям в резонаторе, то баланс энергии можно записать в виде

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0^2 q_0^2}{2} \frac{\omega_0}{Q}.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\ddot{\Theta} + \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{Q} \dot{\Theta} - \frac{\alpha^2 h R}{4 \omega_0} \sin \Theta = 0. \quad (29)$$

Это же уравнение можно получить, исходя из последнего уравнения (17), в котором уже введен член с затуханием, и предполагая, что затухание за один период колебания поля мало ( $Q \gg 1$ ). Таким образом, мы получили уравнение физического маятника с вязким трением. Если молекулы в начальный момент находятся в возбужденном состоянии

( $\Theta \neq \pi$ ), то затем молекулы переходят в состояние равновесия ( $\Theta = \pi$ ) и возбуждают поле в резонаторе, поле, в свою очередь, возбуждает молекулы и т. д., пока весь процесс не затухнет. Если в начальный момент в резонаторе возбуждено достаточно мощное поле, то вектор  $R$  помимо прецессии может совершать вращение, определяемое углом  $\Theta$ . Этот случай соответствует эффекту излучения в сильном высокочастотном поле, разобранном в [6]. Заметим, что в [6, 7] не учитывалась обратная реакция поля (т. е. в уравнении (29)  $\ddot{\Theta}$  положена равной нулю). В результате вместо описанного выше движения получилось монотонное падение вектора  $R$ . В [6], кроме того, рассмотрен случай, когда электромагнитное поле действует в резонансе на магнитную систему (с учетом обратной реакции поля); однако рассмотрение было ограничено малыми колебаниями магнитного момента, что в случае резонанса, вообще говоря, незаконно.

### 3. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ. ИЗЛУЧЕНИЕ ОДНОЙ МОЛЕКУЛЫ

При квантовом расчете взаимодействия молекул с полем в резонаторе в ряде работ ([8–10] и др.) пользуются понятием вероятности перехода в единицу времени\* (коэффициентами Эйнштейна) и составляют соответствующее уравнение баланса. Мы сейчас покажем, что такой подход в данном случае неправилен. Для выяснения сущности вопроса рассмотрим следующую задачу. Молекула с двумя уровнями находится в резонаторе с потерями, собственная частота которого совпадает с частотой

$$\omega_0 = (E_+ - E_-)/\hbar, \quad (30)$$

где  $E_+$ ,  $E_-$ —энергетические уровни молекулы ( $E_+ > E_-$ ).

Заменяя резонатор эквивалентным контуром, можно написать следующий гамильтониан системы молекула+поле+стенки резонатора:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (p^2 + \omega_0^2 q^2) + H_0 + V + H_R + \frac{p Q_R}{\sqrt{C}}. \quad (31)$$

В работе [8] исходный гамильтониан имеет такой же вид. Однако последовательное применение аппарата квантовой теории приводит, как мы покажем, совсем к другим выводам, чем те, к которым пришел автор работы [8]. В формуле (31)  $H_0$ —оператор энергии молекулы (собственные значения  $E_+$ ,  $E_-$ ),  $V$ —энергия взаимодействия между молекулой и полем,  $H_R$ —гамильтониан, описывающий стенки резонатора (собственные значения этого гамильтониана образуют почти непрерывный спектр), последний член описывает взаимодействие между полем и стенками резонатора ( $Q_R$ —функция координат и импульсов частиц, образующих стенки резонатора,  $C$ —емкость конденсатора эквивалентного контура). Найдем сначала собственные функции и собственные значения энергии гамильтониана системы молекула + поле

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) + H_0 + V. \quad (31a)$$

Собственные функции этого гамильтониана ищем в виде суперпозиции

$$\psi = C_1 \psi_1^0 + C_2 \psi_2^0; \quad \psi_1^0 = \Phi_1 \psi_-; \quad \psi_2^0 = \Phi_0 \psi_+,$$

где  $\psi_+$ ,  $\psi_-$ —собственные функции оператора  $H_0$ , а  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ —собственные функции оператора энергии гармонического осциллятора ( $\Phi_0$  со-

\* Эта величина считается постоянной,

отвечает отсутствию фотона,  $\Phi_1$  — наличию одного фотона). Функции  $\psi_1^0$  и  $\psi_2^0$  соответствуют одной и той же энергии, равной  $E_- + h\omega_0 = E_+ = \xi$ . Наличие взаимодействия снимает это вырождение. Вместо функций  $\psi_1^0$  и  $\psi_2^0$  легко получить собственные функции  $\tilde{H}_0$ :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^0 + \psi_2^0); & E_1 &= \xi + |V_{12}|; \\ \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^0 - \psi_2^0); & E_2 &= \xi - |V_{12}|.\end{aligned}$$

Здесь  $E_1, E_2$  — собственные значения энергии гамильтониана  $\tilde{H}_0$ ,  $V_{12}$  — матричный элемент оператора  $V$ , найденный с помощью функций  $\psi_1^0$  и  $\psi_2^0$ . Кроме того, с точностью до членов порядка  $|V_{12}|/\hbar\omega$  собственной функцией оператора  $\tilde{H}_0$  будет функция  $\psi_0 = \Phi_0 \psi_-$ . Этой функции соответствует основной уровень энергии  $E_0 = E_- = \xi - h\omega_0$ .

Найдем теперь решение уравнения Шредингера

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_0 \psi$$

с начальным условием, соответствующим нахождению молекулы в состоянии с энергией  $E_+$  и отсутствию фотонов в поле излучения. Такое решение, как легко убедиться, имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi_1 e^{\frac{i}{\hbar}(\xi + |V_{12}|)t} - \psi_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\xi - |V_{12}|)t} \right] = \\ &= e^{\frac{i\xi t}{\hbar}} \left\{ i \sin \frac{Vt}{\hbar} \psi_1^0 + \cos \frac{Vt}{\hbar} \psi_2^0 \right\} (V = |V_{12}|).\end{aligned}\quad (32)$$

Таким образом, как видно из решения, энергия периодически (с частотой  $V/\hbar$ ) переходит от молекулы к полю и обратно. Ситуация здесь совершенно аналогична той, которая имеет место для двух слабо связанных одинаковых маятников. При малых  $t$  вероятность того, что молекула перейдет на нижний уровень, равна  $V^2 t^2 \hbar^{-2}$ , т. е. в данном случае не существует постоянной вероятности перехода на единицу времени.

Решение (32) соответствует взаимодействию молекулы с идеальным резонатором\*. Учтем теперь потери в стенках. Для этого нужно исходить из гамильтониана (31)

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + H_R + p Q_R / \sqrt{C}. \quad (31a)$$

Решение уравнения Шредингера, соответствующего этому гамильтониану, ищем в виде:

$$\psi = b_{1R_0} \psi_1 \Phi_{R_0} + b_{2R_0} \psi_2 \Phi_{R_0} + \sum_R b_{0R} \psi_0 \Phi_R.$$

Здесь  $\Phi_R$  — собственные функции гамильтониана  $H_R$ ,  $\Phi_{R_0}$  — собственная функция основного состояния. Используя обычную методику (см., например, [11]), получим уравнения для амплитуд вероятности  $b$ :

\* Или рассмотрению за время, много меньшее времени затухания поля в резонаторе.

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{b}_{1R_0} &= \sum_R H'^* b_{0R} e^{-i(\omega_0 - \omega_R)t} e^{-iVt/\hbar}; \\ i\hbar \dot{b}_{2R_0} &= \sum_R H'^* b_{0R} e^{-i(\omega_0 - \omega_R)t} e^{iVt/\hbar}; \end{aligned} \quad (33)$$

$$i\hbar \dot{b}_{0R} = H' e^{i(\omega_0 - \omega_R)t} (b_{1R_0} e^{iVt/\hbar} + b_{2R_0} e^{-iVt/\hbar}),$$

где

$$H' = H_{0R/1R_0} = H_{0R/2R_0} = \frac{1}{\sqrt{2C}} p_{01}(Q_R)_{RR_0};$$

$$p_{01} = \int \Phi_0^* p \Phi_1 dq; \quad \omega_R = \frac{(E_R - E_{R_0})}{\hbar};$$

$E_R$ ,  $E_{R_0}$  — собственные значения оператора  $H_R$ . Начальные условия (соответствующие возбужденной молекуле) имеют вид:

$$b_{1R_0}(0) = 1/\sqrt{2}; \quad b_{2R_0}(0) = -1/\sqrt{2}; \quad b_{0R}(0) = 0. \quad (34)$$

Делаем подстановку  $v = b_{1R_0} \exp(iVt/\hbar) - b_{2R_0} \exp(-iVt/\hbar)$  и после несложных преобразований получаем вместо системы (33) уравнения:

$$\ddot{v} + \frac{V^2}{\hbar^2} v = \frac{2V}{\hbar^2} \sum_R H'^* b_{0R_0} e^{-i(\omega_0 - \omega_R)t}; \quad (35)$$

$$b_{0R_0} = -\frac{H'}{V} \int_0^t e^{i(\omega_0 - \omega_R)t} \dot{v} dt. \quad (36)$$

Начальным условиям (34) соответствуют начальные условия

$$v(0) = \sqrt{2}; \quad \dot{v}(0) = 0. \quad (37)$$

Предположим теперь, что в формуле (36)  $\dot{v}$  можно вынести из-под знака интеграла; несколько ниже, найдя при этом условии из уравнения (35)  $v$ , мы убедимся, что такое предположение оправдано. Таким образом,

$$b_{0R_0} = -\frac{H'}{V} \dot{v} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega_R)t} - 1}{i(\omega_0 - \omega_R)}. \quad (36a)$$

Подставляем в (35) и получаем

$$\ddot{v} + \frac{V^2}{\hbar^2} v + \gamma \dot{v} = 0, \quad (38)$$

где

$$\gamma = \sum_R \frac{2|H'|^2}{\hbar^2} \frac{1 - e^{-i(\omega_0 - \omega_R)t}}{i(\omega_R - \omega_0)}. \quad (39)$$

При  $t \gg 1/\omega_0$  эта сумма не зависит от времени. Заметим, что выражение (39) содержит только величины, характеризующие резонатор; поэтому можно считать, что  $\gamma = \omega_0/Q$ . Решение уравнения (38) имеет вид

$$v = C_1 \exp(\beta_1 t) + C_2 \exp(\beta_2 t),$$

где

$$\beta_{1,2} = -\gamma/2 \pm \sqrt{(\gamma/2)^2 - V^2 \hbar^{-2}}.$$

При условии

$$|\beta_{1,2}| \ll \omega_0 \quad (40)$$

величины (36) и (36а) совпадают. Следовательно, принятное нами приближение оправдано, если выполняется условие (40). Это условие обычно выполняется, так как в противном случае вообще не имеет смысла говорить об излучении частоты  $\omega_0$ . Если ввести теперь амplitуды вероятности  $a_+$  и  $a_-$  соотношениями

$$a_+ = b_{+0_\lambda}; \quad a_- = b_{-1_\lambda}$$

(первый индекс указывает состояние молекулы, второй — состояние поля излучения частоты  $\omega_0$ ), то нетрудно получить, что

$$a_+ = v/\sqrt{2}; \quad a_- = \hbar \dot{v}/iV\sqrt{2}.$$

Рассмотрим теперь два случая.

1)  $\gamma^2 \ll 4V^2\hbar^{-2}$ , т. е. затухание поля мало за время перехода энергии молекулы в энергию поля. В этом случае (используем начальные условия (37))

$$v = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right) \cos\left(\frac{V}{\hbar} t\right),$$

и вероятности „излучить фотон“ и не излучить его соответственно равны

$$|a_-|^2 = \exp(-\gamma t) \sin^2\left(\frac{V}{\hbar} t\right); \quad |a_+|^2 = \exp(-\gamma t) \cos^2\left(\frac{V}{\hbar} t\right).$$

2)  $\gamma^2 \gg 4V^2\hbar^{-2}$ , т. е. затухание поля в резонаторе велико. Тогда

$$v = \frac{\sqrt{2}}{\gamma - V^2/\gamma\hbar^2} \left[ \gamma \exp\left(-\frac{V^2}{\gamma\hbar^2} t\right) - \frac{V^2}{\gamma\hbar^2} \exp(-\gamma t) \right] \approx \sqrt{2} \left[ \exp\left(-\frac{V^2}{\gamma\hbar^2} t\right) - \frac{V^2}{\gamma^2\hbar^2} \exp(-\gamma t) \right];$$

$$|a_-|^2 = \frac{V^2}{\hbar^2\gamma^2} \left[ \exp(-\gamma t) - \exp\left(-\frac{V^2}{\gamma\hbar^2} t\right) \right]^2;$$

$$|a_+|^2 = \left[ \gamma \exp\left(-\frac{V^2}{\gamma\hbar^2} t\right) - \frac{V^2}{\gamma\hbar^2} \exp(-\gamma t) \right]^2 \frac{1}{(\gamma - V^2/\gamma\hbar^2)^2} \approx \exp\left(-\frac{2V^2}{\gamma\hbar^2} t\right).$$

В обоих случаях  $|a_-|^2$  играет роль вероятности излучения фотона, и, как видно из формул, вводить понятие постоянной вероятности перехода в единицу времени здесь не имеет смысла.

Автор работы [8] в результате некорректного оперирования понятием вероятности перехода в единицу времени пришел к неверным соотношениям, определяющим зависимость энергии системы от времени. Аналогичные ошибки допущены в статьях [9, 10] и др.

#### 4. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ. ИЗЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ МОЛЕКУЛ

Перейдем теперь к вопросу об излучении системы молекул. Состояния системы молекул можно характеризовать квантовыми числами  $r$  и  $m$  — абсолютной величиной энергетического спина и проекцией его на ось  $R_3$  (см. [1, 2]). Пусть система молекул находится в состоянии с определенными значениями  $r$  и  $m$ , а излучение в резонаторе от-

существует. Найдем вероятность того, что появится один фотон в резонаторе, т. е. вероятность спонтанного излучения. Как обычно, исходим из уравнения Шредингера для амплитуд вероятности

$$-i\hbar \dot{b}_n = \sum_m H'_{nm} b_m e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t}. \quad (41)$$

Матрица  $H'_{nm}$  для случая излучения фотона из состояния вакуума имеет вид

$$H'_{nm} = H'_{rm_0\lambda | r'm'\lambda} = \begin{cases} H'_{+-} \sqrt{(r+m)(r-m+1)} & (m'=m-1; r=r') \\ H'_{-+} \sqrt{(r-m)(r+m+1)} & (m'=m+1; r=r') \\ 0 & (\text{в остальных случаях}) \end{cases}. \quad (42)$$

Здесь  $H'_{+-}$  и  $H'_{-+}$  — матричные элементы переходов  $E_+ \leftrightarrow E_-$  для изолированной молекулы; предполагается, что размеры системы молекул много меньше длины излучаемой волны. Формулу (42) нетрудно получить из гамильтониана (6). Если в начальный момент  $t=t_0$   $b_{rm_0\lambda}=1$  и  $b_n=0$  ( $n \neq r, m_0\lambda$ ), то, предполагая, что собственная частота резонатора совпадает с  $\omega_0 = (E_+ - E_-) \hbar^{-1}$ , из уравнений (41) — (42) нетрудно получить вероятность излучения фотона

$$|b_{rm_0\lambda}|^2 = |H'_{+-}|^2 \hbar^{-2} (r+m)(r-m+1)(t-t_0)^2. \quad (43)$$

Эта формула справедлива при следующих предположениях:

$$|b_{rm_0\lambda}|^2 \ll 1; \quad t-t_0 \ll 1/\gamma = Q/\omega_0, \quad (44)$$

где  $Q$  — добродетельность резонатора, в котором находится система молекул.

Заметим, что при  $m=r=n/2$  (все  $n$  молекул на верхнем уровне) формула (43) совпадает с формулой, полученной в работе [12]. Из (43) находим, что средняя энергия поля изменяется по закону

$$E(t-t_0) = \hbar\omega_0 |H'_{+-}|^2 \hbar^{-2} (r+m)(r-m+1)(t-t_0)^2. \quad (43a)$$

Получим теперь выражение для  $E$  с помощью классического уравнения (29). При его выводе нас не будут больше ограничивать условия (44). Уравнение (29) можно записать в виде:

$$\ddot{\Theta} + (\gamma/2) \dot{\Theta} - 2R |H'|^2 \hbar^{-2} \sin(\bar{\Theta} + \varphi) = 0. \quad (29a)$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\alpha^2 = 8 |H'|^2 \hbar^{-2} \omega_0 \quad (|H'|^2 = |H'_{+-}|^2), \quad (45)$$

которое нетрудно получить из формул (29) и из выражения для матричного элемента  $q_{01} = \sqrt{\hbar/2\omega}$ . Под  $\varphi$  в формуле (29а) мы подразумеваем малое изменение угла  $\Theta$  вблизи  $\bar{\Theta}$ . Заметим, что условие  $|\varphi| \ll 1$ , которое мы здесь принимаем, вообще говоря, не сводится к условиям (44) и гораздо шире их. При малых  $\varphi$  уравнение (29а) переходит в уравнение

$$\ddot{\varphi} + (\gamma/2) \dot{\varphi} - 2R |H'|^2 \hbar^{-2} \varphi \cos \bar{\Theta} = 2R |H'|^2 \hbar^{-2} \sin \bar{\Theta}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t = t_0) = 0; \quad \dot{\varphi}(t = t_0) = A,$$

имеет вид:

$$\varphi = -\operatorname{tg} \bar{\Theta} + \frac{\beta_2 \operatorname{tg} \bar{\Theta} - A}{\beta_2 - \beta_1} e^{\beta_1(t-t_0)} + \frac{A - \beta_1 \operatorname{tg} \bar{\Theta}}{\beta_2 - \beta_1} e^{\beta_2(t-t_0)}; \quad (46)$$

$$\dot{\varphi} = \beta_1 \frac{\beta_2 \operatorname{tg} \bar{\Theta} - A}{\beta_2 - \beta_1} e^{\beta_1(t-t_0)} + \beta_2 \frac{A - \beta_1 \operatorname{tg} \bar{\Theta}}{\beta_2 - \beta_1} e^{\beta_2(t-t_0)}, \quad (47)$$

где

$$\beta_1 = -\gamma/2 - \sqrt{(\gamma/\varepsilon)^2 + 2R|H'|^2 \cos \bar{\Theta} \hbar^{-2}}; \quad (48)$$

$$\beta_2 = -\gamma/2 + \sqrt{(\gamma/2)^2 + 2R|H'|^2 \cos \bar{\Theta} \hbar^{-2}}.$$

Воспользовавшись равенствами (31а) и (45), находим выражения для амплитуды поля и энергии поля:

$$q_0 = \hbar \sqrt{\hbar/2\omega_0} |H'|^{-1} \dot{\varphi}; \quad (49)$$

$$E = \frac{\omega_0^2 q_0^2}{2} = \frac{1}{4} \hbar \omega_0 \frac{\hbar^2}{|H'|^2} \dot{\varphi}^2. \quad (50)$$

Если в начальный момент поле отсутствует ( $q_0 = 0$  при  $t = t_0$ , т. е.  $A = 0$ ), то выражение (50) для  $E$  дает энергию „спонтанного“ излучения\*. Для промежутков времени, удовлетворяющих условию (44), из равенств (47), (48) и (50) находим

$$E = \hbar \omega |H'|^2 \hbar^{-2} R^2 \sin^2 \bar{\Theta} (t - t_0)^2. \quad (51)$$

Для того, чтобы получить соответствие между формулами (51) и (43а), необходимо положить

$$r = R; \quad \sin^2 \bar{\Theta} = (r + m)(r - m + 1)r^{-2}. \quad (52)$$

Определяя таким образом угол  $\bar{\Theta}$ , мы фактически выходим за рамки классической теории, так как, согласно (52), существует минимальный угол\*\*

$$\sin^2 \bar{\Theta}_{\min} \approx \bar{\Theta}_{\min}^2 = 2/R, \quad (53)$$

который возникает вследствие соотношения неопределенности между компонентами спина

$$\begin{aligned} & \langle \Delta R_1^2 \rangle < \Delta R_2^2 \rangle \geq R_3^2 \approx R^2; \\ & \langle \bar{\Theta}^2 \rangle \approx \langle \Delta R_1 \rangle^2 R^{-2} \approx \langle A R_2 \rangle^2 R^{-2} \sim 1/R. \end{aligned} \quad (54)$$

Таким образом, энергия поля излучения имеет вид:

$$E = \frac{1}{4} \hbar \omega_0 \hbar^2 / |H'|^2 \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)^2} [\beta_1 (\beta_2 \operatorname{tg} \bar{\Theta} - A) e^{\beta_1(t-t_0)} + \beta_2 (A - \beta_1 \operatorname{tg} \bar{\Theta}) e^{\beta_2(t-t_0)}]^2, \quad (55)$$

\* По крайней мере для малого отрезка времени вблизи  $t_0$ . Дело в том, что через некоторое время в резонаторе появляется поле излучения, которое само влияет на переходы.

\*\* Такое определение минимального угла приводит к правильному результату для времени релаксации из-за спонтанного излучения в свободном пространстве для переходов из высшего энергетического состояния  $r = m$  в любое другое (см. [2], формулы (2. 79) и (2. 796) при  $r \gg 1$ ).

где  $A = |H'| \sqrt{2 \omega_0 / \hbar} q_0 (t = t_0)$ ;  $\beta_2$ ,  $\beta_1$  определяются формулами (48); угол  $\bar{\Theta}$ —формулой (52).

Рассмотрим случай  $A = 0$  (т. е. в момент  $t = t_0$  поля излучения нет). Тогда энергия излучения имеет вид:

$$E = \hbar \omega_0 \frac{R^2 \sin^2 \bar{\Theta} |H'|^2}{\hbar^2 \gamma^2 + 8R |H'|^2 \cos \bar{\Theta}} \left\{ \exp \left[ -\frac{\gamma}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \frac{2R |H'|^2 \cos \bar{\Theta}}{\hbar^2} (t - t_0)} \right] - \exp \left[ -\frac{\gamma}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \frac{2R |H'|^2 \cos \bar{\Theta}}{\hbar^2} (t - t_0)} \right] \right\}^2 \quad (56)$$

Формула (55) позволяет определять шумы в масерах. В процессе работы масера угол  $\bar{\Theta}$  сохраняет некоторое среднее значение  $\bar{\Theta}^*$  (в случае работы масера как усилителя и в отсутствие усиливаемого поля  $\bar{\Theta} = \Theta_{\min}$ ). За время между соударениями к  $\bar{\Theta}$  прибавляется малая добавка  $\varphi$ ; соударение обращает ее в нуль. Поле излучения, обусловленное этой добавкой  $\varphi$ , и является возможным шумом в масере.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. H. Dicke, Phys. Rev., **93**, 99 (1954).
2. B. M. Файн, УФН, **64**, 273 (1958).
3. B. M. Файн, ЖЭТФ, **36**, 798 (1959).
4. H. Snyders, P. Richards, Phys. Rev., **73**, 1178 (1948).
5. B. M. Файн, ЖЭТФ, **29**, 878 (1955); ЖЭТФ, **33**, 416 (1957).
6. N. Bloembergen, Pound, Phys. Rev., **95**, 8 (1954).
7. S. Bloom, J. Appl. Phys., **27**, 785 (1956).
8. M. W. Muller, Phys. Rev., **106**, 8 (1957).
9. M. W. P. Strandberg, Phys. Rev., **106**, 617 (1957).
10. J. Weber, Phys. Rev., **108**, 537 (1957).
11. Б. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.
12. I. R. Senitzky, Rhys. Rev., **111**, 3 (1958).
13. R. P. Feynman, F. L. Vernon, P. W. Hellwatt, J. Appl. Phys., **28**, 49 (1957).

Исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
24 ноября 1958 г.

---

\* Вообще говоря, масер или молекулярный генератор не являются системами с сосредоточенными параметрами. Однако всегда можно ввести некоторое усредненное положение вектора (см. также [18]).