ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том II, № 1 РАДИОФИЗИКА 1959

О ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК

П. В. Блиох

Рассмотрены потери энергии заряженной частицей, проходящей через диэлектрик с периодически меняющейся вдоль пути частицы диэлектрической проницаемостью.

В предположении малых изменений ε определены области частот, в которых возможно возбуждение электромагнитных волн в рассматриваемом неоднородном диэлектрике. Получены выражения для интенсивности черенковского излучения и поляризационных потерь в двух предельных случаях соотношения длины волны λ генерируемых колебаний и периода L изменения ε: $\lambda \ll L$; $\lambda \gg L$.

1. Работа ряда приборов, в которых осуществляется взаимодействие электронного пучка с медленными волнами (например, ЛБВ), сводится с точки зрения элементарных процессов к черенковскому излучению[1]. Это излучение возникает при прохождении достаточно быстрой частицы через однородный диэлектрик и может трактоваться как резонанс между вынуждающей силой (движущийся заряд) и собственными колебаниями среды.

С другой стороны, известно, что можно возбудить нарастающую электромагнитную волну в электронном пучке, если его параметры или параметры среды изменять вдоль длины пучка определенным образом [2, 3, 5]. С работой таких параметрических усилителей и генераторов может быть связано черенковское излучение, возникающее при прохождении заряженной частицы через периодически неоднородный диэлектрик.

Параметрический эффект Черенкова рассмотрен Я. Б. Файнбергом и Н. А. Хижняком на примере слоистого диэлектрика, в котором значение диэлектрической проницаемости меняется скачкообразно вдоль пути частицы[4]. Однако во многих случаях периодическая структура характеризуется не скачкообразным, а непрерывным изменением свойств диэлектрика. В частности, изменение параметров среды может происходить по синусоидальному закону (например, при возбуждении в плазме стоячей ультразвуковой волны). Параметрическое черенковское излучение в такой среде обладает рядом особенностей, которые и рассматриваются в настоящей работе.

2. Рассматривая взаимодействие заряженной частицы, движущейся вдоль оси z, с электромагнитными волнами в неоднородном диэлектрике, можно получить уравнение для фурье-компоненты осевой составляющей электрического поля $E_{z,\omega}$ [1]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{z,\omega}}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon E_{z,\omega}}{\partial z}\right)+k^2\varepsilon E_{z,\omega}=$$
$$=\frac{ike}{\pi c}\frac{\delta(r)}{r}e^{-i\frac{\omega z}{v}}+\frac{e}{\pi v}\frac{\delta(r)}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}e^{-i\frac{\omega z}{v}}\right). \tag{1}$$

Здесь e и v—заряд и скорость частицы, $k=\omega/c$, ω — частота, c—скорость света. Значение диэлектрической проницаемости ε зависит только от координаты z.

Для решения уравнения (1) положим

$$E_{z,\omega}=\int\limits_0^\infty J_0(k_\perp r)\,Z_{\omega,k_\perp}(z)\,k_\perp\,dk_\perp$$

и введем новую функцию

$$Y(z)=(\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2}\,Z_{\omega,k_\perp},$$

где $\varepsilon_0=\frac{1}{L}\int\limits_0^L\varepsilon(z)dz$—среднее значение $\varepsilon(z)$. Функция $Y(z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2Y}{dz^2}+Y\left[k^2\varepsilon-k_\perp^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}-\frac{3}{4}\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right]=$$
$$=\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{e}{\pi v}e^{-i\frac{\omega z}{v}}\left(\frac{ikv}{c}-\frac{i\omega}{v\varepsilon}-\frac{d\varepsilon}{dz}\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \tag{2}$$

Рассмотрим случай синусоидального изменения ε:

$$\varepsilon(z)=\varepsilon_0(1+q\cos 2pz), \tag{3}$$

предполагая глубину модуляции q малой: $q\ll 1$. Подставляя (3) в (2) и ограничиваясь членами второго порядка по q, получим:

$$Y''+F(x)Y=F_1(x); \tag{4}$$
$$F(x)=\theta_0+2\theta_2\cos 2x+2\theta_4\cos 4x;$$
$$F_1(x)=\frac{e}{\pi v}e^{-i\frac{\omega x}{pv}}\sum_{s=-2}^{+2}M_{2s}e^{2six};$$
$$\theta_0=\frac{k^2\varepsilon_0-k_\perp^2}{p^2}-\frac{q^2}{2};\qquad \theta_2=\frac{q}{2}\left(\frac{k^2\varepsilon_0}{p^2}-2\right);\qquad \theta_4=\frac{5}{4}q^2;$$
$$M_0=\frac{i\omega}{p^2v\varepsilon_0}\left[\beta^2\varepsilon_0-1-\frac{3}{16}q^2\left(1+\frac{1}{3}\varepsilon_0\beta^2\right)\right];$$
$$M_{\pm2}=q\frac{i}{p\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4}\frac{\omega}{pv}(1+\varepsilon_0\beta^2)\mp 1\right];$$
$$M_{\pm4}=-q^2\frac{i}{p\varepsilon_0}\frac{3}{4}\left[\frac{\omega}{8pv}\left(1+\frac{1}{3}\varepsilon_0\beta^2\right)\mp 1\right]$$

(в (4) штрихами обозначены производные по $x=pz$; $\beta=v/c$).

Уравнение (4) является основным уравнением рассматриваемой задачи. Оно представляет собой неоднородное уравнение Хилла, решение которого может быть найдено по общей формуле[6]:

$$Y=y_1(x)\left[A_1-V_1(x)\right]+y_2(x)\left[A_2+V_2(x)\right], \tag{5}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$—решения соответствующего (4) однородного уравнения, удовлетворяющие условиям:

$$y_1(x+\pi)=\rho_1y_1(x);\qquad y_2(x+\pi)=\rho_2y_2(x). \tag{6}$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 — постоянные, равные по модулю единице; условие (6) означает, что рассматриваются решения однородного уравнения, соответствующие волнам, которые могут распространяться в заданной периодической структуре. В решении (5)

$$V_1(x) = \frac{1}{w}\int_0^x y_2(u) F_1(u)\, du\ ;$$
$$V_2(x) = \frac{1}{w}\int_0^x y_1(u) F_1(u)\, du\ ; \tag{7}$$
$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

произвольные постоянные A_1 и A_2 определяются из условий периодичности[4]:

$$A_1 = -\rho_1 e^{i\frac{\omega\pi}{vp}} \frac{V_1(\pi)}{1-\rho_1 e^{i\frac{\omega\pi}{vp}}}\ ; \qquad A_2 = \rho_2 e^{i\frac{\omega\pi}{pv}} \frac{V_2(\pi)}{1-\rho_2 e^{i\frac{\omega\pi}{vp}}}\, . \tag{8}$$

Рассмотрим, прежде всего, однородное уравнение, описывающее распространение свободных электромагнитных колебаний в периодически неоднородной среде:

$$Y'' + F(x)\, Y = 0. \tag{4'}$$

Линейно-независимые решения уравнения (4'), удовлетворяющие условию (6), имеют вид модулированных волн:

$$y_1(x) = e^{i\gamma x}\,\Phi(x); \qquad y_2(x) = e^{-i\gamma x}\,\Phi(-x). \tag{9}$$

Здесь $\Phi(x)$ -периодическая, с периодом π, функция, а волновое число γ определяется из дисперсионного уравнения. Полагая

$$\Phi(x) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_{2r}\, e^{2rix}$$

и пользуясь (4), получим дисперсионное уравнение в виде бесконечного детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \theta_0-(\gamma-4)^2 & \theta_2 & \theta_4 & 0 & 0 \\ \vdots & \theta_2 & \theta_0-(\gamma-2)^2 & \theta_2 & \theta_4 & 0 \\ \vdots & \theta_4 & \theta_2 & \theta_0-\gamma^2 & \theta_2 & \theta_4 \\ \vdots & 0 & \theta_4 & \theta_2 & \theta_0-(\gamma+2)^2 & \theta_2 \\ \vdots & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_2 & \theta_0-(\gamma+4)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

При малых q в качестве приближенного дисперсионного уравнения можно рассматривать определитель третьего порядка, выделенный в (10) пунктиром. Из этого определителя с точностью до членов порядка q^2 находим:

$$\gamma^2 \simeq \theta_0 + \theta_2^2 / 2(1-\theta_0)\, . \tag{11}$$

Пользуясь найденным значением γ, определяем коэффициенты C_{-2}, C_0,

C_{+2} (остальные C_{2r} должны считаться равными нулю, коль скоро мы ограничиваемся рассмотрением определителя третьего порядка в (10)):

$$C_{\pm 2} = \frac{C_0}{4} \frac{\theta_2}{1 \mp \gamma} . \tag{12}$$

Выпишем полностью найденные приближенные решения однородного уравнения:

$$y_{1,2}(x) = C_0 \left[\frac{\theta_2}{4(1+\gamma)} e^{\pm i(\gamma-2)x} + e^{\pm i\gamma x} + \frac{\theta_2}{4(1-\gamma)} e^{\pm i(\gamma+2)x} \right].$$

Мы видим, что в периодически неоднородной среде, кроме основной волны $e^{\pm i\gamma x}$ с фазовой скоростью $v_{\text{ф осн}} = \omega/\gamma p = \omega L/\pi\gamma$, появляются „боковые пространственные гармоники“ $e^{\pm i(\gamma \pm 2)x}$, имеющие фазовую скорость

$$v_{\text{ф бок}} = \omega / p(\gamma \pm 2) = \omega L / \pi(\gamma \pm 2). \tag{13}$$

Вообще говоря, имеются и высшие гармоники $e^{\pm i(\gamma \pm 2r)x}$, но в рассматриваемом приближении они не учитываются.

Приведем приближенную формулу с точностью до членов второго порядка для вычисления вронскиана w:

$$w = -2i \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (\gamma + 2r) C_{2r}^2 \simeq -2i\gamma C_0^2 \left[1 + \theta_2^2 \frac{\gamma^2 - 3}{8(1-\gamma^2)^2} \right]. \tag{14}$$

Остановимся на двух предельных случаях соотношения длины волны λ и периода L изменения ε.

1. Короткие волны, $\lambda \ll L$. В этом случае

$$y_{1,2}(x) \simeq C_0 e^{-i\gamma x} \left(1 \pm \frac{i}{2} \frac{\theta_2}{\theta_0^{1/2}} \sin 2x - \frac{1}{2} \frac{\theta_2}{\theta_0} \cos 2x \right). \tag{15}$$

Если пренебречь квадратичными по q членами, формулу (15) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{1,2}(x) &\simeq C_0 e^{\pm i\gamma x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\theta_2}{\theta_0} \cos 2x \right) \left(1 \pm \frac{i}{2} \frac{\theta_2}{\theta_0^{1/2}} \sin 2x \right) \simeq \\ &\simeq \frac{C_0 \theta_0^{1/4}}{\sqrt[4]{F(x)}} \exp \left[\pm i \int_0^x \sqrt{F(x)}\, dx \right]. \end{aligned} \tag{15'}$$

Как и следовало ожидать, в случае коротких волн найденное выражение совпадает с известной формулой решения уравнения 2-го порядка с медленно меняющимися коэффициентами.

Это решение может быть найдено непосредственно из уравнения (2) без правой части, если в нем отбросить члены с производными от $\varepsilon(z)$, т. е. если ε мало изменяется на расстояниях порядка длины волны.

2. Длинные волны, $\lambda \gg L$. В этом случае нельзя пренебрегать квадратичными членами; так, например, второй член $q^2/2$ в θ_0 может оказаться одного порядка с первым. Имея в виду, что $\theta_0 \ll 1$, перепишем формулу (11) следующим образом:

$$\gamma^2 \simeq \theta_0 (1 + \theta_2^2/2) + \theta_2^2/2. \tag{11'}$$

Аналогичным образом вместо (12) будем иметь:

$$C_{\pm 2} \simeq C_0 \frac{\theta_2}{4} \left(1 \pm \theta_0^{1/2} \right); \tag{12'}$$

$$y_{1,2}(x) = C_0 e^{i\gamma x}\left(1 + \frac{\theta_2}{2}\cos 2x \mp i\frac{\theta_2}{2}\theta_0^{1/2}\sin 2x\right). \tag{16}$$

Рассмотрим далее решения (9) с усредненной по периоду структуры амплитудной функцией $\overline{\Phi(x)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Phi(x)\,dx$:

$$\overline{y_{1,2}(x)} = e^{\mp i\gamma x}\,\overline{\Phi(x)} = C_0 e^{\pm i\gamma x}. \tag{16'}$$

Внешне эти формулы соответствуют волнам, распространяющимся в однородной среде. Однако, благодаря тому, что постоянная распространения γ определяется более сложным выражением (11′), эта однородная среда должна рассматриваться как анизотропный диэлектрик. Действительно, подставляя в (11′) значения θ_0 и θ_2 и пренебрегая членами порядка $(k/p)^4 \ll 1$, получим:

$$\gamma^2 = k^2\varepsilon_0/p^2 - k_\perp^2(1 + q^2/2) \tag{17}$$

или

$$k^2 \simeq \gamma^2 p^2/\varepsilon_0 + k_\perp^2/\varepsilon_0(1 - q^2/2). \tag{17'}$$

Сравнивая это выражение с дисперсионным уравнением для анизотропного диэлектрика, находим значение компонент тензора эффективной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_r = \varepsilon_0; \qquad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z = \varepsilon_0(1 - q^2/2). \tag{18}$$

Заметим, что если бы вместо плавного изменения $\varepsilon(x) = \varepsilon_0(1 + q\cos 2x)$ мы рассмотрели слоистый диэлектрик, представляющий собой набор пластин равной толщины $d \ll \lambda$ с $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+q)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_0(1-q)$, то вместо (18) мы получили бы [7]: $\varepsilon_r = \varepsilon_0$; $\varepsilon_z = \varepsilon_0(1 - q^2)$. Как и следовало ожидать, эффект анизотропии в этом случае оказывается бо́льшим.

Подставляя в общую формулу (5) найденные решения однородного уравнения, будем иметь:

$$Y = \frac{e}{\pi v}\,\frac{e^{-i\frac{\omega}{vp}x}}{w}\left[\Phi(-x)\Psi^-(x) - \Phi(x)\Psi^+(x)\right], \tag{19}$$

где $\Psi^+(x)$ и $\Psi^-(x)$ — периодические, с периодом π, функции:

$$\Psi^{\pm}(x) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_{2r}\sum_{s=-2}^{+2}\alpha^{\pm}_{2s,\,r}\,e^{2i(s-r)x};$$

$$\alpha^{\pm}_{2s,\,r} = -i\frac{M_{2s}}{2(s\mp r)\mp(\gamma\pm\omega/vp)}.$$

3. Полные потери энергии частицы определяются работой, которая производится обратной силой торможения eE_z, действующей на частицу со стороны создаваемого ею поля. В точке, где находится частица, это поле равно

$$E_z = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{vp}x}\int\limits_0^{\varkappa}(\varepsilon/\varepsilon_0)^{-1/2}\,Yk_\perp\,dk_\perp\,d\omega.$$

Отсюда потери энергии на единицу пути

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -\frac{e^2}{\pi vp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{\varkappa}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1/2}\frac{\Phi(-x)\Psi^-(x)-\Phi(x)\Psi^+(x)}{w}k_\perp dk_\perp d\omega, \tag{20}$$

Интегрирование по $k_\perp$ производится до некоторого максимального значения $\varkappa \ll 1/a$, так как при больших $k_\perp \sim 1/a$ (a — размеры атомов) макроскопическое рассмотрение теряет смысл[8].

Вычисление потерь по общей формуле (20) будем производить в различных приближениях по малому параметру q. При этом нам придется воспользоваться разложением по степеням q числителя подынтегральной функции:

$$S(x) = \Phi(-x)\Psi^-(x) - \Phi(x)\Psi^+(x) =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{r'=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-2}^{+2} C_{2r} C_{2r'} (\alpha^-_{2s,\,r} - \alpha^+_{2s,\,r}) e^{2i(r-r'+s)x}; \tag{21}$$

$$S(x) = S_0 + qS_1 + q^2 S_2 + \cdots.$$

В нулевом приближении, полагая $q = 0$, получим:

$$S = S_0 = -\frac{2i\gamma M_0}{\gamma^2 - \omega^2/v^2p^2} C_0^2; \qquad w = -2i\gamma C_0^2; \qquad \varepsilon/\varepsilon_0 = 1;$$

$$\gamma^2 = \frac{k^2\varepsilon_0 - k_\perp^2}{p^2}; \qquad M_0 = \frac{i\omega}{p^2 v\varepsilon_0}(\beta^2\varepsilon_0 - 1);$$

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_0 = -\frac{ie^2}{\pi c^2 p} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\varkappa} \frac{1 - 1/\beta^2\varepsilon_0}{\omega^2(\beta^2\varepsilon_0 - 1)/v^2 - k_\perp^2} \omega d\omega k_\perp dk_\perp, \tag{22}$$

что совпадает с известной формулой для потерь энергии частицей, проходящей через однородный диэлектрик с $\varepsilon = \varepsilon_0$ [8]. В первом приближении при вычислении qS_1 необходимо сохранить в (21) только те члены, у которых один из трех индексов суммирования равен ± 1, а остальные два равны нулю. После некоторых преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} qS_1 = &-\frac{2iM_0C_0}{\gamma^2 - \omega^2/v^2p^2}\left[\gamma\cos 2x(C_2 + C_{-2}) - i\frac{\omega}{vp}\sin 2x(C_2 - C_{-2})\right] - \\ &-\frac{i}{(\gamma+2)^2 - \omega^2/v^2p^2}\left\{2M_0C_0C_2\left[(\gamma+2)\cos 2x + i\frac{\omega}{vp}\sin 2x\right] + \right. \\ &\left. + C_0^2\left[M_{-2}(\gamma+2-\omega/vp)e^{-2ix} + M_{+2}(\gamma+2+\omega/vp)e^{2ix}\right]\right\} - \\ &-\frac{i}{(\gamma-2)^2 - \omega^2/v^2p^2}\left\{2M_0C_0C_{-2}\left[(\gamma-2)\cos 2x - i\frac{\omega}{vp}\sin 2x\right] + \right. \\ &\left. C_0^2\left[M_{-2}(\gamma-2+\omega/vp)e^{-2ix} + M_{+2}(\gamma-2-\omega/vp)e^{2ix}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

При вычислении потерь энергии на излучение заметим, что подынтегральное выражение, рассматриваемое как функция $k_\perp$, имеет полюсы, определяемые уравнениями:

а) $\gamma^2 - \omega^2/v^2p^2 = 0$; в) $(\gamma+2)^2 - \omega^2/v^2p^2 = 0$; с) $(\gamma-2)^2 - \omega^2/v^2p^2 = 0$. (24)

Уравнение (24а), соответствующее излучению частицы в однородном диэлектрике с $\varepsilon = \varepsilon_0$, выражает условие резонанса вынуждающей силы с основной волной в периодически неоднородной среде: $v = v_{\Phi\,\text{осн}}$. Уравнения (24в) и (24с) также представляют собой условия резонанса вынуждающей силы с „боковыми колебаниями": $v = v_{\Phi 1\text{бок}}$, $v = v_{\Phi 2\text{бок}}$.

Такого рода резонанс отсутствует в однородном диэлектрике и является специфической особенностью пространственно-неоднородной среды.

Для вычисления интеграла (20) разобьем его в соответствии с особенностями подынтегральной функции на три части:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -\frac{e^2}{\pi v p}\left(1 - \frac{1}{2} q \cos 2x\right)\left(I_0 + I_1 + I_2\right). \tag{25}$$

Особенности подынтегральной функции в I_0 определяются уравнением (24а), в I_1 и I_2 — соответственно (24в) и (24с). Черенковскому излучению в интеграле I_0 соответствует область частот $\Delta_0\omega$, в которой выполняется условие

$$\varepsilon_0(\omega)v^2/c^2 > 1 .$$

В этой области подынтегральная функция имеет полюс в точке

$$k_\perp = k_{\perp 0} = (k^2\varepsilon_0 - \omega^2 / v^2)^{1/2},$$

вычет в которой равен

$$-\frac{p^2}{2}\left[M_0\left(1 + \frac{C_2 + C_{-2}}{C_0}\cos 2x - i\frac{\omega}{vp\gamma}\sin 2x\frac{C_2 - C_{-2}}{C_0}\right)\right]_{k_\perp = k_{\perp 0}}.$$

Таким образом,

$$I_0 = -\pi i p^2 \int\limits_{\Delta_0\omega}\left[M_0\left(1 + \frac{C_2 + C_{-2}}{C_0}\cos 2x - i\frac{\omega}{vp\gamma}\sin 2x\frac{C_2 - C_{-2}}{C_0}\right)\right]_{k_\perp = k_{\perp 0}} d\omega. \tag{26}$$

Область интегрирования по частотам ограничена неравенствами:

$$\varkappa^2 v^2 / \omega^2 > (\beta^2\varepsilon_0 - 1) > 0, \tag{27}$$

а направление интегрирования выбирается так, чтобы $k_\perp$, определяемое соотношением (24а), возрастало. Аналогичным образом вычисляются потери на излучение, входящие в интегралы I_1 и I_2:

$$I_1 = -\pi i p^2 \int\limits_{\Delta_1\omega}\left\{M_0\frac{C_2}{C_0}\left[\cos 2x + i\frac{\omega}{vp(\gamma+2)}\sin 2x\right] + \frac{M_{-2}}{2(\gamma+2)}\left(\gamma + 2 - \frac{\omega}{vp}\right)e^{-2ix} + \frac{M_{+2}}{2(\gamma+2)}\left(\gamma + 2 + \frac{\omega}{vp}\right)e^{2ix}\right\}_{k_{\perp(1)}} d\omega; \tag{28}$$

$$I_2 = -\pi i p^2 \int\limits_{\Delta_2\omega}\left\{M_0\frac{C_{-2}}{C_0}\left[\cos 2x - i\frac{\omega}{vp(\gamma-2)}\sin 2x\right] + \frac{M_{-2}}{2(\gamma-2)}\left(\gamma - 2 + \frac{\omega}{vp}\right)e^{-2ix} + \frac{M_{+2}}{2(\gamma-2)}\left(\gamma - 2 - \frac{\omega}{vp}\right)e^{2ix}\right\}_{k_{\perp(2)}} d\omega. \tag{29}$$

Значения подынтегральных функций берутся в точках

$$k_\perp = k_{\perp(1)} = \left[k^2\varepsilon_0 - (\omega/v - 2p)^2\right]^{1/2};$$

$$k_\perp = k_{\perp(2)} = \left[k^2\varepsilon_0 - (\omega/v + 2p)^2\right]^{1/2},$$

а области интегрирования $\Delta_1\omega$ и $\Delta_2\omega$ ограничены условиями:

$$\varkappa^2\frac{v^2}{\omega^2} > \beta^2\varepsilon_0 - \left(1 - 2p\frac{v}{\omega}\right)^2 > 0; \qquad \varkappa^2\frac{v^2}{\omega^2} > \beta^2\varepsilon_0 - \left(1 + 2p\frac{v}{\omega}\right)^2 > 0.$$

Общие формулы (26), (28), (29) значительно упрощаются в предельном случае коротких волн, когда дисперсионная зависимость такова, что во всей области частот $\Delta_0\omega$, определяемой условиями (27), имеет место неравенство $\lambda/L \ll 1$ или $pv/\omega \ll 1$.

В этом случае все три области интегрирования по частотам сливаются в одну $\Delta_0\omega$, и интегралы I_0, I_1, I_2 можно объединить. Замечая далее, что значениям $k_{\perp 0}$, $k_{\perp(1)}$, $k_{\perp(2)}$ соответствуют значения

$$\gamma^{(0)} = \omega / vp\,; \qquad \gamma^{(1)} = \omega / vp - 2\,; \qquad \gamma^{(2)} = \omega / vp + 2\,,$$

получим после некоторых преобразований:

$$I_0 + I_1 + I_2 \simeq -\pi i p^2 \int\limits_{\Delta_0\omega} \Bigg[M_0 \left(1 + \frac{C_2 + C_{-2}}{C_0}\cos 2x\right)\Bigg|_{k_{\perp 0}} -$$

$$- iM_0 \frac{C_2 - C_{-2}}{C_0}\sin 2x\Bigg|_{k_{\perp 0}} + M_0 \frac{C_2}{C_0}(\cos 2x + i\sin 2x)\Bigg|_{k_{\perp(1)}} +$$

$$+ M_0 \frac{C_{-2}}{C_0}(\cos 2x - i\sin 2x)\Bigg|_{k_{\perp(2)}} + M_{+2}e^{2ix} + M_{-2}e^{-2ix}\Bigg] d\omega =$$

$$= \frac{\pi}{v}\int\limits_{\Delta_0\omega} \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\beta^2\varepsilon_0 - 1 + \frac{q}{2}(\beta^2\varepsilon_0 + 1)\cos 2x\right]\omega d\omega\,.$$

По формуле (25) окончательно находим:

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{\text{изл}} = -\frac{e^2}{v^2 p}\int\limits_{\Delta_0\omega}\left[\beta^2 - \frac{1}{\varepsilon_0}(1 - q\cos 2x)\right]\omega d\omega \simeq$$
$$\simeq \frac{e^2}{c^2 p}\int\limits_{\Delta_0\omega}\left(1 - \frac{1}{\beta^2\,\varepsilon(x)}\right)\omega d\omega\,. \tag{30}$$

Мы видим, таким образом, что в случае коротких волн ($\lambda \ll L$) потери энергии на излучение выражаются обычной формулой с заменой ε на $\varepsilon(x)$. Полученный результат имеет простой физический смысл: при $L \gg \lambda$ выполнены условия геометрической оптики, и излучение происходит как в однородной среде с $\varepsilon(x)$ в точке, где находится излучатель. Для определения поляризационных потерь удобно сгруппировать члены в (23) несколько иным образом:

$$qS_1 = -\frac{2iM_0C_0}{\gamma^2 - \omega^2/v^2p^2}\left[\gamma\cos 2x(C_2 + C_{-2}) - i\frac{\omega}{vp}\sin 2x(C_2 - C_{-2})\right] -$$

$$-\frac{C_0e^{2ix}}{\gamma^2 - (\omega/vp - 2)^2}\left\{iM_0\left[\gamma(C_2 + C_{-2}) + \left(\frac{\omega}{vp} - 2\right)(C_2 - C_{-2})\right] + 2\gamma iM_{+2}C_0\right\} - \tag{23'}$$

$$-\frac{C_0e^{-2ix}}{\gamma^2 - (\omega/vp + 2)^2}\left\{iM_0\left[\gamma(C_2 + C_{-2}) + \left(\frac{\omega}{vp} + 2\right)(C_{-2} - C_2)\right] + 2i\gamma M_{-2}C_0\right\}.$$

Поляризационные потери связаны с теми особенностями подынтегральной функции в (20), которые определяются условием

$$\varepsilon_0(\omega) = 0\,. \tag{31}$$

Если это условие выполняется в диапазоне коротких волн, где $\lambda \ll L$, формула (23′) может быть упрощена. В этом случае, имея в виду неравенство $\omega \gg vp$, заменим члены $\omega/vp \mp 2$ на ω/vp и отбросим ± 1 в выражении для $M_{\pm 2}$. После несложных преобразований получим:

$$qS_1 \simeq -\frac{4i\gamma\cos 2x}{\gamma^2 - \omega^2/v^2p^2}C_0^2\left(M_0\frac{C_2 + C_{-2}}{C_0} + M_2\right), \tag{23''}$$

где $M_2 = M_{\pm 2}$ без члена ± 1 в квадратных скобках. Подставляя в (23″) найденные ранее значения M_0, M_2, C_{-2} и сохраняя те члены, для которых $\varepsilon_0 = 0$ является полюсом, будем иметь:

$$\frac{S_0+qS_1}{w} = \frac{i\omega}{v\varepsilon_0(k_\perp^2+\omega^2/v^2)}\left[1-\frac{q}{2}\cos 2x\left(1+\frac{2p^2}{p^2+k_\perp^2}\right)\right]. \tag{32}$$

Так как (32) является нечетной функцией ω, то величина интеграла (20) определяется только вычетом подынтегральной функции в точке $\omega=\omega_0$, где ω_0—корень уравнения (31):

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{\text{полярн}} \simeq -\frac{e^2}{v^2 p}\frac{\omega_0}{(d\varepsilon_0/d\omega)_{\omega=\omega_0}}\left[\ln\left(1+\frac{\varkappa^2 v^2}{\omega^2}\right)(1-q\cos 2x) - \right.$$
$$\left. - q\cos 2x\frac{p^2}{p^2-\omega^2/v^2}\ln\frac{1+\varkappa^2v^2/\omega^2}{1+\varkappa^2/p^2}\right].$$

Второй член в квадратных скобках при $p \ll \omega/v$—порядка $v^2p^2/\omega^2 \ll 1$ и должен быть отброшен.

Окончательно получаем:

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{\text{полярн}} \simeq -\frac{e^2}{v^2p}\frac{\omega_0}{(d\varepsilon_0/d\omega)_{\omega=\omega_0}}\ln\left(1+\frac{\varkappa^2v^2}{\omega^2}\right)(1-q\cos 2x) \simeq$$
$$\simeq -\frac{e^2}{v^2p}\frac{\omega_0}{[d\varepsilon(x)/d\omega]_{\omega=\omega_0}}\ln\left(1+\frac{\varkappa^2v^2}{\omega^2}\right). \tag{33}$$

Эта формула также отличается от известного выражения для поляризационных потерь в однородном диэлектрике заменой ε на $\varepsilon(x)$.

Рассмотрение второго предельного случая $\lambda \gg L$ в первом приближении не имеет смысла, потому что анизотропные свойства среды, которые возникают при этом, связаны, согласно (18), с членами второго порядка. Учет членов второго порядка в общем выражении для $S(x)$ приводит к слишком громоздким формулам, поэтому мы с самого начала несколько упростим задачу. Будем рассматривать потери энергии частицей, усредненные по периоду структуры:

$$\overline{\frac{d\mathcal{E}}{dx}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\mathcal{E}}{dx}dx = -\frac{e^2}{\pi v p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varkappa}\frac{1}{w}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi S(x)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1/2}dx\right]k_\perp dk_\perp d\omega. \tag{34}$$

Начнем с вычисления интеграла по x. Замечая, что

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1/2} \simeq \sum_{s'=-2}^{+2} P_{2s'}e^{2is'x};$$

$$P_0 = 1+\frac{3}{16}q^2; \qquad P_{-2}=P_{+2}=-\frac{1}{4}q; \qquad P_{-4}=P_{+4}=\frac{3}{32}q^2,$$

перепишем $S(x)\,(\varepsilon/\varepsilon_0)^{-1/2}$ в виде:

$$S(x)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1/2} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty}\sum_{r'=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=-2}^{+2}\sum_{s'=-2}^{+2} C_{2r}C_{2r'}P_{2s'}\left(\alpha^-_{2s,r}-\alpha^+_{2s,r'}\right)e^{2i(r-r'+s+s')x}.$$

При усреднении этого выражения все члены с $r-r'+s+s' \neq 0$ обратятся в нуль:

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi S(x)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1/2}dx = \sum_{r=-\infty}^{+\infty}\sum_{r'=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=-2}^{+2} C_{2r}C_{2r'}P_{2(r'-r-s)}\left(\alpha^-_{2s,r}-\alpha^+_{2s,r'}\right), \tag{35}$$

причем $|r'-r-s| \leqslant 2$.

Во втором предельном случае $\lambda \gg L$ выполняются неравенства:

$\omega/vp \ll 1$; $\gamma \ll 1$. Учитывая эти неравенства, при определении потерь на излучение необходимо сохранить в (35) только члены со знаменателями $\gamma \pm \omega/vp$. Все остальные члены, имеющие, кроме того, в знаменателе $\pm 2r$, не имеют особенностей и не дают соответствующего вклада в интеграл по $k_\perp$.

Интересующие нас слагаемые имеют следующие индексы суммирования: $r'=s$ и $r=-s$, так что

$$I = \sum_{s=-2}^{+2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_{2r} \left[C_{-2s} P_{2r} \alpha^{-}_{2s,-s} - C_{2s} P_{-2r} \alpha^{+}_{2s,s} \right]. \tag{36}$$

В этой сумме имеется один член нулевого порядка с $r=s=0$ и четыре члена второго порядка с $s=0$; $r=\pm 1$ и $r=0$; $s=\pm 1$. Выписывая только эти члены, будем иметь:

$$\begin{aligned} I = {} & C_0^2 P_0 \left(\alpha^{-}_{0,0} - \alpha^{+}_{0,0} \right) + C_0 C_{+2} \left(P_{+2} \alpha^{-}_{0,0} - P_{-2} \alpha^{+}_{0,0} \right) + \\ & + C_0 C_{-2} \left(P_{-2} \alpha^{-}_{0,0} - P_{+2} \alpha^{+}_{0,0} \right) + C_0 P_0 \left[C_{-2} \left(\alpha^{-}_{-2,-1} - \alpha^{+}_{-2,-1} \right) + \right. \\ & \left. + C_{+2} \left(\alpha^{-}_{-2,1} - \alpha^{+}_{+2,1} \right) \right]. \end{aligned} \tag{36'}$$

Далее, отбрасывая величины более высокого порядка малости, чем q^2, найдем:

$$I = C_0^2 \frac{2\omega\gamma}{p^2 v \varepsilon_0} \frac{1}{\gamma^2 - \omega^2/v^2 p^2} (\beta^2 \varepsilon_0 - 1) \left(1 + \frac{q^2}{8} \right). \tag{37}$$

Разделив найденное выражение на

$$w = -2i\gamma C_0^2 (1 - 3q^2/8),$$

придем к окончательной формуле:

$$\overline{\frac{d\mathcal{E}}{dx}} = -\frac{ie^2}{\pi c^2 p} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\varkappa} \frac{(1 - 1/\varepsilon_r \beta^2) \omega k_\perp d\omega dk_\perp}{(\omega^2/v^2)(\varepsilon_z/\varepsilon_r)(\varepsilon_r \beta^2 - 1) - k_\perp^2}, \tag{38}$$

где ε_r и ε_z — эффективные значения тензора диэлектрической проницаемости, найденные ранее из дисперсионного уравнения. Формула (38) совпадает с известной формулой для потерь энергии частицей, проходящей через анизотропный диэлектрик [9, 10]. Входящие в (38) интегралы вычислены в работе А. Г. Ситенко и М. И. Каганова [10]. Таким образом, в диапазоне длинных (по сравнению с периодом структуры) волн периодически неоднородная среда с непрерывно меняющейся ε эквивалентна анизотропному диэлектрику не только по своим дисперсионным свойствам, но и по потерям энергии заряженной частицей.

В заключение автор выражает благодарность Я. Б. Файнбергу за указание темы и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, УФН, **44**, 321 (1951).
2. Field, Proc. IRE, **39**, 194 (1951).
3. O. E. H. Rydbeck, Suppl. Nouvo Cimento, **10**, 101 (1953).
4. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ, **32**, 884 (1957).
5. П. В. Блиох, Радиотехника и электроника, **2**, 92 (1957).
6. Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.
7. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖТФ, **25**, 711 (1955).
8. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
9. М. И. Каганов, ЖТФ, **23**, 507 (1953).
10. А. Г. Ситенко, М. И. Каганов, ДАН СССР, **100**, 681 (1955).

Харьковский институт
радиофизики и электроники

Поступила в редакцию
28 июня 1958 г.