

К ТЕОРИИ ФЛЮКТУАЦИЙ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

C. M. Рытов

Исследованы флюктуации, обусловленные малыми и коротко-коррелированными случайными силами в сильно нелинейных автоколебательных системах, допускающих кусочно-линейную аппроксимацию характеристик. Для построения теории использован метод припасовывания и точечных преобразований. Найдены статистические характеристики флюктуаций (в частности, коэффициент диффузии „фазы“), а также спектр автоколебаний при условии пренебрежения „амплитудными“ флюктуациями. В качестве примера рассмотрен ламповый генератор с Z-характеристикой.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование флюктуаций в автоколебательных системах ограничивалось до настоящего времени слабо нелинейными системами, для количественного рассмотрения которых возможно применение метода Ван-дер-Поля (см. [1] и приведенную там литературу, а также работы [2–10]). Между тем, не меньший интерес представляет аналогичная задача в случае сильно нелинейных систем, в которых автоколебания могут быть существенно несинусоидальны.

Как известно, динамическая теория таких систем располагает в общем случае только качественными методами исследования структуры фазового пространства. Попытка решения флюктуационных задач, которые опирались бы на эту общую основу, пока не было сделано, хотя здесь и имеются определенные возможности. В данной работе также рассматривается более узкий класс задач, а именно—о флюктуациях в таких сильно нелинейных автоколебательных системах, для которых допустима кусочно-линейная аппроксимация нелинейных характеристик. Эта аппроксимация лежит в основе простейшей разновидности так называемого метода припасовывания, который уже позволил получить исчерпывающее количественное решение многих динамических задач как из области радиотехники, так и из области автоматического регулирования (см. некоторые ссылки в [11]). Естественно попытаться развить теорию малых флюктуаций в такого рода системах, приняв за невозмущенный режим тот периодический процесс, который может быть обнаружен и количественно описан именно методом припасовывания и точечных преобразований.

Сущность метода в рассматриваемом простейшем случае кусочно-линейной аппроксимации нелинейных зависимостей состоит, как известно, в том, что фазовое пространство системы подразделяется на области, в каждой из которых справедливы линейные уравнения движения*. Границы между областями описываются при этом линейными алгебраическими соотношениями, т. е. представляют собой на фазовой плоскости отрезки прямых, полупрямые или бесконечные прямые; в трехмерном фазовом пространстве возможны также участки плоскостей, полуплоскости или бесконечные плоскости и т. д. Таким об-

*Теория метода в общем случае изложена в [12].

разом, вся структура разбиения фазового пространства на траектории оказывается относительно простой. Движение изображающей точки происходит либо с непрерывным переходом через границы между областями, либо с известными по величине скачками на этих границах (случай наличия „ударов“ в точках излома характеристик). Такое „припасовывание“ отрезков фазовых траекторий позволяет — хотя бы в параметрической форме — установить, в какую точку B данной границы вернется (если она вернется) изображающая точка, начавшая движение из точки A этой границы. Располагая точечным преобразованием $B = F(A)$, можно далее выяснить, существуют ли инвариантные точки $A^* = F(A^*)$, которые в случае их устойчивости соответствуют, очевидно, периодическим (автоколебательным) режимам системы.

Предполагая, что для рассматриваемой системы автоколебательный режим существует, так что состояние A^* периодически, с периодом T , восстанавливается, поставим вопрос о том, какое влияние окажет наличие малых случайных сил, действующих на систему в течение всего ее движения и, вообще говоря, зависящих не только от времени, но и от состояния системы. Очевидно, возмущенное движение может отличаться от чисто динамического поведения системы как флюктуациями промежутков времени между моментами достижения рассматриваемой границы, так и случайными отбросами от A^* точек попадания на эту границу. Статистика этих флюктуаций периода и „амплитуды“ связана со статистическими свойствами случайных сил и динамикой невозмущенного движения. Чтобы конкретизировать изложенные соображения и выявить возникающие здесь трудности, мы не будем гнаться за чрезмерной общностью, а рассмотрим задачу, ограниченную следующими предположениями:

а) система имеет одну степень свободы, и фазовой поверхностью является плоскость;

б) нелинейная характеристика состоит из двух линейных участков, так что граница между областями — бесконечная прямая, и речь идет о точечном преобразовании этой прямой в самое себя;

в) система обладает (по крайней мере одним) устойчивым предельным циклом, окрестность которого и будет нас интересовать;

г) случайные силы настолько малы, что в пределах одного периода можно ограничиться первым порядком относительно случайных отклонений от невозмущенного движения.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Посредством линейного преобразования координат на фазовой плоскости всегда можно совместить граничную прямую, разделяющую полуплоскости I и II, с какой-либо из координатных осей, например, осью x (рис. 1). Разумеется, уравнения движения в I и II (линейные в нулевом приближении) следует взять после этого в самой общей форме, а именно, в I

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 x + b_1 y + A_1 + \xi_1(t, x, y); \\ y &= c_1 x + d_1 y + B_1 + \eta_1(t, x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

и аналогично в II, где параметры и случайные силы ξ и η будут отмечаться индексом 2. Согласно предположению г), под x и y в аргументах ξ и η следует понимать невозмущенное периодическое движение $x = X(t)$, $y = Y(t)$. Вместо $\xi[t, X(t), Y(t)]$ для краткости будем писать $\xi(t)$.

Сравним на протяжении одного периода невозмущенное движение, начинающееся в момент времени t_n в точке $x^* + \Delta x_n$ и кончающееся

в момент t_{n+1} в точке $x^* + \Delta x_{n+1}$, с невозмущенным циклом, начинаяющимся в тот же момент t_n в точке x^* и кончаящимся в той же точке в момент $t_n + T$ (рис. 1).

Согласно г), возмущенный "период" $t_{n+1} - t_n$ отличается от T лишь на величину τ_n , имеющую, как и Δx , первый порядок малости относительно ξ и η .

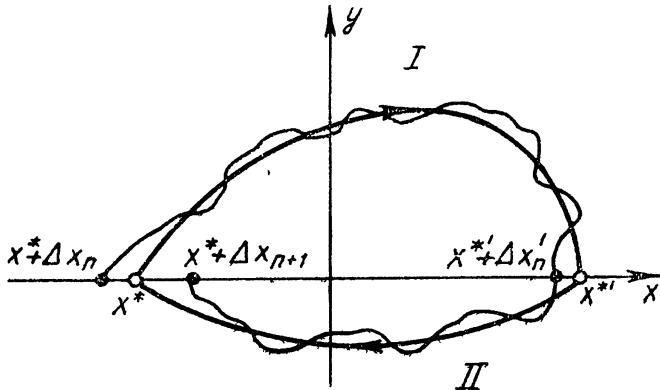


Рис. 1.

Рассмотрим часть цикла, лежащую в области I. Общее решение уравнений (1) при $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ есть

$$\begin{aligned} x &= p_1 + C e^{\mu_1 t} + D e^{\nu_1 t} + F_1(t); \\ y &= q_1 + m_1 C e^{\mu_1 t} + n_1 D e^{\nu_1 t} + G_1(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$p_1 = \frac{b_1 B_1 - d_1 A_1}{a_1 d_1 - b_1 c_1}; \quad q_1 = \frac{c_1 A_1 - a_1 B_1}{a_1 d_1 - b_1 c_1}; \quad (3)$$

$$m_1 = \frac{\mu_1 - a_1}{b_1} = \frac{c_1}{\mu_1 - d_1}; \quad n_1 = \frac{\nu_1 - a_1}{b_1} = \frac{c_1}{\nu_1 - d_1},$$

характеристические показатели μ_1 , ν_1 являются корнями уравнения

$$\mu^2 - (a_1 + d_1)\mu + a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0, \quad (4)$$

а $F_1(t)$ и $G_1(t)$ — следующие интегралы:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{1}{m_1 - n_1} \int_{t_n}^t \{ [\gamma_1(u) - n_1 \xi_1(u)] e^{\mu_1(t-u)} - [\gamma_1(u) - m_1 \xi_1(u)] e^{\nu_1(t-u)} \} du; \\ G_1[t] &= \frac{1}{m_1 - n_1} \int_{t_n}^t \{ [\gamma_1(u) - n_1 \xi_1(u)] m_1 e^{\mu_1(t-u)} - [\gamma_1(u) - \\ &\quad - m_1 \xi_1(u)] n_1 e^{\nu_1(t-u)} \} du. \end{aligned} \quad (5)$$

Определив из начальных условий ($x = x^* + \Delta x_n$, $y = 0$ при $t = t_n$) постоянные C и D и обозначив через $x^{*'} + \Delta x'_n$ абсциссу точки, в которой граница достигается в момент $t'_n = t_n + T_1 + \tau_{1n}$ (T_1 — время перехода из x^* в $x^{*''}$ при невозмущенном движении), получаем два соотношения, из которых в нулевом приближении следует, что

$$x^{*'} - p_1 = - \frac{\delta_1}{m_1 n_1} q_1 - \beta_1 (x^* - p_1); \quad (6)$$

$$q_1 = \frac{m_1 g_1 - n_1 h_1}{m_1 - n_1} q_1 + \delta_1 (x^* - p_1),$$

а в первом приближении

$$\begin{aligned}\Delta x'_n &= -\alpha_1 \tau_{1n} - \beta_1 \Delta x_n + F_1(t_n + T_1); \\ 0 &= -\gamma_1 \tau_{1n} - \delta_1 \Delta x_n + G_1(t_n + T_1).\end{aligned}\quad (7)$$

В (6) и (7) введены обозначения:

$$g_1 = e^{\mu_1 T_1}; \quad h_1 = e^{\nu_1 T_1}; \quad \beta_1 = \frac{n_1 g_1 - m_1 h_1}{m_1 - n_1}; \quad \delta_1 = \frac{m_1 n_1 (g_1 - h_1)}{m_1 - n_1};$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{m_1 - n_1} [q_1 (g_1 \mu_1 - h_1 \nu_1) + (x^* - p_1)(n_1 g_1 \mu_1 - m_1 h_1 \nu_1)]; \quad (8)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{m_1 - n_1} [q_1 (m_1 g_1 \mu_1 - n_1 h_1 \nu_1) + (x^* - p_1)(g_1 \mu_1 - h_1 \nu_1)m_1 n_1].$$

В уравнениях (7) в аргументе функций F_1 , G_1 взято невозмущенное время перехода T_1 , а члены с τ_{1n} получились в результате линеаризации экспонент $e^{\mu_1 \tau_{1n}}$ и $e^{\nu_1 \tau_{1n}}$, так как, в силу Γ , $|\mu_1| \tau_{1n} \ll 1$ и $|\nu_1| \tau_{1n} \ll 1$.

Второе из уравнений (6) определяет T_1 как функцию x^* , а первое выражает точечное преобразование $x^* \rightarrow x^{*\prime}$. Уравнения (7) позволяют выразить флюктуацию τ_{1n} времени перехода и конечный „отброс“ $\Delta x'_n$ через начальный „отброс“ Δx_n и интегральное воздействие случайных сил за время T_1 , а именно:

$$\Delta x'_n = P_1 \Delta x_n + H_{1n}; \quad \tau_{1n} = Q_1 \Delta x_n + I_{1n}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1}{\gamma_1} = \frac{g_1 h_1}{\gamma_1 (m_1 - n_1)} [q_1 (m_1 \mu_1 - n_1 \nu_1) + \\ &+ (x^* - p_1) m_1 n_1 (\mu_1 - \nu_1)];\end{aligned}$$

$$Q_1 = -\delta_1 / \gamma_1;$$

$$\begin{aligned}H_{1n} &= \frac{1}{\gamma_1} [\gamma_1 F_1(t_n + T_1) - \alpha_1 G_1(t_n + T_1)] = \frac{g_1 h_1}{\gamma_1 (m_1 - n_1)} \int_{t_n}^{t_n + T_1} \left\{ [q_1 + \right. \\ &\left. + m_1 (x^* - p_1)] [\eta_1(u) - n_1 \xi_1(u)] \nu_1 e^{\mu_1(t_n - u)} - \right. \\ &\left. - [q_1 + n_1 (x^* - p_1)] [\eta_1(u) - m_1 \xi_1(u)] \mu_1 e^{\nu_1(t_n - u)} \right\} du; \quad (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{1n} &= \frac{1}{\gamma_1} G_1(t_n + T_1) = \frac{1}{\gamma_1 (m_1 - n_1)} \int_{t_n}^{t_n + T_1} \left\{ [\eta_1(u) - n_1 \xi_1(u)] m_1 g_1 e^{\mu_1(t_n - u)} - \right. \\ &\left. - [\eta_1(u) - m_1 \xi_1(u)] n_1 h_1 e^{\nu_1(t_n - u)} \right\} du.\end{aligned}$$

Совершенно так же проводится решение в области II, с тем отличием, что начальным отклонением в момент времени $t'_n = t_n + T_1 + \tau_{1n}$ является отброс $\Delta x'_n$, получившийся в конце предыдущей части периода (припасовывание), а конечный отброс в момент возвращения на границу $t_{n+1} = t'_n + T_2 + \tau_{2n}$ равен Δx_{n+1} . В нулевом приближении имеем:

$$\begin{aligned} x^* - p_2 &= -\frac{\delta_2}{m_2 - n_2} q_2 - \theta_2 (x^{*'} - p_2); \\ q_2 &= \frac{m_2 g_2 - n_2 h_2}{m_2 - n_2} q_2 + \delta_2 (x^{*'} - p_2), \end{aligned} \quad (11)$$

причем нижнее уравнение определяет вторую часть T_2 периода невозмущенного движения ($T = T_1 + T_2$) как функцию x' , а верхнее—дает точечное преобразование $x^{*'} \rightarrow x^*$. Уравнения (6) и (11), взятые в совокупности, определяют (по предположению, существующие) инвариантные точки x^* , $x^{*'}$ и времена перехода T_1 и T_2 как функции параметров системы.

В первом приближении прохождение области II дает

$$\begin{aligned} \Delta x_{n+1} &= P_2 \Delta x'_n + H_{2n}; \\ \tau_{2n} &= Q_2 \Delta x'_n + I_{2n}. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражения для коэффициентов и правых частей здесь такие же, как в (9), и отличаются лишь заменой индекса 1 на 2 и пределами интегрирования в H_{2n} и I_{2n} — от $t_n + T_1$ до $t_n + T_1 + T_2 = t_n + T$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛЮКТУАЦИЙ

Исключив из первых уравнений (9) и (12) $\Delta x'_n$, получаем:

$$\Delta x_{n+1} = P \Delta x_n + P_2 H_{1n} + H_{2n} \quad (P = P_1 P_2),$$

откуда следует, что для $k < n$

$$\Delta x_n = P^{n-k} \Delta x_k + \sum_{m=k}^{n-1} P^{n-m-1} (P_2 H_{1m} + H_{2m}).$$

Однако, согласно в), предельный цикл устойчив, т. е. $P < 1$ и, следовательно, можно устремить k в $-\infty$. Это дает

$$\Delta x_n = \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m-1} (P_2 H_{1m} + H_{2m}). \quad (13)$$

При помощи (13), (9) и (12) можно выразить через H_n и I_n и все остальные флюктуации:

$$\begin{aligned} \Delta x'_n &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m} (P H_{1m} + P_1 H_{2m}) + H_{1n}; \\ \tau_{1n} &= Q_1 \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m} (P_2 H_{1m} + H_{2m}) + I_{1n}; \\ \tau_{2n} &= Q_2 \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m} (P H_{1m} + P_1 H_{2m}) + Q_2 H_{1n} + I_{2n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, для вычисления корреляционных функций (и, в частности, стандартов) величин Δx_n , $\Delta x'_n$, τ_{1n} и τ_{2n} надо знать корреляционные функции последовательностей случайных величин H_{in} и I_{in} ($i=1,2$). Этого достаточно и для нахождения особо интересной величины — среднеквадратичного значения суммарного флюктуационного набега „фазы“ за N периодов невозмущенной системы, т. е. величины

$$\theta_N = \sum_{n=1}^N (\tau_{1n} + \tau_{2n}). \quad (15)$$

Случайные функции ξ и η в том случае, когда они зависят от состояния системы, являются периодически нестационарными процессами. Однако вследствие предположения о достаточно короткой корреляции ξ и η последовательности I_{in} и H_{in} однородны по n и некоррелированы. Действительно, если время корреляции $\xi(t)$ много меньше T_1 и $1/|\mu_1|$, то функция корреляции $\xi(t)$ может быть записана в виде

$$\overline{\xi(t)\xi(t')} = F(t) \delta(t-t'),$$

где $F(t)$ меняется в том же темпе, что и невозмущенное периодическое решение $x=X(t)$, $y=Y(t)$, т. е. за времена порядка T_1 или $1/|\mu_1|$. Но тогда для членов последовательности вида

$$s_n = \int_{t_n}^{t_n+T_1} \xi(u) e^{\mu_1(t_n-u)} du \quad (16)$$

имеем:

$$\begin{aligned} s_n s_m &= \int_{t_n}^{t_n+T_1} e^{\mu_1(t_n-u)} du \int_{t_m}^{t_m+T_1} e^{\mu_1(t_m-u')} \overline{\xi(u)\xi(u')} du' = \\ &= \delta_{mn} \int_{t_n}^{t_n+T_1} F(u) e^{(\mu_1+\mu_1)(t_n-u)} du = \overline{|s|^2} \delta_{mn}, \end{aligned}$$

где $\overline{|s|^2}$ от n не зависит. Последнее вытекает из того, что при каждом цикле детерминированная функция $F(u) e^{(\mu_1+\mu_1)(t_n-u)}$ в точности повторяется на рассматриваемом интервале T_1 ; наличие же множителя δ_{mn} обусловлено тем, что при $m \neq n$ эти интервалы не перекрываются. Замечая, что величины H_{in} и I_{in} как раз имеют вид (16) (а, кроме того, вещественные), причем интервалы T_1 , T_2 , соответствующие $i=1$ и $i=2$, тоже не перекрываются, получаем:

$$\begin{aligned} \overline{H_{in} H_{jm}} &= \overline{H_i^2} \delta_{ij} \delta_{mn}; \quad \overline{H_{in} I_{jm}} = \overline{H_i I_i} \delta_{ij} \delta_{mn}; \\ \overline{I_{in} I_{jm}} &= \overline{I_i^2} \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (i, j=1, 2). \end{aligned} \quad (17)$$

Располагая корреляционными функциями (17), нетрудно написать теперь корреляционные функции величин (13), (14). Так, например,

$$\overline{\Delta x_m \Delta x_n} = \frac{P^{|m-n|}}{1-P^2} (\overline{P_2^2 H_1^2} + \overline{H_2^2}); \quad (18)$$

$$\overline{\Delta x_m \tau_{1n}} = \frac{P^{|m-n|} Q_1}{2-P^2} (\overline{P_2^2 H_1^2} + \overline{H_2^2}) + \begin{cases} \overline{P_2 P^{m-n-1} H_1 I_1} & (n < m) \\ 0 & (n \geq m) \end{cases}$$

и т. д. Для средних квадратичных значений находим:

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta x_n)^2} &\equiv \sigma^2 = \frac{\overline{P_2^2 H_1^2} + \overline{H_2^2}}{2-P^2}; \quad \overline{(\Delta x'_n)^2} \equiv \sigma'^2 = \frac{\overline{H_1^2} + \overline{P_2^2 H_2^2}}{1-P^2}; \\ \overline{\tau_{1n}^2} &= Q_1^2 \sigma^2 + \overline{I_1^2}; \quad \overline{\tau_{2n}^2} = Q_2^2 \sigma'^2 + \overline{I_2^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Последние формулы нетрудно было бы получить просто усреднением равенств (9) и (12), возвещенных в квадрат, если учесть, что отброс Δx_n , имеющий место в начале интервала (t_n, t_n+T_1) , не коррелирован с H_{in} и I_{in} , равно как $\Delta x'_n$ не коррелировано с H_{2n} и I_{2n} .

Наконец, для среднего квадрата флюктуационного набега (15) при помощи (14) и (17) находим:

$$\overline{\theta_N^2} = DN - R(1 - P^N), \quad (20)$$

где

$$D = \left[\frac{Q_1 + Q_2 P_1}{1 - P} \varphi + \psi \right]^2; \quad R = \frac{2(Q_1 + Q_2 P_1)}{(1 - P)^2} \left[\frac{(Q_1 + Q_2 P_1)P}{1 - P^2} \varphi + \psi \right] \varphi; \quad (21)$$

$$\varphi = P_2 H_1 + H_2; \quad \psi = I_1 + I_2 + Q_2 H_1.$$

Согласно (20), средний квадрат набега $\overline{\theta_N^2}$ растет при достаточно больших N по диффузионному закону с коэффициентом диффузии D . Внося в D выражения (21) для φ и ψ , можно также представить коэффициент диффузии в следующем виде:

$$D = \left[I_1 + I_2 + \frac{(Q_1 P_2 + Q_2) H_1 + (Q_1 + Q_2 P_1) H_2}{1 - P} \right]^2.$$

Для систем, у которых $Q_1 = Q_2 = 0$, т. е. нет влияния „амплитудных“ флюктуаций на „фазовые“*, все формулы сильно упрощаются. В этом случае $R = 0$ и диффузионный закон справедлив при любых N :

$$\overline{\theta_N^2} = DN = (\overline{I_1^2} + \overline{I_2^2}) N = (\overline{\tau_1^2} + \overline{\tau_2^2}) N. \quad (20a)$$

Это не означает, однако, что корреляция между τ и Δx исчезает. Для отсутствия такой корреляции, как это нетрудно усмотреть из (18), необходимо, чтобы в области I выполнялось еще условие $\overline{H_1 I_1} = 0$, или, согласно (10), $\alpha_1 \overline{G_1^2(t_n + T_1)} = \gamma_1 \overline{F_1(t_n + T_1)} G_1(t_n + T_1)$. Аналогичное условие должно выполняться, конечно, и в области II.

Прежде чем переходить к вопросу о спектре автоколебаний, рассмотрим в качестве примера флюктуации в генераторе с колебательным контуром в цепи анода, с индуктивной обратной связью и с Z -характеристикой.

4. ГЕНЕРАТОР С Z -ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Обычный переход к безразмерным переменным и параметрам приводит уравнение рассматриваемой системы к виду

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + x + f(\dot{x}) = 0,$$

где переменная x пропорциональна току в индуктивности контура, а характеристика имеет вид

$$f(\dot{x}) = \begin{cases} I_s & (\dot{x} > 0) \\ 0 & (\dot{x} < 0) \end{cases}.$$

Вводя флюктуационные силы (дробовой ток, зависящий от среднего анодного тока лампы и поэтому различный в областях $\dot{x} > 0$ и $\dot{x} < 0$; тепловую ЭДС в контуре), получаем в области I уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2\delta y + I_s + \eta_1(t) \end{cases} \quad (y > 0),$$

а в области II — уравнения

* Как следует из (10) и (8), равенство $Q_1 = 0$ имеет место при $\delta_1 = 0$, т. е. при $h_1 = e^{\mu_1} T_1 = g_1 = e^{-\nu_1} T_1$, что возможно только в случае комплексно сопряженных корней μ_1 и ν_1 . Это означает, что коэффициенты характеристического уравнения (4) должны удовлетворять условиям $a_1 + d_1 < 0$; $(a_1 - d_1)^2 + 4b_1 c_1 < 0$. Аналогичные условия для области II вытекают из равенства $Q_2 = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2\delta y + \eta_2(t) \end{cases} \quad (y < 0).$$

Из сопоставления с (1) легко усмотреть, что параметры имеют следующие значения:

$$a_1 = a_2 = 0; \quad b_1 = b_2 = 1; \quad c_1 = c_2 = -1; \quad d_1 = d_2 = -2\delta;$$

$$A_1 = A_2 = 0; \quad B_1 = I_s; \quad B_2 = 0; \quad \xi_1 = \xi_2 = 0.$$

Согласно (3) и (4), имеем далее

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1; \quad p_1 = I_s; \quad p_2 = 0; \quad q_1 = q_2 = 0;$$

$$\mu_1 = \mu_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - 1} \equiv \mu; \quad \nu_1 = \nu_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - 1} \equiv \nu;$$

$$m_1 = m_2 = \mu; \quad n_1 = n_2 = \nu.$$

Из вторых уравнений (6) и (11) следует, что $g_1 = h_1$ и $g_2 = h_2$ (или иначе $e^{\nu T_{1,2}} = e^{\nu T_{1,2}}$), так что $T_1 = T_2 = T/2$, причем отличное от нуля значение T существует только при $\delta < 1$, т. е. контур не должен быть апериодическим. При этом условии можно написать:

$$\mu = -\delta + i\omega_0; \quad \nu = -\delta - i\omega_0; \quad \omega_0 = \sqrt{1 - \delta^2}.$$

Уравнение, определяющее $T_{1,2}$, принимает вид $\sin \omega_0 T_{1,2} = 0$, т. е.

$$T_1 = T_2 = \pi/\omega_0.$$

Следовательно, по (8)

$$g_1 = h_1 = g_2 = h_2 = -e^{-d} \equiv h(d = \pi\delta/\omega_0);$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \beta_1 = \beta_2 = -h; \quad \gamma_1 = (x^* - I_s)h;$$

$$\gamma_2 = x^{*'}h; \quad \delta_1 = \delta_2 = 0.$$

Напомним, что последние равенства означают изохронность системы — отсутствие влияния флюктуаций „амплитуды“ на флюктуации „фазы“.

Первые уравнения (6) и (11) определяют инвариантные точки

$$x^* = hI_s/(1+h); \quad x^{*'} = I_s/(1+h),$$

что дает

$$\gamma_2 = -\gamma_1 = hI_s/(1+h).$$

Наконец, из (10) имеем:

$$\begin{aligned} P_1 = P_2 = h; \quad P = P_1 P_2 = h^2; \quad Q_1 = Q_2 = 0; \\ H_1 = \frac{h}{2i\omega_0} \int_0^{T_1} \eta_1(t_n + 0) (e^{-\mu\theta} - e^{-\nu\theta}) d\theta; \\ H_2 = \frac{h}{2i\omega_0} \int_0^{T_2} \eta_2(t_n + T_1 + 0) (e^{-\mu\theta} - e^{-\nu\theta}) d\theta; \\ I_1 = -\frac{1+h}{2i\omega_0 I_s} \int_0^{T_1} \eta_1(t_n + 0) (\mu e^{-\mu\theta} - \nu e^{-\nu\theta}) d\theta; \\ I_2 = \frac{1+h}{2i\omega_0 I_s} \int_0^{T_2} \eta_2(t_n + T_1 + 0) (\mu e^{-\mu\theta} - \nu e^{-\nu\theta}) d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Случайные силы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$, поскольку они относятся к разным областям фазовой плоскости, не коррелированы между собой; каждая

же из них в своей области однородна по t , так как в пределах области анодный ток не меняется. Функции корреляции записываются поэтому в виде

$$\overline{\eta_1(t)\eta_1(t')} = C_1 \delta(t-t'); \quad \overline{\eta_1(t)\eta_2(t')} = 0; \quad \overline{\eta_2(t)\eta_2(t')} = C_2 \delta(t-t'),$$

что дает

$$\overline{H_{1,2}^2} = \frac{(1-h^2) C_{1,2}}{4\delta}; \quad \overline{I_{1,2}^2} = \frac{(1+h)^2 (1-h^2) C_{1,2}}{4\delta h^2 I_s^2}; \quad \overline{I_1 H_1} = \overline{I_2 H_2} = 0. \quad (23)$$

Последние из этих равенств означают для изохронной системы, как мы видели, отсутствие корреляции между флюктуациями „амплитуды“ и „фазы“.

При помощи (22) и (23) получаем из (19) и (20а) следующие выражения для средних квадратов флюктуаций „амплитуды“ и для коэффициента диффузии „фазы“:

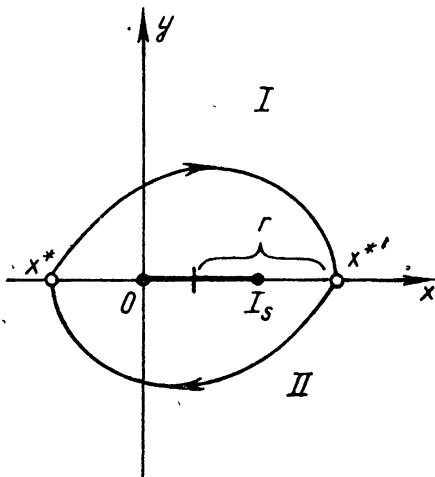


Рис. 2.

$$\sigma^2 = \frac{h^2 C_1 + C_2}{4\delta(1+h^2)}; \quad \sigma'^2 = \frac{C_1 + h^2 C_2}{4\delta(1+h^2)};$$

$$D = \frac{(1+h)^2 (1-h)^2 (C_1 + C_2)}{4\delta h^2 I_s^2}.$$

В исследуемой задаче можно охарактеризовать „радиус“ предельного цикла величиной (рис. 2)

$$r = \frac{x^{*'} - x^*}{2} = \frac{(1-h)I_s}{2(1+h)}$$

и ввести для оценки относительных флюктуаций „амплитуды“ параметр

$$\lambda = \frac{\sigma^2 + \sigma'^2}{2r^2} = \frac{(1+h)^2 (C_1 + C_2)}{\delta (1-h)^2 I_s^2}.$$

Если воспользоваться выражениями

h и δ через декремент контура d :

$$h = -e^{-d}; \quad \delta = d/\sqrt{\pi^2 + d^2},$$

то формулы для λ и D примут вид:

$$\lambda = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2} \left(\frac{1-e^{-d}}{1+e^{-d}} \right)^2 \frac{C_1 + C_2}{I_s^2};$$

$$D = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2} (1-e^{-d})^2 (e^{2d}-1) \frac{C_1 + C_2}{4 I_s^2}.$$

При $d \rightarrow 0$, когда $r \approx I_s/d$ и автоколебания все более приближаются к синусоидальным, имеем

$$\lambda \approx \frac{\pi d}{4 I_s^2} (C_1 + C_2); \quad D \approx \frac{\pi d^2}{2 I_s^2} (C_1 + C_2) = \frac{\pi (C_1 + C_2)}{2 r^2}. \quad (24)$$

Таким образом, относительные флюктуации „амплитуды“ становятся сколь угодно малыми, и коэффициент диффузии D убывает еще быстрее. В противоположном случае, когда $d \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow I_s/2$, получаем:

$$\lambda \approx \frac{C_1 + C_2}{I_s^2}; \quad D \approx \frac{(C_1 + C_2) e^{2d}}{4 I_s^2}. \quad (25)$$

Если $C_1 + C_2 \ll I_s^2$, то относительные флюктуации „амплитуды“ остаются малыми, но диффузия „фазы“ резко ускоряется.

5. СПЕКТР АВТОКОЛЕБАНИЙ

В отсутствие флюктуаций спектр автоколебаний выражался бы рядом Фурье с основной частотой $2\pi/T$. Случайные отбросы изображающей точки с предельного цикла (будем по-прежнему называть их флюктуациями „амплитуды“) и ее случайные блуждания вдоль по циклу (флюктуации „фазы“) приведут, очевидно, к уширению гармоник: спектр будет состоять из линий конечной ширины, расположенных на частотах $\omega_k = k 2\pi/T$ ($k = 1, 2, \dots$). В ближайшей окрестности каждой из этих частот спектр формируется низкочастотными компонентами хаотической модуляции, тем более низкочастотными, чем ближе интересующая нас область к ω_k . Это безусловно верно для амплитудной модуляции гармоник, а для фазовой модуляции справедливо тем точнее, чем меньше ее глубина. Таким образом, пока уширение линий не слишком велико (их ширины гораздо меньше $2\pi/T$), при выяснении структуры спектра можно ограничиваться теми составляющими хаотической модуляции, которые характеризуются временами, большими по сравнению со средним периодом T , и не принимать во внимание быстрых флюктуаций внутри периода.

Эти сопротивления аналогичны тем, которые используются при переходе к уравнениям Ван-дер-Поля в случае слабо нелинейных систем. Они позволяют отвлечься от мгновенных флюктуаций в автоколебаниях $x(t)$ и учитывать на каждом периоде (или „полупериоде“) только некоторые средние или интегральные отклонения от точной периодичности. Например, вместо мгновенных амплитудных флюктуаций можно было бы приписать „амплитуде“ в течение n -го периода случайные отклонения $(\Delta x_n + \Delta x'_n)/2$ в области I и $(\Delta x'_n + \Delta x_{n+1})/2$ в области II или какие-либо другие подходящие значения. В отношении же „фазовой“ модуляции достаточно учесть лишь интегральные случайные вариации τ_{1n} и τ_{2n} длительности „полупериодов“ T_1 и T_2 , считая, что внутри T_1 и T_2 ход $x(t)$ отличается от хода в отсутствие флюктуаций только равномерным растяжением (сжатием) по t соответственно на величины τ_{1n} и τ_{2n} .

Мы приходим в результате к представлению процесса автоколебаний в виде последовательности примыкающих друг к другу импульсов. Следует отметить, что при этом происходит чередование импульсов формы $x_1(u)$ (область I) и $x_2(u)$ (область II), задаваемой решениями динамических уравнений системы в областях I и II, а высоты и длительности импульсов испытывают случайные изменения. Если в решениях динамических уравнений масштаб по t изменен так, чтобы промежуткам времени T_1 и T_2 соответствовало изменение аргумента u в единичном интервале $0 \leq u \leq 1$, то описываемый процесс можно представить в виде

$$x(t) = \sum_n \left[\xi_n x_1 \left(\frac{t - t_n}{\vartheta_n} \right) + \xi'_n x_2 \left(\frac{t - t'_n}{\vartheta'_n} \right) \right], \quad (26)$$

где

$$t'_n - t_n = \vartheta_n = T_1 + \tau_{1n}; \quad t_{n+1} - t'_n = \vartheta'_n = T_2 + \tau_{2n}, \quad (27)$$

а флюктуации „амплитуд“ ξ_n и ξ'_n пропорциональны указанным выше комбинациям Δx_n и $\Delta x'_n$.

Найдение спектра процесса (26) сильно осложняется при наличии корреляции между случайными длительностями ϑ_n и ϑ'_n , с одной стороны, и случайными амплитудами ξ_n и ξ'_n , с другой, что как раз имеет

место в нашей задаче в общем случае (см. (18)). Мы ограничимся поэтому еще более упрощенной постановкой вопроса, а именно — совсем пренебрежем флюктуациями „амплитуды“. Это допустимо, если ширины линий в спектре обусловлены в первую очередь диффузией „фазы“, а флюктуации ξ_n и ξ'_n формируют только достаточно широкие крылья. Такое положение вещей получится, очевидно, в том случае, когда установление „амплитуды“, скорость которой определяется инкрементом $-\ln P$, происходит значительно быстрее, чем диффузия „фазы“, т. е. при условии

$$DT^{-2} \ll -\ln P. \quad (28)$$

Как известно, в слабо нелинейных системах это условие выполняется с огромным запасом.

При сделанном предположении процесс автоколебаний сводится к чередованию импульсов формы $x_1(u)$ и $x_2(u)$, стандартных по высоте ($\xi_n = \xi'_n = 1$), но со случайными и независимыми друг от друга длительностями (27):

$$x(t) = \sum_n \left[x_1 \left(\frac{t - t_n}{\vartheta_n} \right) + x_2 \left(\frac{t - t'_n}{\vartheta'_n} \right) \right]. \quad (29)$$

Спектр такого процесса был вычислен нами в работе [13]. Он состоит из гармоник с максимумами на частотах $\omega_k = k 2\pi/T$. В окрестности k -ой линии распределение спектральной интенсивности есть

$$f_k(\omega) = \frac{I_k \Delta \omega_k}{2\pi [\delta^2 + (\Delta \omega_k/2)^2]}, \quad (30)$$

где $\delta = \omega - \omega_k$ — расстройка от максимума линии, $\Delta \omega_k$ — ширина линии на уровне половинной интенсивности:

$$\Delta \omega_k = \frac{\omega_k^2}{T} (\tau_1^2 + \tau_2^2) = \frac{4\pi^2 D}{T^3} k^2 \quad (31)$$

(величина, пропорциональная квадрату номера гармоники), а I_k — энергия k -ой гармоники дискретного спектра того периодического процесса, который имел бы место в отсутствие флюктуаций:

$$I_k = \frac{2}{T^2} | T_1 H_1(\omega_k T_1) + T_2 H_2(\omega_k T_2) e^{i\omega_k T_2} |^2;$$

$$H_{1,2}(p) = \int_0^1 x_{1,2}(u) e^{-i u p} du.$$

Формулы (30) справедливы при условии, что ширина линии $\Delta \omega_k$ много меньше интервала $2\pi/T$ между линиями, т. е., согласно (31),

$$DT^{-2} \ll k^{-2}/2\pi. \quad (32)$$

Таким образом, приведенные формулы хорошо описывают спектр лишь в области не слишком высоких гармоник, или, иначе говоря, там, где линии спектра еще далеки от взаимного перекрытия. Заметим, что общее выражение для $f(\omega)$, даваемое формулой (9) из [13], свободно от этого ограничения.

Условие (28) возможности пренебрежения амплитудными флюктуациями может быть для малых k более жестким, чем (32), но с ростом k допустимые значения коэффициента диффузии D ограничиваются именно требованием (32), если мы хотим пользоваться формулой (30).

В случае генератора, рассмотренного в предыдущем разделе,

имеем: $-\ln P = 2d$, так что условие (32) становится сильнее (28) для гармоник с номерами $k > 1/2\sqrt{\pi d}$. При малых декрементах d для D справедлива формула (24), и условие (28) дает

$$(C_1 + C_2)/I_s^2 T^2 \ll 1/d.$$

При больших d , когда для D справедливо выражение (25), условие (28) принимает вид

$$(C_1 + C_2)/I_s^2 T^2 \ll 8d e^{-2d}$$

и, следовательно, с ростом d рано или поздно нарушается.

Изложенная теория флюктуаций в автоколебательных системах с кусочно-линейными характеристиками была ограничена для простоты предположениями а) — в), формулированными в разделе 1. Тем не менее, она содержит все основные элементы, необходимые при рассмотрении более сложных случаев, например, неплоского фазового пространства или фазового пространства большего числа измерений (если, конечно, его динамическая структура известна), а также при более сложных характеристиках. Такого рода обобщения связаны лишь с большей громоздкостью выкладок. Более существенны предположения г) и д) о достаточной малости случайных сил и об их короткой корреляции. Первое неизбежно для того, чтобы можно было локализовать флюктуации в областях устойчивости в малом. Отказ от второго предположения хотя и возможен, но влечет за собой сильное усложнение задачи, поскольку случайные воздействия H_{in} и I_{in} будут на каком-то числе периодов коррелированы, и простые формулы (17) утратят силу.

Разумеется, в предположении г) теория могла бы быть развита в самом общем виде, т. е. для любой нелинейности и формы предельного цикла. При рассмотрении флюктуаций на протяжении одного периода можно, в силу г), ограничиться уравнениями движения, линеаризованными около невозмущенного периодического движения. Флюктуационные отклонения будут удовлетворять тогда линейным уравнениям с периодическими коэффициентами и с периодически нестационарными случайными силами. Наши уравнения (1) для области I вместе с соответствующими уравнениями для области II представляют собой частный случай таких уравнений, частный в том отношении, что изменение коэффициентов сводится к периодическим скачкам от одного постоянного значения к другому.

В общем случае дальнейшее исследование опять-таки заключалось бы в рассмотрении точечного преобразования некоторой полупрямой без контакта (если говорить о фазовой плоскости) в самое себя на основе решений указанных уравнений с периодическими коэффициентами. Мне представлялось, однако, целесообразным ограничиться частным случаем кусочно-линейных характеристик, когда невозмущенное движение не предполагается известным, а фактически вычисляется, и, соответственно, расчет флюктуаций доводится до определенных количественных результатов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. М. Рытов, ЖЭТФ, **29**, 304 (1955).
2. И. С. Гоноровский, ДАН, **101**, 657 (1955).
3. С. М. Рытов, Радиотехника и электроника, **1**, 114 (1956).
4. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, ЖЭТФ, **28**, 509 (1955).

5. И. Л. Берштейн, ДАН, **106**, 453 (1956).
6. В. И. Тихонов, И. Н. Амикитов, Радиотехника и электроника, **1**, 428 (1956).
7. Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, **1**, 1240 (1956).
8. М. Е. Жаботинский, П. Е. Зильберман, ДАН, **119**, 918 (1958).
9. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, **3**, 579 (1958).
10. В. С. Троицкий, Изв. высш. учебн. зав. — Радиофизика, **1**, 1, 20 (1958).
11. С. М. Рытов, Радиотехника и электроника, **2**, 1435 (1957).
12. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. учебн. зав. — Радиофизика, **1**, 1, 41 (1958).
13. С. М. Рытов, Изв. высш. учебн. зав. — Радиофизика, **2**, 1, 50 (1959).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
3 ноября 1958 г.
