ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Том II, № 1* *РАДИОФИЗИКА* *1959*

# О СПЕКТРЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

*С. М. Рытов*

Получена спектральная интенсивность случайного процесса, состоящего из чередующихся импульсов двух видов, вплотную следующих друг за другом и хаотически модулированных по длительности.

В работе Я. И. Хургина [1] найдено выражение для спектральной интенсивности случайного импульсного процесса вида

$$\zeta(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\xi_k\, h\left(\frac{t-\theta_k}{\tau_k}\right), \tag{1}$$

где $\xi_k$, $\theta_k$ и $\tau_k$ — соответственно „амплитуда", момент возникновения и длительность $k$-го импульса, причем форма всех импульсов, задаваемая функцией $h(x)$, одинакова. Статистические предположения при этом следующие: 1) величины $\xi_k$, $\tau_k$ и интервалы между импульсами $\vartheta_k=\theta_{k+1}-\theta_k$ взаимно независимы; 2) распределение момента возникновения импульса $\theta$ на любом интервале времени равномерно (стационарность процесса); 3) известны средние значения $\overline{\xi_k}=a$, $\overline{(\xi_k-a)^2}=\sigma^2$ и функции распределения $p(\vartheta)$ и $q(\tau)$. Таким образом, длительность $k$-го импульса $\tau_k$ не связана с промежутком времени до начала следующего импульса. Такая постановка задачи представляет интерес при получении импульсного процесса из выбросов флюктуационного шума, а также для учета флюктуаций в импульсных автогенераторах. Несколько иная постановка вопроса необходима в том случае, когда речь идет о сильно несинусоидальных колебаниях, у которых флюктуирует „период".

Представление о случайном процессе, который мы имеем в виду, дает рис. 1. Здесь чередуются „импульсы" формы $h_1(x)$ и $h_2(x)$, при-

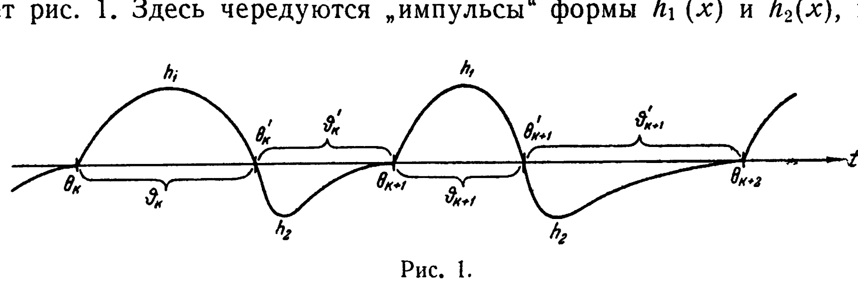


Рис. 1.

чем соответствующие длительности $\vartheta_k$ и $\vartheta_k'$ флюктуируют независимо, в силу чего независимы и продолжительности „периодов" $\vartheta_k+\vartheta_k'$. К рассмотрению такого рода процесса приводит задача об автоколебаниях в сильно нелинейной системе, подверженной действию малых случайных сил, если для решения используется метод припасовывания*. Конечно, в данном случае также можно ввести случайные „амплитуды" импульсов $\xi_k$ и $\xi_k'$, но это не вносит никаких осложнений только

* Соответствующая теория будет изложена в другой статье.

в предположении, что они независимы между собой и с интервалами $\vartheta_k$ и $\vartheta'_k$ В задаче об автоколебаниях это условие, вообще говоря, не выполняется, но зато в ряде случаев оказывается оправданным пренебрежение амплитудными флюктуациями и их влиянием на спектр процесса. Имея в виду использование получаемого ниже результата именно для таких случаев, допустим, что „амплитудные" флюктуации отсутствуют ($\xi_k = \xi'_k = 1$).

Итак, нас интересует спектр процесса

$$\zeta(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ h_1\left(\frac{t-\theta_k}{\vartheta_k}\right) + h_2\left(\frac{t-\theta'_k}{\vartheta'_k}\right) \right], \tag{2}$$

где

$$\vartheta_k = \theta'_k - \theta_k; \quad \vartheta'_k = \theta_{k+1} - \theta'_k \tag{3}$$

и каждая из функций $h_{1,2}(x)$ задана на интервале $x$ от 0 до 1. Существенное отличие от (1) заключено в соотношениях (3), согласно которым продолжительность импульса не независима от интервала до следующего импульса, а равна этому интервалу. Соответственно, у нас нет параметра $\tau$ с его функцией распределения $q(\tau)$, а имеются лишь независимые случайные величины $\vartheta$ и $\vartheta'$ с их функциями распределения $p_1(\vartheta)$ и $p_2(\vartheta')$. Для $\theta$ и $\theta'$ остается в силе предположение 2), т. е. условие стационарности процесса.

Для получения спектральной интенсивности процесса (2) мы будем следовать способу, аналогичному [1]. Вводя

$$H_{1,2}(u) = \int_0^1 h_{1,2}(x)\, e^{-iux} dx, \tag{4}$$

нетрудно записать спектральную амплитуду достаточно длинного отрезка процесса $\zeta(t)$ в интервале $(-A, A)$ в виде

$$\zeta_\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_n \left[ \vartheta_n H_1(\omega\vartheta_n) e^{-i\omega\theta_n} + \vartheta'_n H_2(\omega\vartheta'_n) e^{-i\omega\theta'_n} \right],$$

где суммирование распространено на все импульсы, охваченные интервалом $(-A, A)$. Следовательно, для спектральной интенсивности $f(\omega)$ (по $\omega > 0$) имеем

$$\overline{\zeta_\omega \zeta^*_{\omega'}} = \frac{1}{2} f(\omega)\, \delta(\omega - \omega') =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n,m} \overline{\left[ \vartheta_n H_1(\omega\vartheta_n) e^{-i\omega\theta_n} + \vartheta'_n H_2(\omega\vartheta'_n) e^{-i\omega\theta'_n} \right] \left[ \vartheta_m H_1^*(\omega\vartheta_m) e^{i\omega\theta_m} + \right.}$$

$$\overline{\left. + \vartheta'_m H_2^*(\omega\vartheta'_m) e^{i\omega\theta'_m} \right]}.$$

Но $\theta$ и $\theta'$ распределены в $(-A, A)$ равномерно, так что

$$\overline{e^{iu\theta}} = \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} e^{iu\theta} d\theta = \frac{\sin uA}{uA} \to \frac{\pi}{A} \delta(u),$$

где последняя замена допустима при $A \to \infty$, что в дальнейшем и будет сделано. Далее, поскольку сами $\theta$ и $\theta'$ (но не их разности!) независимы от $\vartheta$ и $\vartheta'$, имеем:

$$\overline{F(\vartheta_n, \vartheta'_m)\, e^{i(\omega'\theta'_m - \omega\theta_n)}} = \overline{F(\vartheta_n, \vartheta'_m)\, e^{i\omega'(\theta'_m - \theta_n)}}\; \overline{e^{i(\omega' - \omega)\theta_n}} =$$

$$= \frac{\pi}{A} \overline{F(\vartheta_n, \vartheta'_m)\, e^{i\omega(\theta'_m - \theta_n)}}\, \delta(\omega - \omega'),$$

откуда следуют аналогичные выражения для тех случаев, когда все аргументы штрихованы или нештрихованы. В результате получаем

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi A}\sum_{n,\,m}\Big[\overline{\vartheta_n\,\vartheta_m\,H_1(\omega\vartheta_n)\,H_1^*(\omega\vartheta_m)\,e^{i\omega(\theta_m-\theta_n)}}+\overline{\vartheta'_n\,\vartheta'_m\,H_2(\omega\vartheta'_n)\,H_2^*(\omega\vartheta'_m)\,e^{i\omega(\theta'_m-\theta'_n)}}+ \tag{5}$$

$$+\overline{\vartheta_n\,\vartheta'_m\,H_1(\omega\vartheta_n)\,H_2^*(\omega\vartheta'_m)\,e^{i\omega(\theta'_m-\theta_n)}}+\overline{\vartheta'_n\vartheta_m\,H_1^*(\omega\vartheta_m)H_2(\omega\vartheta'_n)\,e^{i\omega(\theta_m-\theta'_n)}}\Big].$$

При этом $\theta'_n-\theta_n=\vartheta_n$ и

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_m-\theta_n=\sum_n^{m-1}\left(\vartheta_k+\vartheta'_k\right), && \theta'_m-\theta'_n=\sum_{n+1}^{m}\vartheta_k+\sum_n^{m-1}\vartheta'_k,\\
&\theta'_m-\theta_n=\sum_n^{m}\vartheta_k+\sum_n^{m-1}\vartheta'_k, && \theta_m-\theta'_n=\sum_{n+1}^{m-1}\vartheta_k+\sum_n^{m-1}\vartheta'_k
\end{aligned}\right\}\quad(m>n); \tag{6а}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_m-\theta_n=-\sum_m^{n-1}\left(\vartheta_k+\vartheta'_k\right), && \theta'_m-\theta'_n=-\sum_{m+1}^{n}\vartheta_k-\sum_m^{n-1}\vartheta'_k,\\
&\theta'_m-\theta_n=-\sum_{m-1}^{n-1}\vartheta_k-\sum_m^{n-1}\vartheta'_k, && \theta_m-\theta'_n=-\sum_m^{n}\vartheta_k-\sum_m^{n-1}\vartheta'_k
\end{aligned}\right\}\quad(m<n). \tag{6б}$$

Разобьем теперь сумму по $m$ в (5) на части с $m=n$, $m>n$ и $m<n$ и выделим в (6а) и(6б) те $\vartheta$ и $\vartheta'$, которые в (5) являются аргументами в множителях при экспонентах. Тогда, вводя характеристические функции

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\omega)&=\overline{e^{i\omega\vartheta}}=\int_0^\infty e^{i\omega\vartheta}\,p_1(\vartheta)\,d\vartheta;\\
\varphi_2(\omega)&=\overline{e^{i\omega\vartheta'}}=\int_0^\infty e^{i\omega\vartheta'}\,p_2(\vartheta')\,d\vartheta'
\end{aligned} \tag{7}$$

и обозначения

$$\begin{aligned}
&\overline{\vartheta^2\,|H_1(\omega\vartheta)|^2}=K_1(\omega); && \overline{\vartheta'^2\,|H_2(\omega\vartheta')|^2}=K_2(\omega);\\
&\overline{\vartheta H_1(\omega\vartheta)\,e^{i\omega\vartheta}}=R_1(\omega); && \overline{\vartheta' H_2(\omega\vartheta')e^{i\omega\vartheta'}}=R_2(\omega);\\
&\overline{\vartheta H_1(\omega\vartheta)}=S_1(\omega); && \overline{\vartheta' H_2(\omega\vartheta')}=S_2(\omega),
\end{aligned} \tag{8}$$

приводим (5) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
f(\omega)=\frac{1}{2\pi A}\sum_n\Big\{&K_1+K_2+R_1S_2+R_1S_2+\sum_{m>n}\Big[R_1S_1\,\varphi_2(\varphi_1\varphi_2)^{m-n-1}+\\
&+R_2S_2\,\varphi_1(\varphi_1\varphi_2)^{m-n-1}+R_1S_2\,(\varphi_1\varphi_2)^{m-n}+R_2S_1\,(\varphi_1\varphi_2)^{m-n-1}\Big]+\\
&+\sum_{m<n}\Big[R_1S_1\,\varphi_2\,(\varphi_1\,\varphi_2)^{n-m-1}+R_2S_2\,\varphi_1(\varphi_1\varphi_2)^{n-m-1}+\\
&+R_1S_2\,(\varphi_1\varphi_2)^{n-m}+R_2S_1\,(\varphi_1\varphi_2)^{n-m-1}\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

Выполнив суммирование по $m$, перейдем затем к пределу при $A\to\infty$. Суммирование по $n$ распространяется при этом на среднее число импульсов в интервале $(-A, A)$, равное $2A/T$, где $T$—средний период [1]:

$$T=T_1+T_2;\ T_1=\overline{\vartheta}=\int\limits_0^\infty \vartheta p_1(\vartheta)\,d\vartheta;\ T_2=\overline{\vartheta'}=\int\limits_0^\infty \vartheta' p_2(\vartheta')\,d\vartheta'.$$

В результате при всех $\omega$, для которых $\varphi_1\varphi_2\neq 1$, находим следующее окончательное выражение:

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi T}\left[K_1+K_2+\frac{R_1(S_1'\varphi_2+S_2)+R_2(S_1'+S_2\varphi_1)}{1-\varphi_1\varphi_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{R_1^*(S_1\varphi_2^*+S_2)+R_2(S_1+S_2\varphi_2^*)}{1-\varphi_1^*\varphi_2^*}\right]. \tag{9}$$

Если распределения $p_1(\vartheta)$ и $p_2(\vartheta')$ одинаковы, то $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$. Если, кроме того, одинаковы и формы импульсов, так что $H_1=H_2=H$, $K_1=K_2=K$ и т. д., то (9) дает

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi T}\left(K+\frac{RS^*}{1-\varphi}+\frac{R^*S}{1-\varphi^*}\right), \tag{10}$$

причем средний период равен теперь $T_1=T_2=T/2$. К этому же результату можно придти, если предположить, что длительность импульсов какого-либо одного сорта стягивается к нулю, например, $p_2(\vartheta')=\delta(\vartheta')$. Тогда $\varphi_2=1$, $K_2=R_2=S_2=0$ и из (9) снова получается формула (10), но, конечно, с периодом $T_1=T$.

Для квазипериодического процесса, т. е. такого, когда $\vartheta$ и $\vartheta'$ испытывают лишь малые флюктуации ($p_1(\vartheta)$ и $p_2(\vartheta')$ — острые распределения, сосредоточенные около средних значений $T_1$ и $T_2$), можно положить

$$\vartheta=T_1+\tau_1;\quad \vartheta'=T_2+\tau_2\quad (\overline{\tau_1}=\overline{\tau_2}=0)$$

и, разлагая все функции, входящие в (7) и (8), по степеням $\tau_1$ и $\tau_2$, ограничиться членами со средними квадратами $\overline{\tau_1^2}=\alpha_1^2$, $\overline{\tau_2^2}=\alpha_2^2$. Внося получающиеся выражения в (9), находим с этой точностью

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi T\left|1-e^{iu}\left[1-\frac{\omega^2}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\right]\right|^2}\left\{\alpha_1^2\left|u_1H_1(u_1)+u_2H_2(u_2)e^{iu_2}-\right.\right. \tag{11}$$
$$\left.\left.-f\frac{du_1H_1(u_1)}{du_1}(1-e^{iu})\right|^2+\alpha_2^2\left|u_1H_1(u_1)e^{iu_1}+u_2H_2(u_2)-f\frac{du_2H_2(u_2)}{du_2}(1-e^{iu})\right|^2\right\},$$

где

$$u_1=\omega T_1;\ u_2=\omega T_2;\ u=u_1+u_2=\omega T.$$

Из (11) видно, что спектр состоит из линий, отвечающих значениям $u=2\pi n$, т. е. расположенных на частотах $\omega_n=n2\pi/T$. Вводя малую расстройку $\delta=\omega-\omega_n$ в ближайшей окрестности гармоники $\omega_n$, получаем из (11):

$$f_n(\omega)=\frac{\omega_n^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{\pi T^3[\delta^2+(\omega_n^4/4T^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2]}\left|T_1H_1(\omega_nT_1)+T_2H_2(\omega_nT_2)e^{i\omega_nT_2}\right|^2. \tag{12}$$

Таким образом, ширина линии на уровне 1/2 есть

$$\Delta\omega_n=\frac{\omega_n^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{T}=\frac{4\pi^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{T^3}\,n^2, \tag{13}$$

т. е. растет как квадрат номера гармоники, а относительная ширина $\Delta\omega_n/\omega_n$ пропорциональна $n$:

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n}=\frac{2\pi\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)}{T^2}n. \tag{14}$$

Интегрируя (12) по частоте в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (что имеет смысл ввиду предположенной малости ширины линии), получаем интегральную энергию $n$-ой гармоники:

$$I_n=\frac{2}{T^2}\left|T_1H_1(\omega_nT_1)+T_2H_2(\omega_nT_2)e^{i\omega_nT_2}\right|^2. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что она равна энергии $n$-ой гармоники дискретного спектра того периодического процесса, который имел бы место в отсутствие флюктуаций. Таким образом, распределение спектральной интенсивности в окрестности $\omega_n$, согласно (12), (13) и (15), может быть записано в виде:

$$f_n(\omega)=\frac{I_n\Delta\omega_n}{2\pi\left[\delta^2+(\Delta\omega_n/2)^2\right]}. \tag{16}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Хургин, Научн. докл. высш. школы — Радиотехника и электроника, **1**, 96 (1958).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
3 ноября 1958 г.