

ВОЗДЕЙСТВИЕ ШУМОВ НА ГЕНЕРАТОР С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Р. Л. Стратонович, П. С. Ланда

Путем приближенного решения уравнения Фоккера—Планка получены вероятности возбуждения и срыва автоколебаний в генераторе с жестким возбуждением при наличии шумов и внешней периодической силы. Вычислены средние времена пребывания генератора в возбужденном и невозбужденном состояниях.

В последнее время все большее внимание привлекают задачи, связанные с нестационарными процессами в автоколебательных системах при воздействии случайных сил. К таким задачам относится исследование процессов возникновения колебаний в невозбужденном генераторе и установления стационарного колебательного режима. При этом существенный интерес представляет время установления колебаний. Процесс возникновения автоколебаний в генераторах с мягким возбуждением был рассмотрен в работах [1, 2]. В первой из них использовалось линейное приближение, соответствующее линейному уравнению колебаний (которое справедливо, когда амплитуды колебаний невелики); в другой работе был проведен учет нелинейности.

Для автоколебательной системы с жестким возбуждением использованные ранее методы становятся непригодными, и рассмотрение следует проводить на другой основе. Флюктуации при этом играют принципиально новую роль: под их воздействием первоначально невозбужденный генератор может возбудиться, несмотря на устойчивость состояния покоя. В то же время флюктуации могут послужить причиной обратного перехода: они могут сорвать уже имеющиеся колебания и перевести генератор в устойчивое невозбужденное состояние. Методами, предложенными в настоящей работе, могут быть исследованы оба эти процесса.

Рассматриваемая задача, в частности, имеет значение для систем автоматического регулирования. Из-за наличия обратной связи такие устройства часто являются потенциально автоколебательными системами и могут возбуждаться под воздействием случайных сил. Для практических целей важно уметь рассчитать это явление.

В качестве простейшего примера систем такого рода в настоящей статье рассматривается автоколебательная система второго порядка, режим работы которой выбран так, что выполняются условия жесткого возбуждения. Для указанной системы проводится расчет вероятностей возбуждения и срыва автоколебаний при наличии шумов и внешней периодической силы с помощью метода уравнения Фоккера—Планка, изложенного в работах [3, 4].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение генератора с жестким возбуждением при наличии шумов и внешней периодической силы можно записать следующим образом:

$$z + \omega_0^2 z = 2\delta(z)\dot{z} - \omega^2 E \sin \omega t - \omega^2 \zeta, \quad (1)$$

где $\delta(z) = -\delta(1 - 4\alpha z^2 + 8\beta z^4)$, $\zeta(t)$ — случайная стационарная функция с нулевым средним значением, представляющая собой шум на входе генератора. При такой записи уравнения (1) величины z , E и ζ имеют одинаковую размерность.

Введем новые переменные x , y так, чтобы

$$x = z \cos \omega t - (z/\omega) \sin \omega t; \quad y = z \sin \omega t + (\dot{z}/\omega) \cos \omega t.$$

При этом x и y будут представлять собой координаты изображающей точки на вращающейся фазовой плоскости. Уравнение (1) в координатах x , y запишется в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Delta y - \delta [1 - \alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 + y^2)^2] x + \omega E/2 + \omega \zeta \sin \omega t + s_1; \\ \dot{y} &= \Delta x - \delta [1 - \alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 + y^2)^2] y - \omega \zeta \cos \omega t + s_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где s_1 и s_2 — сумма членов, содержащих синусы и косинусы кратных гармоник ($\sin 2\omega t$, $\cos 2\omega t$ и т. д.), $\Delta = (\omega_0^2 - \omega^2)/2\omega \approx \omega_0 - \omega$ — расстройка.

Предполагается, что колебания в системе близки к гармоническим, т. е. x и y медленно меняются в течение периода. Требование медленности изменения x и y выполняется при следующих условиях, связывающих параметры системы, величину и характер внешних воздействий (см. [4]):

$$\delta \ll \omega; \quad \sqrt{\alpha} E \ll 2;$$

$$\sqrt{\zeta^2 \alpha} \ll 1 \quad \text{при } \tau_{\text{кор}} > T; \quad \sqrt{\alpha \omega x(\omega)} \ll 1 \quad \text{при } \tau_{\text{кор}} < T,$$

где $x(\omega)$ — половина спектральной плотности входного шума $\zeta(t)$ на частоте ω , $\tau_{\text{кор}}$ — время корреляции шума, T — период внешней силы. При этих условиях s_1 и s_2 в уравнениях (2) можно заменить их средними значениями за период.

Для применения аппарата уравнения Фоккера—Планка (см. [4]) требуется предположить также, что время корреляции шума во много раз меньше времени релаксации в системе, т. е. что $\delta \tau_{\text{кор}} \ll 1$ и $\tau_{\text{кор}} \omega E \sqrt{\alpha} \ll 2$. При этом предположении случайные функции, стоящие в правой части уравнений (2), можно приближенно заменить δ коррелированными независимыми случайными функциями $\xi(t)$ и $\xi'(t)$, имеющими тот же спектр в области низких частот и нулевые средние значения.

Из условия равенства спектральных плотностей в нуле можно вычислить коэффициент при δ -функции в выражении для функции корреляции $K(\tau) = 2\lambda^{-1} \delta(\tau)$ случайных процессов $\xi(t)$ и $\xi'(t)$:

$$\lambda^{-1} = \frac{\omega^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\zeta \zeta'} \cos \omega \tau d\tau = \frac{\omega^2}{4} z(\omega).$$

Используя сказанное выше, представим систему уравнений (2) в виде:

$$\dot{x} = \Delta y - \delta [1 - \alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 + y^2)^2] x + \omega E/2 + \xi = X + \xi; \quad (3)$$

$$y = -\Delta x - \delta [1 - \alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 + y^2)^2] y + \xi' = Y + \xi'$$

и запишем соответствующее уравнение Фоккера—Планка для двумерной плотности распределения x и y :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Xw) - \frac{\partial}{\partial y}(Yw) + \lambda^{-1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

2. РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Стационарное решение уравнения (4), удовлетворяющее условию исчезновения вероятности на бесконечности, можно получить, если положить $\Delta=0$ и ввести потенциальную функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую соотношениям $-du/dx=X$, $-du/dy=Y$. Используя выражения (3) для X и Y , находим:

$$u(x, y) = \delta [(x^2 + y^2)/2 - \alpha(x^2 + y^2)^2/4 + \beta(x^2 + y^2)^3/6] - \omega E x / 2.$$

При этом указанное решение уравнения Фоккера—Планка запишется в виде:

$$\psi(x, y) = C \exp[-\lambda u(x, y)],$$

где C определяется из условия нормировки.

В полярных координатах A и φ имеем:

$$\psi(A, \varphi) = C \exp[-\lambda u(A, \varphi)], \tag{5}$$

где

$$u(A, \varphi) = \delta (A^2/2 - \alpha A^4/4 + \beta A^6/6) - (\omega E/2) A \cos \varphi,$$

причем

$$\psi(x, y) dx dy = \psi(A, \varphi) A dA d\varphi.$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении малости шумов и внешней силы:

$$\lambda \delta \gg \alpha; \tag{6}$$

$$\sqrt{\alpha} \omega E \ll 2\delta. \tag{7}$$

Плотность распределения $\psi(A, \varphi)$ при данном виде, потенциальной функции и условии (6) имеет две области наибольшей вероятности, соответствующие двум устойчивым состояниям генератора: невозбужденному и возбужденному. Между ними расположена область малой вероятности, соответствующая неустойчивым состояниям генератора. Изображающая точка, находясь в области малой вероятности, спустя достаточно большое время перейдет с определенной вероятностью в одну из первых двух областей. При этом, вообще говоря, вероятность перехода в первую или вторую область будет различна; однако должна существовать некоторая граничная линия Γ_1 , отличающаяся тем, что вероятность перехода изображающей точки в ту или другую область из любой точки этой линии будет одинакова.

Уравнение такой линии, которую мы назовем границей возбуждения, можно получить, пользуясь условием максимума потенциальной функции по направлению нормали к границе.

Указанная граничная линия Γ_1 делит плоскость x, y на две области S_1 и S_2 , первая из которых включает в себя начало координат, а вторая — некоторую кривую Γ_2 максимальной вероятности, удовлетворяющую условию минимума потенциальной функции по направлению нормали к этой кривой.

Назовем область S_1 областью невозбужденных состояний, а S_2 — областью возбужденных состояний (рис. 1).

Уравнения границы возбуждения Γ_1 и кривой Γ_2 при выполнении условия (7) можно получить приближенно в явном виде:

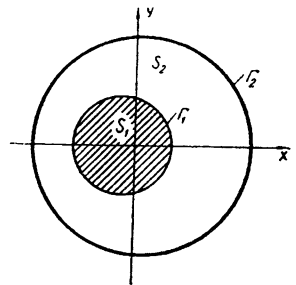


Рис. 1.

$$A = A_1(\varphi) \approx R_1 - \frac{\omega E}{2\delta} \frac{\beta \cos \varphi}{d_1^2 \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \quad (\text{для } \Gamma_1);$$

$$A = A_2(\varphi) \approx_2 + \frac{\omega E}{2\delta} \frac{\beta \cos \varphi}{d_2^2 \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \quad (\text{для } \Gamma_2),$$

$$\text{где } d_{1,2} = d_{1,2} / \sqrt{2\beta}; \quad d_{1,2}^2 = \alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}.$$

Эти выражения получены путем приближенного решения уравнений

$$du/dn|_{\Gamma_1} = 0; \quad du/dn|_{\Gamma_2} = 0$$

относительно Γ_1 и Γ_2 (здесь n обозначает нормаль к соответствующей границе). Ясно, что в случае отсутствия внешней силы кривые Γ_1 и Γ_2 являются концентрическими окружностями с центром в начале координат, радиусы которых R_1 и R_2 равны амплитудам предельных циклов системы. Наличие же малой внешней периодической силы приводит к некоторым поправкам, выражаемым вторыми членами в уравнениях линий Γ_1 и Γ_2 . С точностью до членов первого порядка относительно $\omega E/2\delta$ кривые Γ_1 и Γ_2 также представляют собой окружности радиусов R_1 и R_2 , но с центрами в точках $x_{1,2} = \mp (E/2\delta)\beta\alpha_{1,2}^{-2}(\alpha^2 - 4\beta)^{-1/2}$ соответственно.

3. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ И СРЫВА АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ

Поскольку возбуждение и срыв автоколебаний в генераторе под влиянием флюктуационных воздействий являются случайными процессами, можно вычислять лишь их вероятности за определенный интервал времени.

Обозначим вероятность невозбужденного состояния генератора $p(t)$, а вероятность возбужденного состояния — $q(t)$. Эти вероятности можно найти путем интегрирования функции плотности распределения по соответствующим областям:

$$p(t) = \int_{S_1} \omega(t, A, \varphi) dS; \quad (8)$$

$$q(t) = \int_{S_2} \omega(t, A, \varphi) dS. \quad (9)$$

Желая получить зависимость вероятностей (8) и (9) от времени, необходимо найти $\omega(t, A, \varphi)$ как функцию времени, т. е. решить нестационарное уравнение Фоккера—Планка.

В реальной автоколебательной системе, работающей в жестком режиме возбуждения и находящейся под воздействием шумов, всегда протекают одновременно два противоположных процесса: возбуждение колебаний и срыв. Даже если мы рассматриваем только отдельный процесс возбуждения генератора, изображающая точка при этом может несколько раз пересекать границу возбуждения в противоположных направлениях.

Поэтому поток вероятности через границу целесообразно рассматривать как результат наложения двух встречных потоков G^+ и G^- . Результирующий поток G будет равен их разности $G^+ - G^-$. При вычислении каждого из этих потоков в отдельности можно полагать, что изображающая точка после первого прикосновения к границе прилипает к ней, т. е. выбывает из рассмотрения. При этом задача сводится к классической задаче о достижении границы, для решения

которой требуется найти решение нестационарного уравнения Фоккера—Планка с нулевым граничным условием:

$$\omega(t, A, \varphi) \Big|_{\Gamma_1} = 0. \quad (10')$$

Найдем сначала вероятность $p(t)$ при условиях, что в начальный момент генератор был невозбужден и что обратный переход из возбужденного состояния в невозбужденное невозможен (т. е. предполагается, что встречный поток G^- отсутствует).

Запишем уравнение Фоккера—Планка (4) в виде:

$$\partial \omega / \partial t = - \operatorname{div} \mathbf{g}_\omega, \quad (11)$$

где \mathbf{g}_ω есть вектор плотности потока вероятности, имеющей координаты:

$$\mathbf{g}_{\omega A} = - \frac{\partial u}{\partial A} \omega - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial A}; \quad \mathbf{g}_{\omega \varphi} = - \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \omega - \frac{1}{\lambda A} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}.$$

Будем решать уравнение (11) с нулевым граничным условием (10) методом разделения переменных:

$$\omega(t, A, \varphi) = T(t) v(A, \varphi).$$

Тогда для $T(t)$ и $v(A, \varphi)$ получаем уравнения:

$$dT/dt + kT = 0; \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{g}_v = kv. \quad (13)$$

Решения уравнения (13), как известно, образуют ортонормированную систему собственных функций $v_i(A, \varphi)$, соответствующих системе собственных значений $k = k_{1i}$. Полное решение уравнения (11) будет иметь вид:

$$\omega(t, A, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i e^{-k_{1i} t} v_i(A, \varphi); \quad (14)$$

$$C_i = \int_{S_1} v_i \omega(0, A, \varphi) dS.$$

При достаточно малом шуме пересечения границы будут происходить редко, вследствие чего наименьшее собственное значение k_{10} будет мало, в то время как остальные k_{1i} будут иметь значительно большую величину. Поэтому спустя некоторое время после начала процесса, малое по сравнению с $1/k_{10}$, но большее, чем $1/k_{11}$, $1/k_{12}$, ..., существенным окажется лишь первый член ряда (14); остальными членами можно будет пренебречь.

Из сказанного следует, что для всех моментов времени, удовлетворяющих указанным условиям, можно положить:

$$\omega(t, A, \varphi) = C_0 e^{-k_{10} t} v_0(A, \varphi), \quad (15)$$

и, следовательно,

$$p(t) = C_0 \int_{S_1} v_0(A, \varphi) dS e^{-k_{10} t}.$$

Поток вероятности $\omega(t, A, \varphi)$ через границу равен

$$G^+(t) = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{g}_{\omega n} dl,$$

где $\mathbf{g}_{\omega n}$ — нормальная составляющая плотности потока. Подставив в это выражение (15) и используя уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{g} v_0 = k_{10} v_0, \quad (16)$$

получаем:

$$G^+(t) = k_{10} p(t). \quad (17)$$

Таким образом, поток вероятности из области невозбужденных состояний в область возбужденных состояний пропорционален вероятности нахождения изображающей точки в первой области, причем коэффициент пропорциональности, как можно показать, представляет собой среднюю частоту перехода из одной области в другую.

Аналогичным способом можно получить, что обратный поток вероятности пропорционален вероятности нахождения изображающей точки во второй области:

$$G^-(t) = k_{20} q(t) = k_{20} [1 - p(t)], \quad (18)$$

где k_{20} — наименьшее собственное значение уравнения (13) для области S_2 .

Так как в действительности существуют оба эти потока, то уравнение для вероятности невозбужденного состояния можно записать в виде:

$$2dp/dt = -G_w^+ + G_w^- \quad (19)$$

(коэффициент 2 здесь ставим потому, что, достигнув границы, изображающая точка может с равной вероятностью перейти как в область S_1 , так и в область S_2 , т. е. истинный поток вероятности через границу будет вдвое меньше, чем это следует из выражений (17) и (18)).

Решение уравнения (19), удовлетворяющее начальному условию $p(0) = 1$, соответствует вероятности того, что генератор к моменту времени t останется невозбужденным, если в начальный момент он находился в невозбужденном состоянии. Это решение имеет вид:

$$(k_{10} + k_{20}) p_1(t) = k_{20} + k_{10} e^{-\frac{k_{10} + k_{20}}{2} t}. \quad (20)$$

Вероятность срыва автоколебаний в системе можно найти путем решения уравнения (19) при нулевом начальном условии:

$$\left((k_{10} + k_{20}) p_2(t) = k_{20} (1 - e^{-\frac{k_{10} + k_{20}}{2} t}) \right). \quad (21)$$

Таким образом, для решения задачи достаточно найти k_{10} и k_{20} , используя уравнение (16) для k_{10} и аналогичное (16) уравнение для k_{20} с нулевыми граничными условиями. Эти уравнения можно решить приближенно при выполнении условий (6) и (7). Тогда для k_{10} и k_{20} получаем следующие приближенные выражения:

$$\frac{k_{10}}{2} = R_1 \delta \sqrt{\frac{\lambda \delta}{2\pi}} \left[\sqrt{x_{10} I_0(\lambda \omega ER_1/2)} + \frac{3\alpha R_1 - 10\beta R_1^3}{\sqrt{x_{10}}} \times \right. \\ \left. \times x_1 I_1(\lambda \omega ER_1/2) \right] e^{-\lambda u_0(R_1)}; \quad (22)$$

$$\frac{k_{20}}{2} = \frac{R_1 \delta x_{20}}{2\pi R_2 x_{10}} \sqrt{\frac{x_{10}^2}{x_{20}^2}} \left[\sqrt{x_{20} I_0(\lambda \omega ER_2/2)} + (3\alpha R_2 - 10\beta R_2^3) x_2 I_1(\lambda \omega ER_2/2) \right] \times \\ \times e^{-\lambda [u_0(R_1) - u_0(R_2)]}, \quad (23)$$

где

$$x_{10, 20} = \mp (1 - 3\alpha R_{1,2}^2 + 5\beta R_{1,2}^4); u_0(R_{1,2}) = \delta(R_{1,2}^2/2 - \alpha R_{1,2}^4/4 + \beta R_{1,2}^6/6).$$

Заметим, что величины k_{10} и k_{20} вследствие экспоненциального закона распределения вероятностей характеризуют также среднее время и дисперсию времени пребывания генератора в том или ином состоянии: $t_{1cf} = 2/k_{10}$ — среднее время пребывания генератора в невозбужденном состоянии; $t_{2cp} = 2/k_{20}$ — среднее время пребывания генератора в состоянии возбуждения; $\sigma_{1,2}^2 = 4k_{10,20}^{-2}$ — соответствующие значения дисперсии времени.

Рассмотрим два крайних случая:

а) внешняя сила отсутствует; тогда

$$k_{10}/2 = \delta R_1 \sqrt{\lambda \delta x_{10}/2\pi}^{-1} e^{-\lambda u_0(R_1)}; \tag{24}$$

$$k_{20}/2 = (\delta R_1/2\pi R_2) \sqrt{x_{10}x_{20}} e^{-\lambda [u_0(R_1) - u_0(R_2)]}; \tag{25}$$

б) внешняя сила достаточно велика, так что $\lambda \omega E \gg \sqrt{\alpha}$ (при этом условии (7) остается в силе). В этом случае выражения для $k_{10}/2$ и $k_{20}/2$ можно получить, используя асимптотическое поведение функций Бесселя:

$$\frac{k_{10}}{2} = \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{\frac{2\delta R_1 x_{10}}{\omega E}} \left(1 + \frac{3\alpha R_1 - 10\beta R_1^3}{x_{10}} x_1 \right) e^{-\lambda u(R_1, 0)} \tag{26};$$

$$\frac{k_{20}}{2} = \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \sqrt{x_{10}x_{20}} \frac{1 + (3\alpha R_1 - 10\beta R_1^3)x_1 x_{10}^{-1}}{1 + (3\alpha R_2 - 10\beta R_2^3)x_2 x_{20}^{-1}} e^{-\lambda [u(R_1, 0) - u(R_2, 0)]}, \tag{27}$$

где

$$u(R_{1,2}, 0) = \delta(R_{1,2}^2/2 - \alpha R_{1,2}^4/4 + \beta R_{1,2}^6/6) - (\omega E/2) R_{1,2}.$$

Из выражений (24), (25), (26), (27) следует, что с ростом внешней силы средняя частота перехода изображающей точки из области невозбужденных состояний в область возбужденных состояний возрастает, т. е. внешняя сила способствует возбуждению генератора.

При этом основная зависимость k_{10} от внешней силы описывается множителем $\exp(\lambda ER_1/2)$; средняя же частота срыва автоколебаний с ростом внешней силы, напротив, уменьшается в основном по закону $\exp[-\lambda \omega E (R_2 - R_1)/2]$.

В качестве конкретного примера применения полученных результатов рассмотрим электронный генератор с жестким возбуждением, имеющий следующие параметры: $\delta = 0,09 \text{ сек}^{-1}$; $\alpha = 2,31 \cdot 10^{-3} \text{ в}^{-2}$; $\beta = 10^{-6} \text{ в}^{-4}$; $\omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}$. Эти параметры соответствуют амплитудам предельных циклов, равных $R_1 = 24 \text{ в}$; $R_2 = 42 \text{ в}$.

В случае отсутствия внешней силы потенциальная функция такой системы имеет вид, показанный на рис. 2.

По формулам (24) и (25) вычислены средние частоты перехода генератора из одного состояния в другое и обратно как функции интенсивности шума λ^{-1} . Результаты вычислений приведены на графиках рис. 3, 4. На этих же графиках приведены кривые зависимости

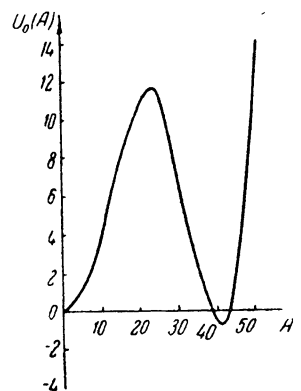


Рис. 2.

кривые зависимости

среднего времени пребывания генератора в том или ином состоянии от интенсивности шума.

Из графика потенциальной функции видно, что среднее время пребывания генератора в возбужденном состоянии должно быть значительно больше, чем в невозбужденном, так как при переходе

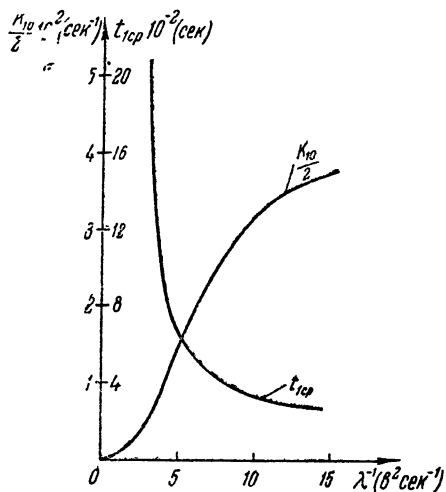


Рис. 3.

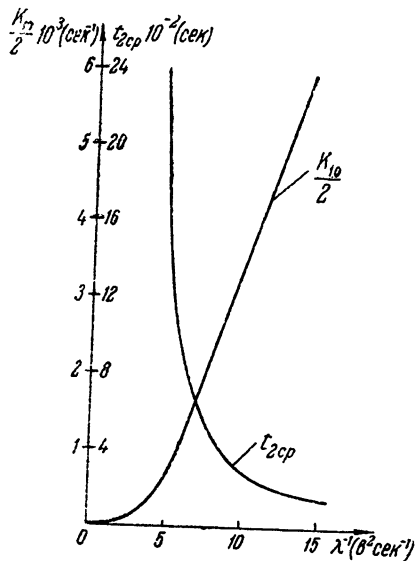


Рис. 4.

в область невозбужденных состояний из области возбуждения изображающей точке приходится преодолевать более высокий потенциальный барьер, чем при обратном переходе.

Результаты настоящей работы получены в предположении потенциальности поля (в нашем случае это соответствует нулевой расстройке). Однако при некоторых условиях их можно распространить и на случай непотенциального поля, найдя из физических соображений наиболее вероятные пути перехода изображающей точки из одной области в другую и интегрируя силы по этим путям.

Методы настоящей работы можно также обобщить на системы более высокого порядка, разбив все фазовое пространство на области, соответствующие возбужденным и невозбужденным состояниям.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность С. П. Стрелкову за большое внимание к работе и ряд ценных советов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П. С. Гоноровский, ДАН СССР, **94**, 869 (1954).
2. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, **1**, 1262 (1959).
3. А. А. Андронов, Собрание трудов, изд. АН СССР, М.—Л., 142, 1956.
4. Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника, **3**, 497 (1958).

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 мая 1958 г.