ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том II, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1959*

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ

В. А. Солнцев, А. С. Тагер

Изложен метод исследования периодического взаимодействия электронных потоков, основанный на представлении о пространственных гармониках тока, и рассмотрено его применение к ряду конкретных задач. Показано, что при периодическом взаимодействии нарастание сигнала, кроме основной полосы частот (соответствующей непрерывному взаимодействию), возможно также в узких частотных интервалах (полосах взаимодействия), лежащих в более коротковолновой области. Получены выражения для границ полос взаимодействия и постоянных распространения собственных волн системы. В высших полосах взаимодействия рабочая частота практически не зависит от плотности тока и ограничивается сверху величиной разброса скоростей электронов.

ВВЕДЕНИЕ

При переходе к волнам миллиметрового диапазона важное значение приобретают способы генерации и усиления колебаний, основанные на использовании чисто электронных механизмов взаимодействия. Известным примером применения таких способов является обычная двухлучевая лампа.

Теоретическому анализу двухлучевых ламп посвящено большое число работ. Однако во всех этих работах рассматривается простейший вариант двухлучевого взаимодействия—равномерное и непрерывное взаимодействие электронных потоков, движущихся прямолинейно с различными, но постоянными скоростями. Между тем возможно осуществить другие варианты многолучевых приборов, в которых взаимодействие электронных потоков носит не непрерывный, а периодический характер.

Примеры двухлучевых систем с периодическим взаимодействием электронных потоков приведены на рис. 1. На рис. 1а, б, в представлены системы, в которых периодичность взаимодействия обусловлена, в основном, изменением параметров электронных потоков — скорости электронов (рис. 1 а), диаметров потоков (рис. 1 б), диаметра трубки дрейфа (рис. 1 в). В системах, изображенных на рис. 1 г, д, периодически изменяется величина связи между потоками либо путем установки между потоками металлической перегородки со щелями (рис. 1г), либо путем специального подбора формы траекторий электронов, например, при фокусировке типа „слалом“ (рис. 1 д).

Периодическое взаимодействие электронных потоков имеет ряд особенностей, отличающих его от непрерывного взаимодействия и открывающих некоторые дополнительные возможности для использования чисто электронного механизма в целях усиления и генерации колебаний коротковолновой части диапазона СВЧ. К таким особенностям следует, прежде всего, отнести разделение всего рабочего диапазона частот на последовательность полос взаимодействия, где возможно нарастание сигнала, и полос устойчивости, где нарастание сигнала невозможно. Наличие высших полос взаимодействия позволяет при заданной разности скоростей электронных потоков $2\Delta v$ и плазменной

частоте ω_p работать на более высоких частотах, чем в случае непрерывного взаимодействия, где, как известно, максимальная рабочая частота ω ограничивается условием [1]

$$\omega\Delta v < \sqrt{2}\,\omega_p v_{ср}$$

($v_{ср}$—средняя скорсеть электронных потоков).

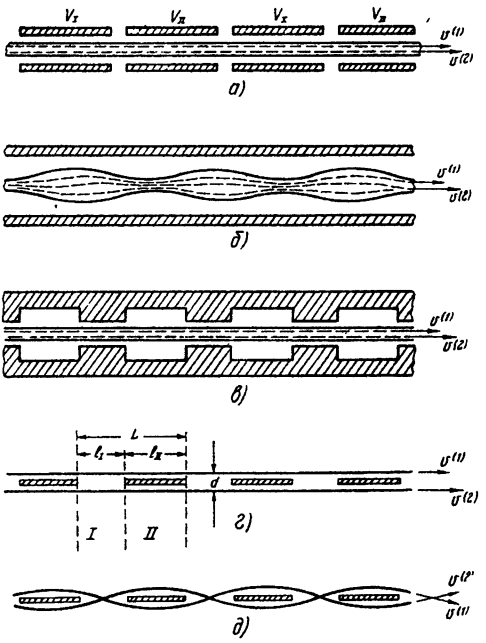

Рис. 1. Различные варианты периодического взаимодействия электронных потоков.

Причину появления полос взаимодействия при периодическом взаимодействии электронных потоков качественно можно объяснить на примере одной из систем, изображенных на рис. 1. Рассмотрим, например, систему рис. 1 г. Допустим, что электроны различных потоков взаимодействуют друг с другом только в момент прохождения их мимо одной и той же щели. Обозначим период системы через L и будем считать щели настолько узкими, что угол пролета электронов мимо щели близок к нулю. В каждом из электронных потоков распространяются две волны пространственного заряда — медленная и быстрая, скорости которых

$$v_{ф\pm} = \frac{v}{1 \pm \omega_p/\omega},$$

где v — скорость электронов.

Как известно[2], при малой амплитуде сигнала непрерывное взаимодействие между электронными потоками осуществляется, когда быстрая волна пространственного заряда одного потока и медленная волна пространственного заряда другого потока находятся в синхронизме, т. е. когда сдвиг фазы между этими волнами не изменяется вдоль потоков. В случае периодического взаимодействия можно сформулировать аналогичное условие: взаимодействие между пучками будет иметь место, если при смещении от какой-либо щели к соседней изменение фазы быстрой волны пространственного заряда одного потока равно изменению фазы медленной волны пространственного заряда другого потока или отличается от него на $2\pi k$, где $k \geqslant 0$—целое число. Это условие можно записать в виде:

$$\omega L / v^{(1)}_{ф\pm} = \omega L / v^{(2)}_{ф\mp} + 2\pi k,$$

где индексы (1) и (2) относятся соответственно к первому и второму потоку.

Формула (1) после простых преобразований дает:

$$\left(\frac{1}{v^{(1)}} - \frac{1}{v^{(2)}}\right)\omega L = \mp\left(\frac{\omega_p^{(1)}}{v^{(1)}} + \frac{\omega_p^{(2)}}{v^{(2)}}\right)L + 2\pi k \qquad (2)$$

и при $|v^{(2)} - v^{(1)}| \ll v^{(1)}$, $v^{(2)}$ и $\omega_p^{(1)} = \omega_p^{(2)} = \omega_p$ преобразуется к виду:

$$\omega\Delta v / v_{ср} = \mp\,\omega_p + \Omega_k; \quad \Omega_k = (\pi v_ф / L)\,k. \qquad (3)$$

В выражениях (1) — (3) целое число k есть номер полосы взаимо-

действия. Из (2) и (3) непосредственно следует, что в соответствии со сделанными выше замечаниями в высших полосах взаимодействия, где $k > 0$ и $\Omega_k \gg \omega_p$, рабочая частота практически не зависит от плотности электронного тока (от ω_p).

Наличие высших полос взаимодействия можно трактовать также, исходя из представления о пространственных гармониках электронного потока. Обратимся опять к системе рис. 1 г. Величина электрического поля E, действующего со стороны одного потока на другой, периодически изменяется в пространстве с периодом L, и, следовательно, поле может быть представлено в виде совокупности пространственных гармоник:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \exp[j(\varphi + 2\pi n)z/L] , \tag{4}$$

распространяющихся со скоростями

$$v_n = \omega L/(\varphi + 2\pi n). \tag{5}$$

Сдвиг фазы φ на период L для медленной и быстрой волн пространственного заряда равняется соответственно:

$$\varphi_{\pm} = \frac{\omega L}{v_{\Phi\pm}} = \frac{\omega L}{v}\left(1 \pm \frac{\omega_p}{\omega}\right) . \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получаем для скоростей пространственных гармоник потока (1) следующее выражение:

$$\frac{c}{v^{(1)}_{n\pm}} = \frac{c}{v^{(1)}} + n\frac{\lambda}{L} \pm \frac{\lambda}{\Lambda^{(1)}_p} , \tag{7}$$

где $\Lambda^{(1)}_p = 2\pi v^{(1)}/\omega^{(1)}_p$ — плазменная длина волны в первом потоке.

Аналогичное выражение справедливо для скоростей пространственных гармоник поля, создаваемого вторым потоком.

Эффективное взаимодействие может быть получено при синхронизме n-ой пространственной гармоники быстрой (медленной) волны одного пучка с m-ой пространственной гармоникой медленной (быстрой) волны второго пучка, т. е. при выполнении условия $v^{(2)}_{n\pm} = v^{(2)}_{m\mp}$, которое, как нетрудно убедиться, воспользовавшись формулой (7), совпадает с (2) при $k = m - n$.

Таким образом, в каждой полосе взаимодействия попарно синхронизированы все пространственные гармоники одного потока со всеми пространственными гармониками второго потока, так что в каждой паре разность номеров обеих пространственных гармоник равна номеру полосы взаимодействия.

Соотношения вида (3), (7) характерны не только для рассмотренной здесь системы (рис. 1г), в которой периодически изменяется связь между потоками, но и для любых систем с периодическим взаимодействием электронных потоков, в частности, для всех систем, изображенных на рис. 1. Следует только отметить, что для систем с периодическим изменением параметров электронных потоков (рис. 1 а, б, в) в выражениях (3) и (7) необходимо для величин, относящихся к электронному потоку (скорости электронов, плазменной частоты), брать усредненные по периоду значения. При этом (как показано в [3]) усреднять по периоду следует величины, обратные скорости и квадрату плазменной длины волны.

Правильность приведенных здесь соотношений подтверждается более строгим анализом, изложенным в следующем разделе, где приводится общий метод расчета периодического взаимодействия двух электронных потоков для случая малого пространственного заряда.

1. ВЫВОД И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

Теория периодического взаимодействия двух электронных потоков была развита в работе [1] для одного частного случая, когда периодически изменялась средняя (по времени) скорость электронов вдоль направления их движения (рис. 1 а). Здесь эта теория распространяется на общий случай периодического взаимодействия электронных потоков. Анализ проводится при некоторых упрощающих предположениях, которые ниже специально оговариваются.

Рассмотрим вначале два прямолинейных электронных потока, движущихся со скоростями $v^{(1)}(z)$ и $v^{(2)}(z)$ вдоль оси z периодической структуры. Слабое изменение сечения $\sigma^{(1)}(z)$ и $\sigma^{(2)}(z)$ этих пучков вдоль оси z можно учесть, считая, что продольные компоненты постоянных составляющих плотностей токов $J^{(1)}$ и J зависят от координаты z по закону

$$J^{(l)}(z)=I^{(l)}/\sigma^{(l)}(z), \quad l=1,2. \tag{8}$$

Пренебрежем влиянием на взаимодействие поперечных компонент тока. Ограничиваясь теорией малого сигнала, имеем для каждого пучка (индексы (1) и (2) опускаем):

$$J(z)=\rho(z)\,v(z); \tag{9}$$

$$i(x, y, z)=\rho(z)\,\tilde{v}(x, y, z)+v(z)\tilde{\rho}(x, y, z),$$

где $\tilde{\rho}(x, y, z)$, $i(x, y, z)$, $\tilde{v}(x, y, z)$ — переменные составляющие плотности пространственного заряда, z-ой компоненты плотности тока и скорости электронов; $\rho(z)$, $J(z)$, $v(z)$ — соответствующие постоянные составляющие. Временной множитель $e^{j\omega t}$ везде опускаем.

Подставляя (8), (9) и уравнение непрерывности

$$j\omega\tilde{\rho}=-\partial i/\partial z \tag{10}$$

в уравнение движения электрона, можно получить уравнение, связывающее высокочастотный ток пучка с действующим на него продольным высокочастотным электрическим полем $E(x, y, z)$. Однако все соотношения значительно упрощаются, если ввести вместо высокочастотных компонент скорости, плотности тока и пространственного заряда эквивалентные им величины по формулам:

$$v_э=\tilde{v}\exp\left[j\int_0^z(\omega/v)d\zeta\right];\ i_э=i\exp\left[j\int_0^z(\omega/v)\,d\zeta\right];$$

$$\rho_э=\rho\exp\left[j\int_0^z(\omega/v)d\zeta\right]. \tag{11}$$

При этом уравнение движения

$$j\omega\tilde{v}+\partial(v\tilde{v})/\partial z=\eta E \quad (\eta=e/m) \tag{12}$$

можно записать в виде:

$$vv_э=\int\eta E\exp\left[j\int_0^z(\omega/v)\,d\zeta\right]dz. \tag{13}$$

Подставляя в (13) выражение эквивалентной скорости

$$v_э=(v^2/j\omega J)\,(di_э/dz), \tag{14}$$

которое следует из (8) — (11), получаем соотношение, связывающее эквивалентную плотность тока с продольным электрическим полем:

$$i_э = j\omega\varepsilon_0 \int \left\{ \beta_p^2 \int E \exp\left[j \int_0^z (\omega/v) d\varsigma \right] dz \right\} dz \qquad (\beta_p = \omega_p/v). \qquad (15)$$

Это соотношение, справедливое строго лишь для прямолинейных электронных потоков, в некотором приближении можно применять также и к пучкам с криволинейной траекторией, если можно пренебречь поперечным взаимодействием пучков по сравнению с продольным взаимодействием. Например, для системы, изображенной на рис. 1 д, такое пренебрежение справедливо при условии, что размеры участка вблизи пересечения электронных пучков, где имеет место их эффективное взаимодействие, меньше длины волны в пучке $\lambda v/c$, а для системы, изображенной на рис. 1 б,—при условии достаточно большой напряженности фокусирующего магнитного поля. При этом под E следует понимать проекцию высокочастотного электрического поля на траекторию электронного потока и подставлять в уравнение (15) вместо координаты z значения криволинейной координаты, совпадающей по направлению с траекторией электронного пучка и равной длине, отсчитанной вдоль этой траектории.

Другая пара соотношений, связывающих высокочастотные поля и токи, выводится из теории возбуждения периодических структур заданными токами[5]. Если $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ — продольные компоненты полей, возбуждаемых соответственно первым и вторым токами $i^{(1)}$ и $i^{(2)}$, а $E_{\pm s}$—продольная компонента $\pm s$-ой собственной волны периодической структуры, то

$$E^{(l)} = \sum \left(C_s^{(l)} E_{-s} + C_{-s}^{(l)} E_{-s} \right) - i^{(l)}/j\omega\varepsilon_0 \qquad (l=1,2), \qquad (16)$$

где

$$C_s^{(l)} = \frac{1}{N_s} \int_{-\infty}^{z} dz \int_{\sigma(l)} i^{(l)} E_{-s} d\sigma; \quad C_{-s}^{(l)} = \frac{1}{N_s} \int_{z}^{\infty} dz \int_{\sigma(l)} i^{(l)} E_s d\sigma, \qquad (17)$$

N_s—нормирующий множитель, равный (в системе без потерь) учетверенному потоку мощности s-ой волны.

Дальнейший расчет сводится к решению уравнения (15), в правую часть которого подставляется выражение для поля как суммы полей, возбуждаемых токами обоих пучков:

$$E = E^{(1)} + E^{(2)}. \qquad (18)$$

До сих пор не делалось каких-либо предположений о характере изменения плазменной частоты ω_p и скорости электронов вдоль пучков. Допустим теперь, что ω_p и v изменяются периодически с периодом L, равным периоду внешней периодической структуры*. Тогда высокочастотный ток пучков естественно искать в виде:

$$i^{(l)}(x, y, z) = i_{\text{пер}}^{(l)}(x, y, z) e^{-j\Gamma z} = \sum_n i_n^{(l)}(x,y) \exp[-j[\Gamma + 2\pi n/L)z], \qquad (19)$$

где $i_{\text{пер}}^{(l)}(x, y, z)$ — периодические по z функции с периодом L, а Γ—постоянная, подлежащая определению. При этом уравнение (16) для продольных составляющих поля, возбуждаемого заданным током в точках, где этот ток не равен нулю, можно записать в виде (см. приложение):

---

* Если периоды изменения параметров электронного пучка и периодической структуры не равны, но соизмеримы, то за L может быть принята величина наименьшего общего кратного этих периодов.

$$E^{(l)}(x, y, z) = -\frac{i^{(l)}(x, y, z)}{j\omega\varepsilon_0}\alpha^{(l)}(x, y, z), \qquad (20)$$

где $\alpha^{(l)}(x, y, z)$—периодические функции z с периодом L.

В дальнейшем нас не будет интересовать случай синхронизма пространственных гармоник тока и волн периодической структуры, разобранный в[3], а будет рассматриваться только синхронизм пространственных гармоник тока между собой. В этом случае (когда в формуле А. 6 выражения вида $\beta_s + (\Gamma + 2\pi n/L)$ не обращаются в нуль) функции $\alpha(x, y, z)$ можно рассматривать как коэффициенты депрессии, характеризующие уменьшение продольных составляющих кулоновских сил в данной точке x, y, z электронного пучка по сравнению с силами, возникающими в бесконечно широком электронном потоке, во всех точках поперечного сечения которого плотность тока равна $i^{(l)}(x, y, z)$. Переходя к эквивалентной плотности тока, соотношение (20) можно переписать в виде:

$$E^{(l)}(x, y, z) = -\alpha^{(l)}(x, y, z)\frac{i_э^{(l)}(x, y, z)}{j\omega\varepsilon_0}\exp\left[-j\int_0^z(\omega/v^{(l)})\,d\zeta\right]. \qquad (21)$$

Ограничиваясь рассмотрением достаточно тонких пучков, поперечные размеры которых малы по сравнению с $\lambda v/c$ будем считать высокочастотное поле и плотность тока постоянными в поперечном сечении пучка. При этом коэффициент депрессии можно определить также и в точках x, y, z вне пучка как отношение продольного электрического поля в этих точках к полю в бесконечно широком электронном потоке, плотность тока которого равна плотности тока в данном сечении рассматриваемого пучка. Обозначим через $E_j^{(l)}(z)$ поле, создаваемое током l-го пучка в точках, где проходит j-й пучок, а через $\alpha_j^{(l)}(z)$—коэффициент депрессии этого поля:

$$E^{(l)}(x^{(j)}, y^{(j)}, z) = E_j^{(l)}(z); \quad \alpha^{(l)}(x^{(j)}, y^{(j)}, z) = \alpha_j^{(l)}(z). \qquad (22)$$

Подставляя (18) и (21) в (15) и используя обозначения (22), получим в случае тонких пучков систему двух уравнений для эквивалентных плотностей тока $i_э^{(1)}$ и $i_э^{(2)}$:

$$i_э^{(1)} = -\int\left(\beta_p^{(1)}\right)^2\left(\int\alpha_1^{(1)}\,i_э^{(1)}\,dz + \int\mu_1^{(2)}\,e^{j\Gamma_0 z}i_э^{(2)}\,dz\right)dz; \qquad (23)$$

$$i_э^{(2)} = -\int\left(\beta_p^{(2)}\right)^2\left(\int\mu_p^{(1)}\,e^{-j\Gamma_0 z}\,i_э^{(1)}\,dz + \int\alpha_2^{(2)}\,i_э^{(2)}\,dz\right)dz,$$

где

$$\mu_1^{(2)}(z) = \alpha_1^{(2)}(z)\exp\left[j\int_0^z\left(\frac{\omega}{v^{(1)}} - \frac{\omega}{v^{(2)}}\right)d\zeta - j\Gamma_0 z\right];$$

$$\mu_2^{(j)}(z) = \alpha_2^{(1)}(z)\exp\left[-j\int_0^z\left(\frac{\omega}{v^{(1)}} - \frac{\omega}{v^{(2)}}\right)d\zeta + j\Gamma_0 z\right]; \qquad (24)$$

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^{(1)} - \Gamma_0^{(2)}; \quad \Gamma_0^{(1)} = \frac{1}{L}\int_0^L\frac{\omega}{v^{(1)}}\,d\zeta; \quad \Gamma_0^{(2)} = \frac{1}{L}\int_0^L\frac{\omega}{v^{(2)}}\,d\zeta.$$

Уравнения (23) являются уравнениями рассматриваемой задачи. В частном случае $\alpha_j^{(l)} \equiv 1$, соответствующем равенству кулоновских сил, действующих на электроны обоих пучков, и отсутствию депрессии этих сил, они совпадают с уравнениями (9) работы[4], полученными для двух бесконечно широких электронных потоков с переменной скоростью электронов. Метод решения, примененный в[4], можно использовать и в рассматриваемом общем случае $\alpha_1^{(l)} \neq 1$. Разлагая все периодические коэффициенты уравнений (23) в ряды,

$$(\beta_p^{(l)})^2=\sum_n b_n^{(l)}\exp\left(-j\frac{2\pi n}{L}z\right);$$

$$\alpha_l^{(l)}=\sum_n \alpha_{ln}^{(l)}\exp\left(-j\frac{2\pi n}{L}z\right); \qquad (25)$$

$$\mu_j^{(l)}=\sum_n \mu_{jn}^{(l)}\exp\left(-j\frac{2\pi n}{L}z\right)$$

и учитывая разложения для эквивалентных токов

$$i_э^{(l)}=\sum_n c_n^{(l)}\exp\left[-j(\Gamma-\Gamma_0^{(l)}+2\pi n_j/L)z\right], \qquad (26)$$

которые следуют из (11) и (9), можно получить бесконечную нормальную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $c_n^{(l)}$:

$$c_m^{(1)}-\sum_n c_n^{(1)}\sum_p \frac{b_{m-p}^{(1)}}{(\Gamma-\Gamma_0^{(1)}+2\pi m_j/L)(\Gamma-\Gamma_0^{(1)}+2\pi p_j/L)}\alpha_{1p-n}^{(1)}-$$

$$-\sum_n c_n^{(2)}\sum_p \frac{b_{m-p}^{(1)}}{(\Gamma-\Gamma_0^{(1)}+2\pi m_j/L)(\Gamma-\Gamma_0^{(1)}+2\pi p_j/L)}\mu_{1p-n}^{(2)}=0; \qquad (27)$$

$$-\sum_n c_n^{(1)}\sum_p \frac{b_{m-p}^{(2)}}{(\Gamma-\Gamma_0^{(2)}+2\pi m_j/L)(\Gamma-\Gamma_0^{(2)}+2\pi p_j/L)}\mu_{2p-n}^{(1)}+$$

$$+c_m^{(2)}-\sum_n c_n^{(2)}\sum_p \frac{b_{m-p}^{(2)}}{(\Gamma-\Gamma_0^{(2)}+2\pi m_j/L)(\Gamma-\Gamma_0^{(2)}+2\pi p_j/L)}\alpha_{2p-n}^{(2)}=0.$$

Равенство нулю определителя этой системы дает уравнение для определения постоянной Γ.

Будем искать корни этого дисперсионного уравнения в k-ой полосе взаимодействия, где $\Gamma_0^{(2)}\cong\Gamma_0^{(1)}-2\pi k/L$, ограничиваясь случаем малого пространственного заряда ($\Lambda_p^{(l)}=2\pi/\sqrt{b_0^{(l)}}\gg L$) и малого усиления на одном периоде ($|\Gamma-\Gamma_0^{(1)}|\sim|\Gamma-\Gamma_0^{(2)}-2\pi k/L|\sim\sqrt{b_0^{(l)}}$).

Отбрасывая в развернутом выражении для определителя все члены порядка $L/\Lambda_p^{(l)}$, получим для определения постоянной Γ алгебраическое уравнение четвертой степени:

$$\frac{(\beta_q^{(1)})^2}{(\Gamma-\Gamma_0^{(1)})^2}+\frac{(\beta_q^{(2)})^2}{(\Gamma-\Gamma_0^{(2)}-2\pi k/L)^2}-$$

$$-\left(1-\frac{\mu_{1k}^{(2)}\mu_{2-k}^{(1)}}{\alpha_{10}^{(1)}\alpha_{20}^{(2)}}\right)\frac{(\beta_q^{(1)})^2(\beta_q^{(2)})^2}{(\Gamma-\Gamma_0^{(1)})^2(\Gamma-\Gamma_0^{(2)}-2\pi k/L)^2}=1, \qquad (28)$$

в котором через $\beta_q^{(l)}=\sqrt{b_0^{(l)}\alpha_{l0}^{(l)}}$ обозначены средние редуцированные плазменные постоянные распространения первого и второго пучков. Уравнение (28) совпадает по форме с дисперсионным уравнением (20) работы[4], отличаясь лишь значениями входящих в него параметров.

Следовательно, все свойства взаимодействия двух электронных потоков, движущихся в периодическом электрическом поле, подробно рассмотренные в[4], сохраняются также и в общем случае периодического взаимодействия электронных потоков. При $\beta_q^{(1)}=\beta_q^{(2)}=\beta_q$ для корней уравнения получаются простые выражения:

$$\gamma = \pm \beta_q \sqrt{1 + \varkappa^2 \pm \sqrt{4\varkappa^2 + R_k^2}}, \tag{29}$$

где

$$\gamma = \Gamma - \frac{1}{2}(\Gamma_0^{(1)} - \Gamma_0^{(2)} - 2\pi k/L);$$

$$\varkappa = \frac{1}{2\beta_q}(\Gamma_0^{(1)} - \Gamma_0^{(2)} - 2\pi k/L); \tag{30}$$

$$R_k = \sqrt{\mu_{1k}^{(2)}\, \mu_{2-k}^{(1)} / \alpha_{10}^{(1)} \alpha_{20}^{(2)}}.$$

Анализ (29) показывает, что ширина высших полос взаимодействия, в которых имеет место усиление высокочастотного сигнала (т. е. $\operatorname{Im}\gamma \neq 0$), существенно зависит от плотности тока в пучках и определяется формулой:

$$\Delta\omega_{k\pm}/\omega_{k\pm} = \left(\sqrt{1 + R_k} - \sqrt{1 - R_k}\right) 2L/k\Lambda_p. \tag{31}$$

Однако сама рабочая частота $\omega_{k\pm}$, как уже указывалось выше, при $k \neq 0$ определяется не плотностью тока в пучках, а соотношением средних скоростей пучков и периода по формуле (2).

Максимальное усиление на единицу длины достигается на частотах, несколько отличных от $\omega_{k\pm}$, и имеет в k-ой полосе взаимодействия величину

$$G = 4{,}34\, R_k \beta_q \ (\partial б).$$

Влияние разброса электронов по скоростям на характеристики периодического взаимодействия приближенно можно учесть таким же образом, как и в[4]. При этом нетрудно получить, что усиление будет происходить лишь при выполнении условий

$$2\,\delta v^{(l)}\,\omega_k < R_k\,(v^{(l)})^2 \beta_q, \tag{32}$$

которые ограничивают максимальную рабочую частоту при заданном разбросе электронов по скоростям $\delta v^{(l)}$.

2. РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Проведенный в первом разделе расчет показывает, что величины R_k имеют смысл коэффициентов взаимодействия двух электронных потоков и определяют величину этого взаимодействия в k-ой полосе.

В работе[4] эти коэффициенты были вычислены для бесконечно широких потоков, движущихся в периодическом электростатическом поле (рис. 1 а). Найдем коэффициенты R_k в некоторых других случаях взаимодействия потоков, движущихся с постоянной скоростью. При этом, очевидно, имеем:

$$\mu_1^{(2)}(z) = \alpha_1^{(2)}(z); \quad \mu_2^{(1)}(z) = \alpha_2^{(1)}(z).$$

Все выведенные выше формулы строго применимы, в частности, для расчета непрерывного взаимодействия двух пространственно разделенных электронных пучков, толщина которых много меньше расстояния между ними. Если эти потоки плоские, то в направлении x, перпендикулярном поверхности потоков, поле спадает как $e^{-\Gamma x}$ (при не очень больших скоростях $v^{(l)}$). Пренебрегая мнимой частью Γ в показателе степени, получаем:

$$\alpha_2^{(1)} = \alpha_1^{(1)} \exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma_0^{(1)} + \Gamma_0^{(2)})\, d\right]; \quad \alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} \exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma_0^{(1)} + \Gamma_0^{(2)})\, d\right], \tag{33}$$

где d—расстояние между пучками.

Подставляя (33) в (30), найдем выражение для коэффициентов взаимодействия:

$$R_k=\begin{cases}\exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma_0^{(1)}+\Gamma_0^{(2)})\,d\right] & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}. \tag{34}$$

В случае трубчатых пучков в выражение для коэффициентов взаимодействия войдут соответствующие цилиндрические функции. Эти результаты для непрерывного взаимодействия разделенных пучков совпадают с результатами, полученными в[6].

Рассмотрим теперь взаимодействие двух плоских пучков, между которыми расположен ряд тонких металлических пластин (рис. 1 г). Если на ширине щели l_1 укладывается несколько длин волн в электронном пучке, и расстояние между пучками меньше l_1, то приближенно можно считать, что пучки при прохождении против щели взаимодействуют так же, как и в свободном пространстве, а против пластины не взаимодействуют совсем. Тогда на первом участке $\alpha_2^{(1)}$ и $\alpha_1^{(2)}$ определяются формулами (33), а на втором участке $\alpha_2^{(1)}=\alpha_1^{(2)}=0$. Для R_k в этом случае получаем следующее выражение:

$$R_k=\exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma_0^{(1)}+\Gamma_0^{(2)})\,d\right]\frac{|\sin(\pi k l_1/L)|}{\pi k}\times$$
$$\times\left\{\frac{\alpha_1^{(1)}(\mathrm{I})\,\alpha_2^{(2)}(\mathrm{I})\,L^2}{[\alpha_1^{(1)}(\mathrm{I})l_1+\alpha_1^{(1)}(\mathrm{II})l_2]\,[\alpha_2^{(2)}(\mathrm{I})l_1+\alpha_2^{(2)}(\mathrm{II})l_2]}\right\}^{1/2}. \tag{35}$$

Коэффициенты депрессии пучков на отдельных участках $\alpha_l^{(l)}(\mathrm{I})$ и $\alpha_l^{(l)}(\mathrm{II})$ можно приближенно определить, используя графики для плоских пучков, движущихся около сплошной металлической стенки[7]. Если изменение $\alpha_l^{(l)}$ от участка к участку невелико, то подкоренное выражение близко к единице, и формула (35) упрощается:

$$R_k=\exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma_0^{(1)}+\Gamma_0^{(2)})\,d\right]\frac{|\sin(\pi k l_1/L)|}{\pi k}. \tag{36}$$

В другом случае периодического взаимодействия, когда пучки, движущиеся в периодической структуре, смешаны друг с другом (рис. 1 в), $\alpha_2^{(1)}=\alpha_1^{(1)}$; $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}$.

Считая, как и выше, что на каждом участке периода укладывается несколько длин волн в пучке, можно полагать коэффициенты депрессии $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_2^{(2)}$ на каждом участке постоянными и вычислять их по известным формулам для пучков, движущихся в однородном волноводе. Для R_k получим следующее выражение:

$$R_k=\left(\frac{\alpha_{2k}^{(2)}\alpha_{1-k}^{(1)}}{\alpha_{10}^{(1)}\alpha_{20}^{(2)}}\right)^{1/2}=$$
$$=\frac{|\sin(\pi k l_1/L)|}{\pi k}\left\{\frac{[\alpha_1^{(1)}(\mathrm{I})-\alpha_1^{(1)}(\mathrm{II})]\,[\alpha_2^{(2)}(\mathrm{I})-\alpha_2^{(2)}(\mathrm{II})]\,L^2}{[\alpha_1^{(1)}(\mathrm{I})l_1+\alpha_1^{(1)}(\mathrm{II})l_2]\,[\alpha_2^{(2)}(\mathrm{I})l_1+\alpha_2^{(2)}(\mathrm{II})l_2]}\right\}^{1/2}. \tag{37}$$

Аналогичным образом можно вычислить коэффициенты взаимодействия для смешанных пучков со слабым изменением поперечного сечения (рис. 1 б) и для пучков с криволинейной траекторией электронов (рис. 1 д).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование выражения для поля

Собственное поле периодической структуры, согласно теореме Флоке[5], можно представить в виде:

$$E_s = E_{\pm s\,\text{пер}} \exp(\mp j\beta_s z), \tag{A.1}$$

где $E_{\pm s\,\text{пер}}$—периодические функции z с периодом L.

Подставляя это выражение вместе с (19) в формулы (17) для коэффициентов возбуждения $C_{\pm s}$, можно представить последние в виде:

$$C_s = \frac{1}{N_s}\int_{-\infty}^{z} \exp(j\beta_s z - j\Gamma z) f_s(z)\, dz;$$
$$C_{-s} = \frac{1}{N_s}\int_{z}^{\infty} \exp(-j\beta_s z - j\Gamma z) f_{-s}(z)\, dz, \tag{A.2}$$

где $f_{\pm s}(z) = \int\limits_{\sigma(z)} i_{\text{пер}} E_{\pm s\,\text{пер}}\, d\sigma$— периодические функции z с периодом L.

Разложив эти функции в ряд Фурье

$$f_{\pm s}(z) = \sum_n f_{\pm sn} \exp[-j(2\pi n/L)z] \tag{A.3}$$

и проинтегрировав (А.2) почленно, получим:

$$C_s = \frac{1}{N_s} \exp(j\beta_s z - j\Gamma z) \sum_n \frac{f_{sn}}{j(\beta_s - \Gamma - 2\pi n/L)} \exp[-j(2\pi n/L)z];$$
$$C_{-s} = \frac{1}{N_s} \exp(-j\beta_s z - j\Gamma z) \sum_n \frac{f_{-sn}}{j(\beta_s + \Gamma + 2\pi n/L)} \exp[-j(2\pi n/L)z]. \tag{A.4}$$

Подстановка (А.1) и (А.4) в (16) дает искомое выражение для поля:

$$E = -i\alpha / j\omega\varepsilon_0, \tag{A.5}$$

где

$$\alpha(x,y,z) = \frac{1}{i_{\text{пер}}} \sum_{sn} \frac{1}{N_s} \left[E_{s\,\text{пер}} \frac{f_{sn}}{j(\beta_s - \Gamma - 2\pi n/L)} + \right.$$
$$\left. + E_{-s\,\text{пер}} \frac{f_{-sn}}{j(\beta_s + \Gamma + 2\pi n/L)} \right] \exp[-j(2\pi n/L)z] + 1 \tag{A.6}$$

—периодическая функция z с периодом L.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, Гостехиздат, М., 1953.
2. W. H. Louisell, J. R. Pierce, Proc. IRE, **43**, 425 (1955).
3. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Сборник докладов Всесоюзной конференции по СВЧ приборам, май, 1957 (в печати).
4. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**,5—6, 127 (1958).
5. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, **27**, 2340 (1957).
6. J. R. Pierce, Proc. IRE, **37**, 980 (1949).
7. G. M. Brauch, T. G. Mihran, IRE Trans., **ED—2**, 3 (1955).

Поступила в редакцию
18 августа 1958 г.