ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 5—6 *РАДИОФИЗИКА* *1958*

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПО ОТКЛИКУ ПРИБОРА

Б. С. Цыбаков, В. П. Яковлев

Рассматривается задача о восстановлении входного воздействия по отклику прибора. Доказывается, что конечным по протяженности воздействиям соответствует один и только один отклик прибора. Показано также, что ошибки восстановления входного воздействия при увеличении точности снятия выхода стремятся к нулю.

Известно, что на практике большую роль играют приборы, для которых соблюдается принцип суперпозиции. Этому принципу подчиняются приборы, отклик которых $F(y)$ на входное воздействие $f(x)$ связан с последним интегральным соотношением типа свертки

$$F(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,h(y-x)\,dx, \tag{1}$$

где „функция прибора“ $h(y)$ является единственной характеристикой прибора.

Так, например, уравнение (1) связывает одномерный объект и его оптическое изображение в телескопических системах и микроскопе, истинный контур спектральной линии с наблюдаемым на спектрографе или монохроматоре, одномерное распределение интенсивности радиозвезды с изображением ее в радиотелескопе, импульсы на входе и выходе линейного четырехполюсника.

Задача восстановления входа прибора по его выходу, математически заключающаяся в решении уравнения (1) относительно функции $f(x)$, не является новой. Эта задача ставилась в оптике, чтобы снять влияние диффракции на выходе [1–5], в радиоастрономии—с целью устранения сглаживающего действия антенны [6–8] и в некоторых других областях физики [9–10]. Пытаясь точно или приближенно решить интегральное уравнение в тех или иных предположениях, авторы оставляли в стороне некоторые принципиальные вопросы теории восстановления. Во-первых, до сих пор остаются невыясненными до конца условия, при которых отклику прибора $F(y)$ может быть сопоставлен один и только один процесс на входе $f(x)$. Кроме того, в литературе нет указаний относительно возможностей выбора процедуры восстановления входа прибора по его выходу, обладающей свойством „грубости“.

Настоящая статья посвящается решению двух последних задач.

1. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Установим некоторые условия, при которых между входом и выходом прибора существует взаимнооднозначное соответствие. Для этого сформулируем требования к функциям $F(y)$, $f(x)$ и $h(y)$, при выполнении которых решение уравнения (1) единственно.

Имеет смысл различать два частных случая, смотря по тому,

бесконечна или конечна „полоса пропускания" прибора. При этом, соответственно, будем считать, что фурье-трансформация функции $h(y)$, определяемая равенством

$$\hat{h}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)\,e^{-i\omega y}dy, \tag{2}$$

почти всюду отлична от нуля, или $\hat{h}(\omega)$ — финитная функция, т. е. $\hat{h}(\omega)=0$ вне некоторого интервала значений ω*.

Установление условий единственности в первом случае не представляет большого труда; оно прямо следует из теории интеграла Фурье [13]. При естественном требовании конечности полной интенсивности входа (т. е. конечности либо интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,dx$, либо интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$, смотря по физическому смыслу $f(x)$) единственным решением уравнения (1) будет функция

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{F}(\omega)}{\hat{h}(\omega)}\,e^{i\omega x}\,dx. \tag{3}$$

В случае прибора с конечной полосой пропускания условие ограниченности полной интенсивности входа не является достаточным для единственности решения интегрального уравнения (1). Так, например, если $\hat{h}(\omega)=0$ для $|\omega|>\omega_1$, то не трудно видеть, что решение определяется с точностью до аддитивной функции, фурье-трансформация которой равна нулю для $|\omega|\leqslant\omega_1$.

Практическую важность имеют два требования ко входу прибора, прибавление каждого из которых достаточно для единственности решения уравнения (1).

Первое требование известно и заключается в том, что $\hat{f}(\omega)=0$ для всех ω, при которых $\hat{h}(\omega)=0$, т. е. входной процесс укладывается в полосу пропускания прибора. Единственное решение есть

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\hat{F}(\omega)}{\hat{h}(\omega)}\,e^{i\omega x}\,d\omega, \tag{4}$$

где интегрирование производится по интервалам, в которых $\hat{h}(\omega)\neq 0$. Это положение широко используется в радиотехнических приборах.

Другое требование — конечность протяженности входного воздействия. Покажем справедливость этого требования, иначе говоря, докажем, что если $\hat{h}(\omega)$ — финитная на $[\omega', \omega'']$ функция, то при выполнении условий

$$f(x)=0 \quad \text{при} \quad |x|>a; \quad \int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,dx<\infty \tag{5}$$

решение уравнения (1) единственно.

---

* В дальнейшем значок $\hat{}$ над функцией будет означать применение к этой функции оператора Фурье, определенного соотношением (2).

Для этого предположим, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — два решения одного и того же уравнения (1), удовлетворяющие условиям (5), и докажем, что $f_1(x)=f_2(x)$. Обозначим через $\Delta(x)$ разность $f_1(x)-f_2(x)$. Для $\Delta(x)$ справедливо соотношение

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,h(y-x)\,dx=\int_{-a}^{+a}\Delta(x)\,h(y-x)\,dx. \tag{6}$$

Перейдем от (6) к трансформациям Фурье; тогда

$$0=\hat{\Delta}(\omega)\,\hat{h}(\omega). \tag{7}$$

Поскольку $\hat{h}(\omega)\not\equiv 0$ на $[\omega', \omega'']$, то для соблюдения (7) необходимо, чтобы почти всюду на промежутке $[\omega', \omega'']$

$$\hat{\Delta}(\omega)=0. \tag{8}$$

Функция $\Delta(x)$ удовлетворяет условиям (5); поэтому по теореме Палея—Винера [14] функция $\hat{\Delta}(\omega)$ есть целая аналитическая функция. Отсюда, в силу теоремы единственности для аналитических функций и условия (8), следует, что $\hat{\Delta}(\omega)\equiv 0\,(-\infty<\omega<\infty)$, откуда $\Delta(x)=f_1(x)-f_2(x)=0$, что и доказывает единственность решения (1).

При соблюдении условий (5) решение уравнения (1) имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\hat{F}(\omega)}{\hat{h}(\omega)}\right]^{(n)}_{\omega=\omega_0}\frac{(\omega-\omega_0)^n}{n!}\right\}e^{i\omega x}d\omega, \tag{9}$$

где $\omega'<\omega_0<\omega''$ и $\hat{h}(\omega_0)\neq 0$ *.

Следует отметить, что условиям конечной протяженности и интенсивности отвечает весьма широкий класс входных воздействий. В спектроскопии и астрономии, например, изучаются исключительно такие воздействия. В радиотехнике условиям (5) удовлетворяет импульс на входе.

Во всех таких случаях по доказанному следует, что заданному выходу прибора $F(y)$ можно сопоставить лишь одно входное воздействие $f(x)$, выражаемое формулой (9).

2. О СВОЙСТВЕ ГРУБОСТИ ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Для восстановления входа прибора по его выходу решения (3), (4) и (9) интересны лишь в некотором предельном смысле. Для их использования требуется знание выхода прибора $F(y)$ с абсолютной точностью. На практике, однако, в силу разнообразных причин снятие выходного процесса осуществляется обязательно с некоторой погрешностью.

Легко видеть, что решения (3), (4) и (9) уравнения (1) не являются „устойчивыми“ в том смысле, что для решения $f_1(x)$ уравнения

$$F_\varepsilon(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\,h(y-x)\,dx \tag{10}$$

* Функция $\hat{F}(\omega)/\hat{h}(\omega)$ — аналитическая в окрестности ω_0.

макс $|f(x)-f_1(x)|$ может быть как угодно большим при соответствующем выборе функции $F_\varepsilon(y)$, удовлетворяющей условию $|F(y)-F_\varepsilon(y)|<\varepsilon$ на интервале $-\infty<y<+\infty$.

Не рассматривая всю совокупность относящихся к этой проблеме вопросов, приведем лишь следующее утверждение, доказывающее свойство „грубости" задачи восстановления при условии конечной протяженности входного воздействия.

Пусть заданная функция $F_\varepsilon(y)$ отличается по модулю от некоторой неизвестной функции $F(y)$ менее, чем на ε для любого $y(-\infty<y<+\infty)$:

$$|F(y)-F_\varepsilon(y)|<\varepsilon. \tag{11}$$

Пусть также задана функция $h(y)$, фурье-трансформация которой есть функция с ограниченной вариацией. Тогда, пользуясь $F_\varepsilon(y)$, можно сконструировать функцию $f_\eta(x)$, такую, что для всех $x(-\infty<x<+\infty)$

$$|f(x)-f_\eta(x)|<\eta(\varepsilon, f), \tag{12}$$

где $f(x)$ — непрерывная функция с ограниченной вариацией, финитная на интервале $[-a, +a]$ и связанная условием

$$F(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,h(y-x)\,dx$$

с функциями $F(y)$ и $h(y)$, а функция $\eta(\varepsilon, f)\to 0$ при каждой фиксированной $f(x)$ и $\varepsilon\to 0$.

Отнеся доказательство в приложение, укажем способ приближенного восстановления входного воздействия по $F_\varepsilon(y)$ в том случае, когда известна величина $H=\text{макс}\,f(x)$ и функции $f(x)$, $h(y)$ и $F(y)$ интегрируемы по модулю на всей оси.

Восстановление состоит из четырех операций.

1. Определение по $F_\varepsilon(y)$ функции $F_\varepsilon^*(y)$, совпадающей с первой при $-1/\sqrt{\varepsilon}<y<1/\sqrt{\varepsilon}$ и равной нулю вне этого интервала.

2. Определение функции $\widehat{F}_\varepsilon^*(\omega)/\widehat{h}(\omega)$ на каком-либо промежутке $\delta_1\leqslant\omega\leqslant\delta_2$, где $|\widehat{h}(\omega)|\geqslant R>0$ и $\widehat{h}(\omega)$ непрерывна (R — произвольное число).

3. Доопределение функции $\widehat{F}_\varepsilon^*(\omega)/\widehat{h}(\omega)$ на промежуток $[\Omega_{1\varepsilon}, \Omega_{2\varepsilon}]$, включающий $]\delta_1, \delta_2[$. Числа $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ определяются с помощью ε, R и H.

4. Определение $f_\eta(x)$ как фурье-трансформации финитной функции, сконструированной на интервале $[\Omega_{1\varepsilon}, \Omega_{2\varepsilon}]$ после предыдущей операции.

На основании неравенства (12) ошибка восстановления зависит не только от точности, с которой снимается выход прибора, но и от вида функции $f(x)$. При этом, если фиксировать ε, то величина $\eta(\varepsilon, f)$ будет тем больше, чем более резко изменяется функция $f(x)$, т. е. чем „тоньше структура" входного воздействия. В некоторых случаях бывает заранее известно, что вход прибора не может иметь произвольно резкие изменения. Пусть, например, $|d^2f(x)/dx^2|<\text{const}$ и $(df(x)/dx)_{x=-a}=(df(x)/dx)_{x=a}=0$, или $f(x)$ на промежутке $[-a, +a]$ совпадает с многочленом конечной степени с ограниченными коэффициентами. Тогда можно определить функцию $\eta(\varepsilon)\geqslant\eta(\varepsilon, f)$ и, таким образом, избавиться от зависимости ошибки восстановления от функции $f(x)$*.

---

* При этом предполагается, что функции $h(y)$, $f(x)$ и $F_\varepsilon(y)$ интегрируемы по модулю в бесконечных пределах.

Таким образом, при известных ограничениях характера входного воздействия задача восстановления обладает свойством грубости. На основании этого можно дать определение разрешающей способности прибора, свободное от ряда недостатков, присущих обычно принятым определениям. В самом деле, величина η есть основная характеристика разрешения. Разрешающая способность данного прибора (определяемого функцией $h(y)$) будет зависеть лишь от точности снятия выхода и неограниченно возрастать при $\varepsilon \to 0$.

В заключение мы хотим выразить глубокую признательность Я. И. Хургину за ценные советы и дискуссию.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для доказательства построим сходящуюся к $f(x)$ функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ (где $f_n(x) = f_{\eta(\varepsilon_n, f)}(x)$), используя для этой цели лишь функцию $h(y)$ и последовательность $\{F_n(y)\}$, имеющую предельную функцию $F(y)$ (здесь $F_n(y) = F_{\varepsilon_n}(y)$).

Определим последовательность функций $\{F_n^*(y)\}$ так, что

$$F_n^*(y) = \begin{cases} F_n(y) & \text{при } |y| < 1/\sqrt{\varepsilon_n} \\ 0 & \text{при } |y| \geqslant 1/\sqrt{\varepsilon_n} \end{cases}. \tag{13}$$

При этом, согласно (12),

$$|F(y) - F_n^*(y)| < \varepsilon_n \tag{14}$$

для $|y| < 1/\sqrt{\varepsilon_n}$, а для $|y| \geqslant 1/\sqrt{\varepsilon_n}$

$$F(y) - F_n^*(y) = F(y). \tag{15}$$

Построим разность

$$\widehat{F}(\omega) - \widehat{F}_n^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(y) - F_n^*(y)]\, e^{-i\omega y}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-1/\sqrt{\varepsilon_n}}^{1/\sqrt{\varepsilon_n}} [F(y) - F_n(y)]\, e^{-i\omega y}\, dy + \int_{-\infty}^{-1/\sqrt{\varepsilon_n}} F(y)\, e^{-i\omega y}\, dy + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \int_{1/\sqrt{\varepsilon_n}}^{-\infty} F(y)\, e^{-i\omega y}\, dy \right|$$

и рассмотрим некоторый промежуток $-\delta \leqslant \omega \leqslant \delta$, на котором $\widehat{h}(\omega)$ непрерывна и $|\widehat{h}(\omega)| \geqslant R > 0$*. Переходя в (16) к модулям и используя (12), получим следующую оценку:

$$|\widehat{F}(\omega) - \widehat{F}_n^*(\omega)| \leqslant \sqrt{2\varepsilon_n}\pi + \gamma(\varepsilon_n), \tag{17}$$

где

$$\gamma(\varepsilon_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \max_{-\delta \leqslant x \leqslant \delta} \left| \int_{-\infty}^{-1/\sqrt{\varepsilon_n}} F(y) e^{-i\omega y} dy + \int_{1/\sqrt{\varepsilon_n}}^{+\infty} F(y) e^{-i\omega y} dy \right|, \tag{18}$$

* Здесь для простоты предположено, что $|\widehat{h}(\omega)| \neq 0$ на любом интервале, принадлежащем $[-\omega_1, \omega_1]$, и что выбор интервала $(-\delta, \delta)$ возможен. В отсутствие этих предположений доказательство, оставаясь в принципе тем же, усложняется.

Функция $F(\omega)$, совпадая с $\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega)$, является непрерывной и имеет ограниченную вариацию на $[-\delta, +\delta]$. Кроме того, $\hat{F}(\omega)$ принадлежит множеству измеряемых по Лебегу функций с интегрируемым на интервале $(-\omega_1, \omega_1)$ квадратом модуля, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(\varepsilon_n) = 0. \tag{19}$$

Теперь согласно (17) имеем

$$\hat{F}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \hat{F}_n^*(\omega) \tag{20}$$

для $-\delta \leqslant \omega \leqslant \delta$, откуда на том же интервале

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{F}_n^*(\omega)}{\hat{F}(\omega)}. \tag{21}$$

По теореме Палея-Винера, функция $\hat{f}(z)$ есть целая, экспоненциального типа с показателем $\leqslant a$. Значит, в любой конечной части плоскости комплексного переменного функция $\hat{f}(z)$ есть ограниченная функция. В частности, в качестве такой области можно выбрать область Q, ограниченную промежутком действительной оси от $-\delta$ до $+\delta$ и включающую как внутреннюю часть некоторые промежутки $[-E_n, -\delta]$ и $[\delta, E_n]$ действительной оси $(E_n > 0)$. Согласно (21) на интервале $[-\delta, +\delta]$ определена последовательность функций, равномерно сходящаяся к $\hat{f}(z)$. Используя результаты работы [15], построим функциональную последовательность, равномерно сходящуюся к $\hat{f}(\omega)$ на интервалах $(-E_n, -\delta)$ и (δ, E_n). Теперь на всем интервале $(-E_n, E_n)$ будет определена равномерно по ω сходящаяся к $\hat{f}(\omega)$ функциональная последовательность $\{\hat{f}_n^*(\omega)\}$ так, что

$$|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_n^*(\omega)| < W_n, \tag{22}$$

где $W_n = W_n(E_n)$ и $W_n \to 0$ при $h \to \infty$. Выберем E_n из уравнения

$$E_n = 1/\sqrt{W_n(E_n)}$$

и определим последовательность функций $\{\hat{f}_n(\omega)\}$ так, что

$$\hat{f}_n(\omega) = \begin{cases} \hat{f}_n^*(\omega) & \text{при } |\omega| < 1/\sqrt{W_n}; \\ 0 & \text{при } |\omega| \geqslant 1/\sqrt{W_n}. \end{cases}$$

При этом из (22) следует:

$$|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_n(\omega)| < W_n \tag{23}$$

для $|\omega| < 1/\sqrt{W_n}$; а для $|\omega| \geqslant 1/\sqrt{W_n}$

$$\hat{f}(\omega) - \hat{f}_n(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Определив $f_n(x)$ соотношением

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega,$$

покажем, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$.

В самом деле, рассмотрим разность

$$f(x)-f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\hat{f}(\omega)-\hat{f}_n(\omega)]\,e^{i\omega x}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int\limits_{-1/\sqrt{W_n}}^{1/\sqrt{W_n}}[\hat{f}(\omega)-\hat{f}_n(\omega)]\,e^{i\omega x}d\,\omega+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{-1/\sqrt{W_n}}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega+\int\limits_{1/\sqrt{W_n}}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\,\omega\right\}.$$

Переходя к модулям и используя (23), имеем следующую оценку:

$$|f(x)-f_n(x)|<\sqrt{2W_n/\pi}+\Psi(W_n)=\eta(\varepsilon, f),$$

где

$$\Psi(W_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{-\infty<x<+\infty}{\text{макс}}\left|\int\limits_{-\infty}^{1-/\sqrt{W_n}}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega+\int\limits_{1/\sqrt{W_n}}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\,\omega\right|.$$

В силу непрерывности $f(x)$ имеем: $\Psi(W_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Теперь видно, что $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

Этим доказательство заканчивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Раутиан, Диссертация, ФИАН, М., 1957.
2. H. C. van de Hulst, Bull. astr. inst. Netherlands, **9**, 225 (1941).
3. H. C. van de Hulst, Bull. astr. inst. Netherlands, **10**, 75 (1946).
4. A. R. Stokes, Proc. Phys. Soc., **61**, 382 (1948).
5. М. М. Сущинский, ЖЭТФ, **25**, 87 (1953).
6. R. N. Bracewell, J. A. Roberts, Austr. J. Phys., **7**, 615 (1954).
7. R. N. Bracewell, Austr. J. Phys., **8**, 54 (1955).
8. R. N. Bracewell, Austr. J. Phys., **8**, 200 (1955).
9. М. А. Блохин, Изв. АН СССР, сер. физ., **20**, 142 (1956).
10. H. C. Burger, P. H. van Cittert, Zs. f. Phys., **79**, 722 (1932).
11. H. C. Burger, P. H. van Cittert, Zs. f. Phys., **81**, 428 (1933).
12. И. Я. Никифоров, Изв. АН СССР, сер. физ., **21**, 1362 (1957).
13. Е. Тичмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ОГИЗ, М.—Л., 1948.
14. R. E. Paley, N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934.
15. М. М. Лаврентьев, Изв. АН СССР, сер. матем., **20**, 819 (1956).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
3 июня 1958 г.