ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 5—6 РАДИОФИЗИКА 1958

К ТЕОРИИ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

А. С. Гуртовник

Методом малого параметра исследуются уравнения молекулярного генератора, предложенные в статье [1]. Выясняется, что при числе активных молекул в полости резонатора в отсутствии поля $N_0 < N_0^*$ молекулярный генератор находится в устойчивом состоянии равновесия, при $N_0 > N_0^*$ состояние равновесия становится неустойчивым. При переходе величины N_0 через N_0^* происходит мягкое возбуждение колебаний, близких к синусоидальным, с частотой, близкой к собственной частоте резонатора. Амплитуда этих колебаний нарастает вместе с N_0. При дальнейшем увеличении N_0 автоколебачия становятся неустойчивыми. Возможно, что при этом возникают более сложные двоякопериодические движения, однако соответствующему рассмотрению этот вопрос не подвергался.

Полученные в работе [1] уравнения молекулярного генератора имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \ddot{E} + 4\pi\ddot{P} + \frac{\omega_0}{Q}(\dot{E} + 4\pi\dot{P}) + \omega_0^2 E = 0; \\ \ddot{P} + \frac{2}{\tau}\dot{P} + \left(\omega_2^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)P = -2NE|\mu_{12}|^2\frac{\omega_2}{\hbar}; \\ \dot{N} + \frac{1}{\tau}(N - N_0) = \frac{2}{\hbar\omega_2}E\left(\dot{P} + \frac{1}{\tau}P\right), \end{gathered} \tag{1}$$

где E и P — электрическое поле и поляризация среды, N_0 и N — число активных молекул в отсутствии и, соответственно, в присутствии поля, ω_0 и Q — собственная частота и добротность резонатора, ω_2 — частота молекулярного перехода, τ — среднее время пролета молекулы сквозь резонатор, μ_{12} — матричный элемент дипольного момента молекулы и $\hbar$ — постоянная Планка. Принимая величину $\mu = 1/Q$ за малый параметр и вводя новые переменные соотношениями

$$t_1 = t\omega_0; \quad \boldsymbol{E} = \sqrt{2\pi\hbar\omega_2}\,E; \quad \boldsymbol{P} = \frac{\sqrt{2\pi\hbar\omega_2}}{4\pi Q}P; \quad \boldsymbol{N} = N + N_0, \tag{2}$$

приведем (1) к виду:

$$\begin{gathered} \ddot{E} + E = \mu[P - \dot{E}] + \mu^2[(\alpha - 1)\dot{P} + \beta E(N + N_0)] + \delta\mu^3 P; \\ \ddot{P} + P = -\mu[\alpha\dot{P} + \beta E(N + N_0)] - \delta\mu^2 P; \\ \dot{N} = \mu\left[E\dot{P} - \frac{\alpha}{2}N\right] + \frac{\alpha}{2}\mu^2 EP, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\alpha = 2Q/\tau\omega_0; \quad \beta = 8\pi\omega_2|\mu_{12}|^2 Q^2/\omega_0^2\hbar; \quad \delta = Q^2\omega_0^{-2}(\omega_2^2 - \omega_0^2 + \tau^{-2}). \tag{4}$$

* Настоящая работа представляет собою изложение основных результатов дипломной работы, выполненной под руководством Ю. И. Неймарка. Сама задача была поставлена В. С. Троицким и В. М. Файном в связи с проводившимися ими исследованиями [1,2].

Система уравнений (3) имеет единственное состояние равновесия $E=0$, $P=0$, $N=0$. Для выяснения его устойчивости линеаризуем уравнения (3), считая E, P и N малыми:

$$\ddot{E}+E=\mu[P-\dot{E}]+\mu^2[(\alpha-1)\dot{P}+\beta N_0 E]+\delta\mu^3 P;$$
$$\ddot{P}+P=-\mu[\alpha\dot{P}+\beta N_0 E]-\delta\mu^2 P;$$
$$\dot{N}=-\alpha\mu N/2$$

и составим его характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} z^2+\mu z+1-\mu^2\beta N_0 & -\mu^2(\alpha-1)z-\mu-\delta\mu^3 & 0 \\ \mu\beta N_0 & z^2+\alpha\mu z+1+\delta\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & z+\alpha\mu/2 \end{vmatrix}=0.$$

Обычное исследование корней характеристического уравнения с использованием условий Раута—Гурвица приводит к системе неравенств:

$$\mu(\alpha+1)>0;\quad 2+(\alpha+\delta-\beta N_0)\mu^2>0;$$
$$\mu[(\alpha+1)+\mu^2(\delta-\beta N_0)]>0;\quad \delta\mu^2+1>0;$$
$$\mu^2[\alpha+1][\alpha+1+\mu^2(\delta-\beta N_0)][2+(\alpha+\delta-\beta N_0)\mu^2]-\mu^2(\alpha+1)^2(1+\delta\mu^2)-$$
$$-\mu^2[\alpha+1+\mu^2(\delta-\beta N_0)]>0,$$

выполнение которых является необходимым и достаточным условием устойчивости состояния равновесия $E=P=N=0$. При реальных значениях параметров, приведенных, например, в работе [1], первые четыре неравенства всегда выполняются, а последнее после упрощений записывается в виде

$$\alpha-\beta N_0+\mu^2\{\ldots\}>0.$$

Согласно методу малого параметра, для отыскания периодических решений системы (3) и исследования их устойчивости будем искать периодическое решение в виде рядов по μ:

$$E=E_0(\tau)+\mu E_1(\tau)+\mu^2 E_2(\tau)+\ldots;$$
$$P=P_0(\tau)+\mu P_1(\tau)+\mu^2 P_2(\tau)+\ldots;$$
$$N=N_0(\tau)+\mu N_1(\tau)+\mu^2 N_2(\tau)+\ldots,$$

для которых имеет место условие

$$\dot{E}(0)=0 \tag{5}$$

и

$$\tau=t_1(1+h^*\mu+h_2\mu^2+\ldots). \tag{6}$$

Подстановка (6) в (3) приводит к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{E}+E(1+h^*\mu+\ldots)^2=\mu[P(1+h^*\mu+\ldots)^2-\dot{E}(1+h^*\mu+\ldots)]+\\ &+\mu^2[(\alpha-1)(1+h^*\mu+\ldots)\dot{P}+\beta(N+N_0)E(1+h^*\mu+\ldots)^2]+\\ &+\delta\mu^3 P(1+h^*\mu+\ldots)^2;\\ &\ddot{P}+P(1+h^*\mu+\ldots)^2=-\mu[\alpha\dot{P}(1+h^*\mu+\ldots)+\\ &+\beta E(N+N_0)(1+h^*\mu+\ldots)^2]-\delta\mu^2 P(1+h^*\mu+\ldots)^2;\\ &\dot{N}=\mu\left[E\dot{P}-\frac{\alpha}{2}N(1+h^*\mu+\ldots)\right]+\frac{\alpha}{2}\mu^2 EP(1+h^*\mu+\ldots), \end{aligned}\right\}$$

выполняющейся тождественно относительно μ. Из этой системы можно последовательно найти $E_0, P_0, N_0, h^*, E_1, P_1, N_1, h_1\ldots$. Именно, положив в ней $\mu=0$ и имея в виду (5), находим, что $E_0=M_1\cos\tau$, $P_0=M_2\cos\tau+M_3\sin\tau$, $N^0=N^*$. Приравнивая члены при первой степени μ, придем к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{E}_1+E_1=(M_2-2h^*M_1)\cos\tau+(M_1+M_3)\sin\tau;\\
&\dot{P}_1+P_1=-[2h^*M_2+\alpha M_3+\beta M_1(N_0+N^*)]\cos\tau+\\
&\qquad+(\alpha M_2-2h^*M_3)\sin\tau;\\
&\dot{N}_1=M_1M_3\cos^2\tau-\frac{\alpha}{2}N^*-M_1M_2\cos\tau\sin\tau.
\end{aligned}\right\}$$

Из условий периодичности E_1, P_1 и N_1 найдем, что

$$h^*=0;\ M_2=0;\ M_1=\sqrt{\alpha\left(N_0-\frac{\alpha}{\beta}\right)};\quad M_3=-\sqrt{\alpha\left(N_0-\frac{\alpha}{\beta}\right)};$$

$$N^*=\frac{\alpha}{\beta}-N_0,$$

и поэтому, в силу (5),

$$E_1=A\cos\tau;\ P_1=B\cos\tau+C\sin\tau;\quad N_1=N^{**}-\frac{M_1^2}{4}\sin 2\tau.$$

Аналогично поступаем для отыскания E_1, P_1, N_1 и h_2 и находим, что

$$A=0;\quad C=0;\quad N^{**}=0;\quad B=-\frac{1+\delta}{1+\alpha}M_1-\frac{\beta M_1^3}{8(1+\alpha)};$$

$$h_2=\frac{\alpha-\delta}{2(1+\alpha)}-\frac{\beta M_1^2}{16(1+\alpha)}.$$

Ограничиваясь найденным приближением периодического решения, перейдем к исследованию его устойчивости. Для этого, положив

$$\xi=E-M_1\cos\tau;\quad \eta=P+M_1\sin\tau;\quad \varsigma=N-\alpha/\beta+N_0,$$

составим так называемые уравнения в вариациях:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\xi}+\xi=\mu[\eta-\dot{\xi}]+\ldots;\\
&\ddot{\eta}+\eta=-\mu[\alpha(\xi+\dot{\eta})+\beta M_1\varsigma\cos\tau]+\ldots;\\
&\dot{\varsigma}=\mu[(\dot{\eta}-\xi)M_1\cos\tau-\alpha\varsigma/2]+\ldots,
\end{aligned}\tag{7}$$

от характеристических показателей которого зависит устойчивость периодического движения.

Для нахождения характеристических показателей

$$\alpha_0=\mu a^*+\mu^2 a_2+\ldots$$

будем искать решения уравнений (7) вида

$$\xi=\varphi e^{\alpha_0\tau};\quad \eta=\psi e^{\alpha_0\tau};\quad \varsigma=fe^{\alpha_0\tau},\tag{8}$$

где φ, ψ и f — периодические функции τ с периодом 2π.

После подстановки (8) в уравнения (7) получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}+\varphi=\mu[\psi-\dot{\varphi}-2a^*\dot{\varphi}]+\ldots;\\
&\ddot{\psi}+\psi=-\mu[\alpha(\dot{\psi}+\varphi)+\beta M_1 f\cos\tau+2a^*\dot{\psi}]+\ldots;\\
&\dot{f}=\mu[M_1(\dot{\psi}-\varphi)\cos\tau-f(\alpha/2+a^*)]+\ldots.
\end{aligned}\right\}$$

Представив φ, ψ и f в виде рядов по μ:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \mu^2 \varphi_2 + \dots;$$
$$\psi = \psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2 \psi_2 + \dots;$$
$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots,$$

найдем, что

$$\varphi_0 = A_1 \cos\tau + B_1 \sin\tau; \quad \psi_0 = A_2 \cos\tau + B_2 \sin\tau; \quad f_0 = f_0$$

и что φ_1, ψ_1 и f_1 удовлетворяют уравнениям:

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = (A_2 - B_1 - 2a^*B_1)\cos\tau + (B_2 + A_1 + 2a^*A_1)\sin\tau;$$
$$\ddot{\psi}_1 + \psi_1 = -(\alpha A_1 + \alpha B_2 + \beta M_1 f_0 + 2a^*B_2)\cos\tau - [\alpha B_1 - A_2(\alpha + 2a^*)]\sin\tau;$$
$$\dot{f}_1 = (M_1 B_2 - M_1 A_2)\cos^2\tau - (\alpha/2 + a^*) f_0 - M_1 (A_2 + B_1)\cos\tau \sin\tau.$$

В силу периодичности по τ функций φ_1, ψ_1 и f_1 приходим к системе пяти однородных уравнений для коэффициентов A_1, B_1, A_2, B_2 и f_0. Эта система будет иметь ненулевое решение, если ее определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -(1+2a^*) & 0 & 0 & 0 \\ -(\alpha+2a^*) & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2a^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha+2a^* & \beta M_1 \\ 0 & 0 & -M_1/2 & +M_1/2 & -(\alpha+2a^*)/2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

обратится в нуль. Из условия обращения в нуль определителя (9) находим искомые характеристические показатели системы уравнений в вариациях (7). Именно, два характеристических показателя равны

$$a_1^* = 0; \quad a_2^* = -(\alpha + 1)/2,$$

а остальные три удовлетворяют уравнению третьего порядка

$$4a^{*3} + 2(2\alpha + 1)a^{*2} + (\alpha^2 + \alpha + \beta M_1^2)a^* + \beta M_1^2 = 0. \tag{10}$$

Периодическое движение будет устойчивым, если все характеристические показатели имеют отрицательные вещественные части, т. е. если выполнено условие

$$N_0 < \frac{4\alpha + 1}{(1 - 2\alpha)\beta},$$

являющееся последним неравенством Раута — Гурвица для полинома (10) (остальные условия всегда выполняются). Таким образом, согласно проведенному исследованию, исходная система (1) при $N_0 > \alpha/\beta$ допускает периодическое решение

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{2\pi\hbar\,\omega_2 (N_0 - \alpha/\beta)\alpha}\,\cos\left(\frac{\omega_0 t}{1 + h_2/Q^2}\right) + \dots;$$
$$\boldsymbol{P} = -\frac{1}{4\pi Q}\sqrt{2\pi\hbar\,\omega_2\,\alpha(N_0 - \alpha/\beta)}\left[\left(\sin\frac{\omega_0 t}{1 + h_2/Q^2}\right) + \right. \tag{11}$$
$$\left. + \frac{8(1+\delta) + \alpha(N_0\beta - \alpha)}{8(1+\alpha)Q}\cos\left(\frac{\omega_0 t}{1 + h_2/Q^2}\right)\right] + \dots;$$
$$\boldsymbol{N} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha(N_0 - \alpha/\beta)}{4Q}\sin\left(\frac{2\omega_0 t}{1 + h_2/Q^2}\right) + \dots,$$

где

$$h_2 = (\alpha - \delta)/2(\alpha + 1) - \alpha(N_0\beta - \alpha)/16(\alpha + 1),$$

а параметры α, β и δ определяются соотношениями (4). При

$$N_0 < (1 + 4\alpha)/(1 - 2\alpha)\beta \tag{12}$$

это периодическое движение устойчиво; при обратном неравенстве — неустойчиво.

Вывод об устойчивости колебаний молекулярного генератора в работе [3] получен, по-видимому, за счет недостаточно корректного решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, ЖЭТФ, **33**, 945 (1957).
2. В. С. Троицкий, ЖЭТФ, **34**, 390 (1958).
3. Х. Ю. Халдре, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, 5—6, 60 (1958).

Исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 26 мая 1958 г.