

К ТЕОРИИ КОГЕТРОНА

В. М. Файн

В статье рассмотрены некоторые теоретические вопросы, связанные с режимами работы когетрона—генератора микрорадиоволн, использующего спонтанное излучение спиновых систем в магнитном поле.

В связи с тенденцией к проникновению радиофизических методов в область весьма коротких радиоволн с длинами волн порядка миллиметров и меньше приобретает особую актуальность вопрос об источниках генерации таких волн. Обычные электронные приборы, вообще говоря, не пригодны для этой цели потому, что они содержат резонаторы, размеры которых порядка длины генерируемой волны. Обычные квантовые генераторы [1,2] нельзя использовать для этой цели по тем же причинам.

В то же время предложенный в работах [3,4] генератор электромагнитных волн—когетрон не нуждается в резонаторе и может давать значительные мощности в области очень коротких микрорадиоволн.

Принцип действия когетрона следующий. Имеется система квантовых объектов, обладающих двумя энергетическими уровнями (это могут быть молекулы газа, ионы или электроны в парамагнетике, спины в ферритах и т. п.). Если мы каким-либо способом переведем систему в возбужденное состояние, т. е. все квантовые объекты будут находиться на возбужденном (например, верхнем) уровне, то через некоторое время система спонтанно излучит кванты энергии $\hbar\omega = E_2 - E_1$, где E_2 , E_1 —уровни энергии объектов ($E_2 > E_1$).

Если система имеет линейные размеры много меньше длины генерируемой волны*, то процесс спонтанного излучения может происходить достаточно быстро [3]. Это связано с тем, что спонтанное излучение происходит когерентно [5,3]. После высвечивания система опять переводится на верхний уровень и т. д.

Для определенности будем говорить о системе электронов. Электрон в магнитном поле имеет два энергетических состояния—верхнее или нижнее, соответственно тому, направлен ли магнитный момент электрона против поля или по полю.

В состоянии равновесия большая часть электронов имеет магнитные моменты, направленные по магнитному полю. Если поле переключить (с изменением направления поля на обратное) достаточно быстро по сравнению со временем релаксации, то электроны окажутся в верхнем электрическом состоянии [3,4]. После спонтанного высвечивания необходимо снова переключить магнитное поле и т. д.

Аналогичная процедура возможна в присутствии электрического поля для молекул, если использовать уровни штарковского расщепления (в линейном штарк-эффekte).

* Мы увидим далее, что это ограничение не является очень жестким.

В настоящей статье приведена теория когетрона с использованием магнитного поля, хотя многие из результатов работы справедливы для любого когетрона.

1. УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В КОГЕТРОНЕ

Если когетрон состоит из электронов, помещенных в магнитное поле, то полный магнитный момент системы $\vec{\mu}$ подчиняется уравнению

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma [\vec{\mu} \mathbf{H}] + \frac{2\gamma}{3c^3} [\ddot{\vec{\mu}} \vec{\mu}] - \frac{1}{\tau} [\vec{\mu} - \vec{\mu}_0(t)], \quad (1)$$

где $\gamma = -\frac{g\mu_B}{\hbar} < 0$ — гиромангнитное отношение, g — фактор спектроскопического расщепления, равный 2 для свободного электрона, μ_B — магнетон Бора, $\vec{\mu}_0(t)$ — мгновенное равновесное значение $\vec{\mu}(t)$, соответствующее полю $\mathbf{H}(t)$, τ — время релаксации, c — скорость света.

Первый член в (1) учитывает действие внешнего поля $\mathbf{H}(t)$, второй член связан с учетом собственного магнитного поля системы (сила радиационного трения; см., например, [6])* . Третий член дает изменение $\vec{\mu}$ вследствие релаксационных процессов, не связанных со спонтанным излучением.

Если релаксационный процесс есть процесс типа соударений, то описывающая систему матрица плотности, усредненная по всем соударениям, имеет вид [8]:

$$\rho(t) = \int_0^\infty \rho(t, t_0 = t - \theta) \tau^{-1} e^{-\theta/\tau} d\theta. \quad (2)$$

Отсюда нетрудно получить изменение ρ в единицу времени вследствие соударений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} [\rho(t) - \rho_0(t)], \quad (3)$$

где $\rho_0(t)$ — матрица плотности, соответствующая мгновенному равновесию в момент t . Используя равенство (3), нетрудно получить последний член в (1).

Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ — постоянное внешнее магнитное поле, направленное по оси z . Тогда уравнение (1) (без третьего члена справа) описывает процессию полного магнитного момента системы $\vec{\mu}$ относительно оси z с частотой $\omega = -\gamma H_0$. Если эта частота много больше $\Delta\omega$ — ширины линии вследствие радиационного затухания, то угол между $\vec{\mu}$ и \mathbf{H}_0 медленно изменяется (по сравнению с ω). При этом абсолютная величина $\vec{\mu}$ остается постоянной. (Учет третьего члена приводит также и к изменению $|\vec{\mu}|$.) В дипольном приближении (когда размеры системы много меньше длины излучаемой волны) излучение такой системы будет полностью определяться

* В уравнении, приведенном в работе [6], имеется еще один консервативный член, который приводит, вообще говоря, к небольшому сдвигу частоты излучения. В рамках настоящей работы учет этого члена не представляет интереса. Более подробно см. работу [7].

изменением магнитного дипольного момента $\vec{\mu}$. Если ввести спин J , соответствующий магнитному моменту $\vec{\mu}$:

$$\vec{\mu} = -g\mu_B J, \quad (4)$$

то уравнение (1) описывает (без учета третьего члена) процесс излучения квантов энергии $\hbar\omega$ с изменением квантового числа m (проекции спина на ось z) и с постоянным $j(j+1)$ — абсолютная величина вектора полного спина).

Для любой системы квантовых объектов с двумя энергетическими уровнями можно ввести оператор R [3,5], аналогичный полному спину системы. Излучение будет происходить при неизменном r (квантовое „кооперационное“ число, аналогичное j) и с изменением m — величины, аналогичной проекции спина на ось z .

Нетрудно убедиться, что уравнение (1) описывает также (в принятом приближении) процесс излучения без магнитного поля; нужно только заменить $-\gamma H_0$ на $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$, J на R и в равенстве (4) $(g\mu_B)^2$ на $2|\mu_{12}|^2$, где μ_{12} — матричный элемент дипольного момента (электрического или магнитного). После этой замены достаточно сравнить (1) с соответствующим уравнением, описывающим изменение m (см. [3]).

В уравнении (1) можно приближенно положить, что μ_x и μ_y гармонически зависят от времени с частотой $\omega = -\gamma H$ (поле H направлено по оси z ; $\omega \gg \Delta\omega$) Тогда легко найти*:

$$\dot{\mu}_z = \frac{2\gamma}{3c^3} (\gamma H)^3 (\mu^2 - \mu_z^2) - \frac{1}{\tau} (\mu_z - \mu_0); \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\mu^2}{dt} + \frac{1}{\tau} \mu^2 = \frac{1}{\tau} \mu_0 \mu^2. \quad (6)$$

Если ввести новую переменную φ

$$\mu_z = \mu \cos \varphi \quad (7)$$

и положить (как это имеет место для парамагнетика)

$$\vec{\mu}_0(t) = \kappa H(t) \quad (8)$$

(κ — константа, не зависящая от величины поля H), то уравнения (5), (6) принимают вид**:

$$\dot{\varphi} = - \left[\frac{2\gamma}{3c^3} (\gamma H)^3 \mu + \frac{\kappa H}{\mu\tau} \right] \sin \varphi; \quad (9)$$

$$\mu + \frac{1}{\tau} \mu = \frac{\kappa H}{\tau} \cos \varphi. \quad (10)$$

В дальнейшем будем исходить из этой системы уравнений.

2. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ПРИ $t \ll \tau$

Как известно [9], время релаксации τ может быть достаточно велико. Поэтому представляет интерес рассмотреть возможные режимы работы когетрона за время $t \ll \tau$. В этом случае уравнения (9), (10) принимают вид:

$$\dot{\varphi} = - \left[\frac{2\gamma}{3c^3} (\gamma H)^3 \mu \right] \sin \varphi; \quad \dot{\mu} = 0. \quad (11)$$

* Предполагается, что поле $H(t)$ медленно меняется за время $1/\omega$.

** После замены, предложенной выше, и при $1/\tau = 0$ система (9)–(10) переходит в уравнение (2.68) работы [3]. Другой знак при $\sin \varphi$ связан с тем, что магнитный момент антипараллелен спину системы.

Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \exp \left\{ -\frac{2\gamma^4}{3c^3} \mu \int_0^t H^3 dt \right\}. \quad (12)$$

Интенсивность излучения равна

$$I = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mu})^2 = \frac{2}{3c^3} \gamma^4 H^4 \mu^2 \sin^2 \varphi \quad (13)$$

(или в общем случае [3])

$$I = I_0 r^2 \sin^2 \varphi, \quad (14)$$

где I_0 — интенсивность одного изолированного квантового объекта).

Используя (12) и (13), получаем общую формулу для интенсивности излучения:

$$I(t) = \frac{8}{3c^3} \frac{\gamma^4 H^4 \mu^2}{\left[\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \exp \left(-\frac{2\gamma^4}{3c^3} \mu \int_0^t H^3 dt \right) + \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \exp \left(\frac{2\gamma^4}{3c^3} \mu \int_0^t H^3 dt \right) \right]^2}. \quad (15)$$

Здесь φ_0 означает начальный угол между осью z и $\vec{\mu}$.

Заметим, что классическими выражениями (которые мы до сих пор получали) можно пользоваться, если угол φ не очень близок к 0 или π [3]. Если не учитывать этого обстоятельства, то можно прийти к неверному выводу, что излучения вообще не будет ($I \equiv 0$), если $\varphi_0 = \pi^*$, а при $\varphi_0 = \pi - \varepsilon$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ длительность процесса излучения стремится к бесконечности. Проведенный в работе [3] учет квантовых эффектов показал, что случаи $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_0 = \pi - \varepsilon$ (где ε мало) незначительно отличаются друг от друга. В дальнейшем будем считать, что φ не принимает значения, близкие к π и 0.

Сейчас рассмотрим два режима работы.

Первый режим соответствует скачкообразному изменению магнитного момента. Поле H имеет вид, показанный на рис. 1 (меандр). Тогда интенсивность следующим образом зависит от времени. При $0 \leq t \leq T$

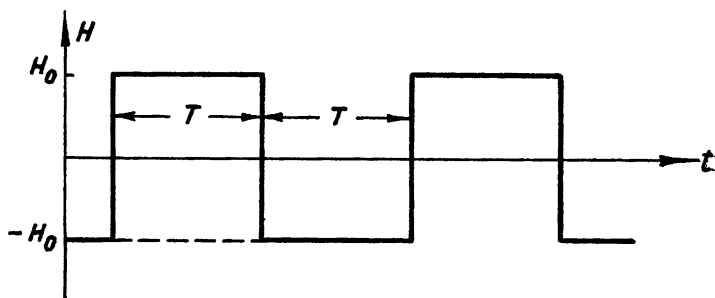


Рис. 1.

$$I(t) = \frac{8\gamma^4 H^4}{3c^3} \mu^2 \frac{1}{\left[\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \exp \left(-\frac{2\gamma^4}{3c^3} \mu H_0^3 t \right) + \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \exp \left(\frac{2\gamma^4}{3c^3} \mu H_0^3 t \right) \right]^2}; \quad (16)$$

при $T \leq t \leq 2T$

* Такой вывод сделан в работе [10].

$$I(t) = \frac{8\gamma^4 H^4}{3c^3} \mu^2 \frac{1}{\left[\operatorname{tg} \frac{\varphi_0'}{2} \exp\left(\frac{2\gamma^4}{3c^3} \mu H_0^3 t\right) + \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0'}{2} \exp\left(-\frac{2\gamma^4}{3c^3} \mu H_0^3 t\right) \right]^2}, \quad (16')$$

где $\operatorname{tg} \frac{\varphi_0'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \exp\left(-\frac{2\gamma^4}{3c^3} \mu H_0^3 T\right)$ и т. д.

Можно подобрать время T таким образом, чтобы $\operatorname{ctg}(\varphi_0'/2) = \operatorname{tg}(\varphi_0/2)$ (для этого нужно, чтобы $\operatorname{tg}^2(\varphi_0/2) = \exp(-2\gamma^4 \mu H_0^3 T/3c^3)$ *. Тогда через время T процесс излучения будет в точности повторяться. Если $\varphi_0 > \pi/2$, то при $t=0$ начинается процесс излучения, при $\varphi = \pi/2$ излучение максимально, в момент T происходит изменение знака поля, и процесс снова повторяется.

Рассмотрим другой режим, когда H гармонически зависит от времени:

$$H = H_0 \cos \Omega t. \quad (17)$$

Частота изменения Ω должна, конечно, быть много меньше $\omega = -\gamma H_0$.

В этом случае интенсивность равна

$$I(t) = \frac{8(\gamma H)^4}{3c^3} \mu^2 \frac{1}{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^2}, \quad (18)$$

где

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \exp\left\{ -\frac{\gamma^4 H_0^3 \mu^2}{3c^3 \Omega} \sin \Omega t + \frac{\gamma^4 H_0^3 \mu^2}{9c^3 \Omega} \sin^3 \Omega t \right\}. \quad (19)$$

Если в начальный момент $\varphi_0 = \pi/2$, то может существовать режим (при достаточно большом Ω), когда φ все время близко к $\pi/2$, и интенсивность близка к максимальной.

3. УЧЕТ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим сейчас возможность установления стационарного процесса в течение времени $t \gg \tau$ и покажем, что при $\Omega \gg 1/\tau$ стационарного режима не существует ($H = H_0 \cos \Omega t$)**.

Исходим из уравнения (10)

$$\dot{\mu} + \frac{1}{\tau} \mu = \frac{\mu_0(t)}{\tau} \cos \varphi,$$

в котором $\mu_0(t) = \chi H = \chi H_0 \cos \Omega t = \mu_0 \cos \Omega t$. Разложив $\cos \varphi$ в ряд Фурье

$$\cos \varphi = \sum \alpha_k \cos k \Omega t + \beta_k \sin k \Omega t, \quad (20)$$

будем искать μ в виде

$$\mu = \bar{\mu} + \xi, \quad (21)$$

где $\bar{\mu}$ определяется из уравнения

$$\dot{\bar{\mu}} + \frac{1}{\tau} \bar{\mu} = \frac{1}{\tau} \mu_0 \alpha_1. \quad (22)$$

Тогда решение (10) можно записать в виде

$$\mu = \mu(0) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\mu_0 \alpha_1}{2} + \xi, \quad (23)$$

* Если $T \geq \tau_{r,-r}$ — времени перехода из состояния $\varphi \approx \pi$ ($m = r$) в состояние $\varphi \approx 0$ ($m = -r$; см. [3]), то начальные углы φ_0, φ_0' и т. д. автоматически устанавливаются равными $\sim \pi, 0$.

** Этот вывод не относится к системам, релаксирующим с сохранением $|\vec{\mu}|$ (например, к ферритам).

где

$$\begin{aligned}
 \xi = & \frac{1}{\tau} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2} \frac{\frac{1}{\tau} \cos(k-1)\Omega t + (k-1)\Omega \sin(k-1)\Omega t}{(k-1)^2 \Omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} + \\
 & + \frac{1}{\tau} \frac{\alpha_0}{2} \frac{\frac{1}{\tau} \cos \Omega t + \Omega \sin \Omega t}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} + \\
 & + \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2} \frac{\frac{1}{\tau} \cos(k+1)\Omega t + (k+1)\Omega \sin(k+1)\Omega t}{(k+1)^2 \Omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} + \\
 & + \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{2} \left[\frac{\frac{1}{\tau} \sin(k-1)\Omega t - (k-1)\Omega \cos(k-1)\Omega t}{(k-1)^2 \Omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\frac{1}{\tau} \sin(k+1)\Omega t - (k+1)\Omega \cos(k+1)\Omega t}{(k+1)^2 \Omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right].
 \end{aligned} \quad (24)$$

При $\Omega \gg \frac{1}{\tau}$, $\xi \rightarrow 0$ и в стационарном состоянии

$$\mu = \frac{\mu_0 \alpha_1}{2}. \quad (25)$$

Подставляем это значение в уравнение (9) и получаем равенство (19) с μ из (25).

Теперь находим

$$\cos \varphi = \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{-1}. \quad (26)$$

Так как $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ содержит только $\sin \Omega t$ и $\sin^3 \Omega t$, то легко убедиться, что разложение (26) в ряд Фурье не содержит $\cos \Omega t$, т. е. $\alpha_1 = 0$, и, следовательно, стационарного режима в этих условиях не существует.

Перейдем теперь к рассмотрению первого из обсуждавшихся в разделе 2 режимов, когда зависимость $H(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 1. Если

$$T > \tau; \quad T > \tau_{r,-r}, \quad (27)$$

где $\tau_{r,-r}$ — время спонтанного перехода из состояния, когда магнитный момент антипараллелен H ($m=r$), в состояние с $\vec{\mu}$, параллельным H ($m=-r$), то за время T магнитный момент восстановит свою начальную величину (по модулю), и система может работать в стационарном режиме. При $r \gg 1$ [3]

$$\tau_{r,-r} = (2r \gamma_0)^{-1} \ln 2r, \quad (28)$$

где r для электронов имеет смысл абсолютной величины полного спина электронов, а γ_0 — ширина линии изолированного электрона в магнитном поле.

Следует отметить, что если $\tau_{r,-r} \ll \tau$, то когетрон может работать за время, меньшее τ ; затем в течение времени порядка τ необходимо прекратить изменение магнитного поля; установится тепловое равновесие, затем снова можно изменять магнитное поле и т. д.

4. ОБСУЖДЕНИЕ. ОЦЕНКИ

Полная энергия, излученная за цикл переключения магнитного поля, равна

$$E = 2r\hbar\omega = |n_1 - n_2| \hbar\omega, \quad (29)$$

где $n_1 - n_2$ — равновесная разность населенностей уровней E_1 и E_2 . Средняя мощность равна

$$W = 2r\hbar\omega/T, \quad (30)$$

где T — период изменения магнитного поля (с учетом времени переключения). При этом необходимо, чтобы $T \gg \tau_{r,-r}$. Если $\tau_{r,-r}$ окажется очень малым по сравнению со временем переключения магнитного поля, то до окончания процесса переключения система уже излучит на более низких частотах (в процессе переключения частота меняется, так как $\omega = -\gamma H$). Время $\tau_{r,-r}$ можно увеличить, если брать объемы, немного меньшие по линейным размерам λ (что до сих пор предполагалось), а порядка и больше λ . При заданном T мощность (30) увеличится, так как увеличивается число частиц, а, следовательно, и r .

Заметим, что переключение магнитного поля можно осуществлять не только электрическим, но и механическим способом, перемещая образец в магнитных полях, направленных в разных местах антипараллельно.

Перейдем к оценкам. Энергия, излучаемая за один цикл, равна (29) $E = 2r\hbar\omega = 4\pi r\hbar c \lambda^{-1} \cdot 10^{-7} = 4r\lambda^{-1} \cdot 10^{-23}$ дж. При абсолютном нуле температуры $2r = N$ — полному числу электронов и, следовательно, $E = 2N\lambda^{-1} \cdot 10^{-23}$ дж.

Цикл перемагничивания определяется временем спонтанного излучения (28). Если положить $\gamma_0 \approx \mu_B^2 \omega_0^3 / \hbar c^3$ [11], $\mu_B = 10^{-20}$ CGSE, то $\tau_{r,-r}$, рассчитанное на объем $(\lambda/4)^3$, равно

$$\tau_{r,-r} \approx \frac{2,31g_{10}(10^{-2}\eta)}{4 \cdot 10^{-13}\eta},$$

где η — концентрация электронов.

Проведем оценки для феррита. Положим $\eta = 10^{22}$, тогда $\tau_{r,-r} \approx 10^{-8}$ сек (объем $(\lambda/3)^3$). Энергия в одном импульсе (при $\lambda = 1$ см) $E \approx 3 \cdot 10^{-3}$ дж, пиковая мощность в импульсе $\approx 3 \cdot 10^{-3} \times 10^8 = 3 \cdot 10^5$ вт.

В заключение следует заметить, что изложенный здесь метод возбуждения переменным магнитным полем ограничен со стороны очень высоких частот как величиной поля, так и возможностью быстрого переключения поля. Для длин волн порядка 10^{-2} см необходимы поля $\sim 10^5 \div 10^6$ гаусс.

Однако когетрон, в принципе, может работать и в этой области частот, если будет найден способ возбуждения системы квантовых объектов. Не исключено, что возбуждение можно производить оптическим способом [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, *ЖЭТФ*, **27**, 431 (1954); *ЖЭТФ*, **30**, 560 (1956);
J. P. Gordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes, *Phys. Rev.*, **95**, 282 (1954).
2. I. P. Wittke, *Proc. IRE*, **45**, 92 (1957).
3. В. М. Файн, *УФН*, **64**, 273 (1958).
4. В. М. Файн, *ЖЭТФ*, **34**, 1032 (1958).
5. P. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **93**, 99 (1954).
6. В. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ*, **13**, 33 (1933); Труды ФИАН, 3, вып. 2, 195 (1946).
7. В. М. Файн, *ЖЭТФ* (в печати).
8. R. Karplus, J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **73**, 1178 (1948).
9. M. W. P. Strandberg, *Proc. IRE*, **45**, 92 (1957).
10. N. Bloembergen, R. V. Pound, *Phys. Rev.*, **95**, 8 (1954).
11. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.

Исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 мая 1958 г.