ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 5—6 *РАДИОФИЗИКА* *1958*

О ШИРИНЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА НА ТРЕХ УРОВНЯХ

А. Н. Малахов, В. М. Файн

Проведен расчет ширины линии квантового генератора с учетом тепловых шумов и флюктуаций частоты и амплитуды задающего поля.

Как известно, квантовый генератор состоит из системы с дискретными энергетическими уровнями, помещенной в резонатор. Роль квантовой системы с дискретными уровнями энергии может играть молекулярный газ, парамагнитные вещества и т. п.

Заменяя полость резонатора эквивалентным контуром, можно получить следующее уравнение, описывающее колебания в контуре,

$$\ddot{E}+4\pi\ddot{P}+\frac{\omega_0}{Q}(\dot{E}+4\pi\dot{P})+\omega_0^2E=0. \tag{1}$$

Здесь E—электрическое поле*, P—поляризация среды в полости резонатора, Q—добротность контура, ω_0—собственная частота контура.

Принцип работы квантового генератора следующий. Пусть E_1, E_2, E_3 суть три уровня квантовой системы ($E_1<E_2<E_3$). Тогда внешнее поле частоты $\Omega_{31}\approx\frac{E_3-E_1}{\hbar}=\omega_{31}$ и достаточно большой амплитуды E_{31} при определенных условиях (см. [1,2]) переводит квантовую систему в такое состояние, когда на уровне 3 населенность выше, чем на уровне 2. В таком состоянии (неравновесном) система способна генерировать излучение.

Внешнее поле $E_{31}\cos\Omega_{31}t$ учитывается в (1) в членах с P. Поляризация P на частоте $\omega\approx\omega_{32}\equiv\frac{E_3-E_2}{\hbar}$ зависит от амплитуды и частоты внешнего поля.

Таким образом, уравнение (1) является в сущности уравнением автоколебаний для излучения с частотой $\omega\approx\omega_{32}\approx\omega_0$. Поскольку, однако, в этой автоколебательной системе имеются флюктуации, то, как известно (см., например, [3]), автоколебания в общем случае уже не будут монохроматичными.

Основными причинами, вызывающими уширение спектральной линии, являются, во-первых, тепловой шум контура и, во-вторых, флюктуации амплитуды E_{31} и частоты Ω_{31} внешнего задающего поля.

Ширину линии, вызываемую тепловыми шумами, называют естественной шириной линии. Ширину линии квантового генератора, обусловленную флюктуациями амплитуды и частоты внешнего поля, можно назвать технической шириной линии квантового генератора.

Заметим, что так как амплитуда и частота внешнего поля вхо-

---

* Здесь и в дальнейшем мы будем для определенности говорить об электрическом поле (и диэлектрической проницаемости), хотя всюду можно заменить электрическое поле E на магнитное H и соответственно P на M — намагниченность среды.

дят в уравнение (1) в виде параметров, то поиски технической ширины линии являются, в сущности, рассмотрением влияния флюктуации параметров автоколебательной системы на амплитуду и частоту автоколебаний.

1. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Для удобства изложения и расчета введем комплексное электрическое поле $Э = E_0 e^{i\omega t}$. Тогда поле E уравнения (1) представим как $E = \mathrm{Re}\{Э\}$, а поляризацию как $P = \mathrm{Re}\{\varkappa Э\}$, где $\varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$, а $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ есть комплексная диэлектрическая проницаемость.

Можно показать, что уравнение (1) для E и P сводится к следующему уравнению для комплексного поля Э:

$$\ddot{Э} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Э} + aЭ = 0, \tag{2}$$

где

$$a = \omega_0^2/\varepsilon = a' + ia''; \quad a' = \frac{\omega_0^2}{|\varepsilon|^2}\varepsilon'; \qquad a'' = \frac{\omega_0^2}{|\varepsilon|^2}\varepsilon''.$$

Перейдем теперь к вычислению комплексной диэлектрической проницаемости ε. Мы исходим из уравнения для матрицы плотности [6] (см. также [4])

$$\frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} + i\omega_{mn}\rho_{mn} = \frac{i}{\hbar}F\sum_{l=1}^{3}(\mu_{ml}\rho_{ln} - \rho_{ml}\mu_{ln}) - [\tau^{-1}(\rho - \rho_0)]_{mn}, \tag{3}$$

где μ_{ml} — матрица дипольных моментов, $F = E_{13}\cos\Omega_{13}t + E\cos\Omega_{23}t$ — электрическое поле,

$$[\tau^{-1}(\rho - \rho_0)]_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_1}(\rho - \rho_0)_{mn} & \text{при } m = n \\[2ex] \dfrac{1}{\tau_2}\rho_{mn} & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

(τ_1 и τ_2 — времена релаксации) *.

При решении удерживаем только резонансные члены

$$\bar{\rho}_{32}e^{-i\Omega_{32}t}; \quad \overset{+}{\rho}_{23}e^{i\Omega_{32}t}; \quad \bar{\rho}_{31}e^{-i\Omega_{31}t}; \quad \overset{+}{\rho}_{13}e^{i\Omega_{31}t};$$

$$\bar{\rho}_{21}e^{-i(\Omega_{31}-\Omega_{32})t}; \quad \overset{+}{\rho}_{12}e^{i(\Omega_{31}-\Omega_{32})t}.$$

В работе [4] не были учтены последние два члена, что привело к неверному значению диэлектрической проницаемости. Правильный расчет (для слабого поля E и сильного поля E_{13}) приведен в [1,2].

Решение уравнения (3) для произвольных напряженностей (вблизи резонанса) сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

---

* Здесь ρ_0 — матрица плотности, соответствующая мгновенному равновесию в момент t, когда поле имеет значение $F(t)$. В работе [6] эта матрица вычислялась для случая, когда энергия взаимодействия с полем много меньше $\varkappa T$ ($\varkappa$ — постоянная Больцмана, T — температура). В работе [4] и здесь рассматривается другой предельный случай $T \approx 0$. В этом случае ρ_0 — диагональная матрица. В области, близкой к резонансу, решение слабо зависит от характера предположений о матрице ρ_0.

$$
\left.\begin{aligned}
&\tau_2^{-1}(4\Delta+\gamma_{13}^2)\,r_1-[4\Delta\delta+\gamma_{13}^2(\delta_1-\delta)]\,s_1-\tau_2^{-1}\gamma_{13}^2 p_1-\gamma_{13}^2(\delta_1-\delta)q_1=0;\\
&[4\Delta\delta+\delta_{13}^2(\delta_1-\delta)]\,r_1+[\tau_2^{-1}(4\Delta+\gamma_{13}^2)+4\Delta\gamma_{23}^2\tau_1]\,s_1-\gamma_{13}^2(\delta^1-\delta)p_1+\\
&\qquad+[2\tau_1\Delta+\tau_2^{-1}]\,\gamma_{13}^2 q_1=2D_{23}^{(0)}\Delta;\\
&-\gamma_{23}^2\tau_2^{-1}r_1+(\delta_1-\delta)\gamma_{23}^2 s_1+\tau_2^{-1}(4\Delta+\gamma_{23}^2)\,p_1-[4\delta_1\Delta-\gamma_{23}^2(\delta_1-\delta)]q_1=0;\\
&(\delta_1-\delta)\gamma_{23}^2 r_1+[2\Delta\tau_1+\tau_2^{-1}]\,\gamma_{23}^2 s_1+[4\Delta\delta_1-\gamma_{23}^2(\delta_1-\delta)]\,p_1+\\
&\qquad+[\tau_2^{-1}(4\Delta+\gamma_{23}^2)+\tau_1\gamma_{13}^2 4\Delta]\,q_1=D_{13}^{(0)}\Delta.
\end{aligned}\right\}\quad(4)
$$

Здесь приняты обозначения:

$$\delta=\omega_{32}-\Omega_{32};\quad \delta_1=\omega_{31}-\Omega_{31};\quad \Delta=\tau_2^{-2}+(\delta_1-\delta)^2;\quad \gamma_{13}=\mu_{13}E_{13}/\hbar;$$
$$\gamma_{23}=\mu_{23}E_0/\hbar$$

(предполагается, что $\mu_{mn}=\mu_{nm}$);

$$r_1=\mathrm{Re}(\rho_{\overline{32}}/\gamma_{32});\quad s_1=\mathrm{Im}\,\frac{\rho_{\overline{32}}}{\gamma_{32}};\quad p_1=\mathrm{Re}\,(\rho_{\overline{31}}/\gamma_{31});\qquad q_1=\mathrm{Im}\,\frac{\rho_{\overline{31}}}{\gamma_{31}};$$
$$D_{13}^{(0)}=\rho_{11}^{(0)}-\rho_{33}^{(0)};\quad D_{23}^{(0)}=\rho_{22}^{(0)}-\rho_{33}^{(0)}$$

($D_{13}^{(0)}$, $D_{23}^{(0)}$ — разности равновесных населенностей уровней).

Далее мы будем рассматривать случай $\tau_1=\tau_2=\tau$ и введем безразмерные величины

$$(\tau\gamma_{13})^2=x;\quad (\tau\gamma_{23})^2=y;\quad \delta_1\tau=u;\quad \delta\tau=v;$$
$$r=r_1/\tau D_{13}^{(0)};\quad s=s_1/\tau D_{13}^{(0)};\quad p=p_1/\tau D_{13}^{(0)};\ q=q_1/\tau D_{13}^{(0)}.$$

Уравнения (4) переходят в следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&(4a+x)\,r-[4av+x(u-v)]\,s-xp-x(u-v)\,q=0;\\
&[4av+x(u-v)]\,r+[4a+4ay+x]\,s-x(u-v)\,p+\\
&\qquad+x(1+2a)\,q=2aD_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)};
\end{aligned}\qquad(5)
$$

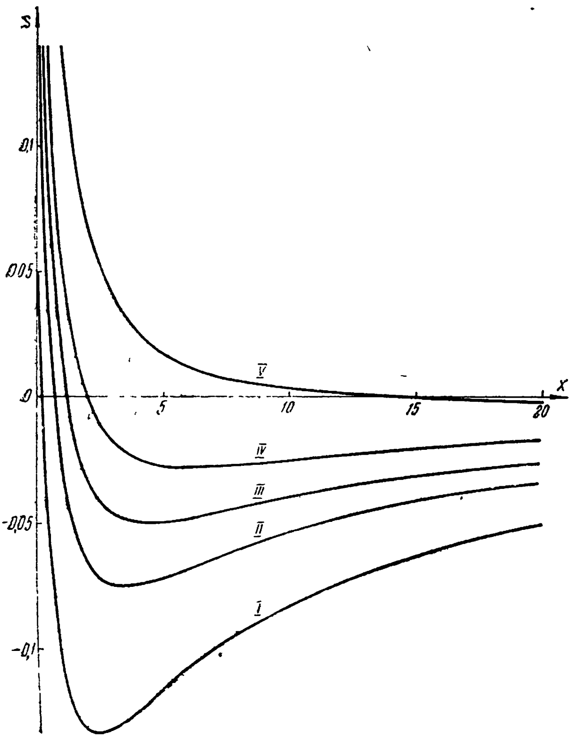

Рис. 1 Зависимость s от x при $u=v=0$, $y=0$ (при этом $r\equiv 0$):

I — $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}1$; II — $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}3$;

III — $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}4$; IV — $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}5$,

V — $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}7$

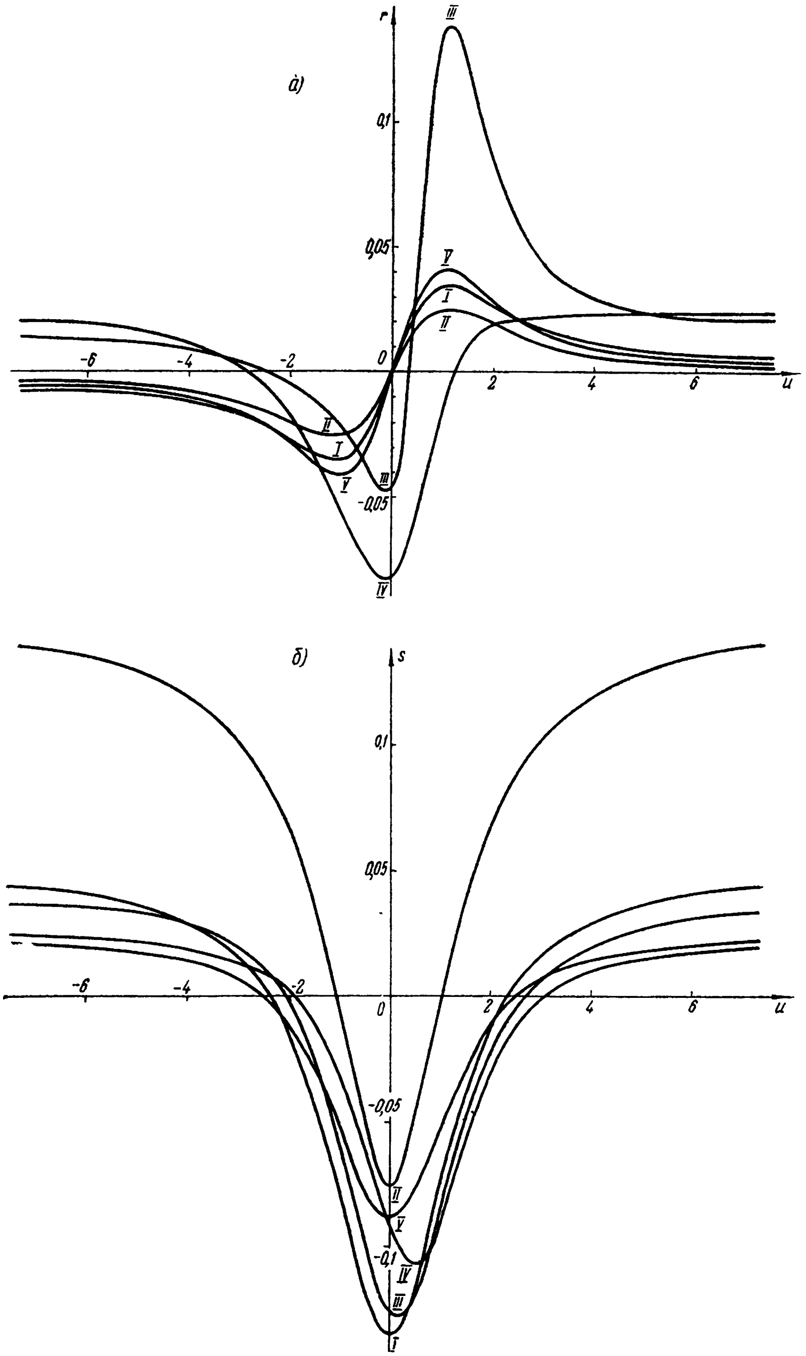

Рис. 2. а) Зависимость r от u; б) зависимость s от u:

I — $v=0$, $y=0$, $x=2{,}5$, $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}1$; II — $v=0$, $y=0$, $x=3$, $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}3$. III — $v=0{,}5$, $y=0$, $x=2{,}5$, $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}1$; IV — $v=1$, $y=0$, $x=2{,}5$, $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}1$. V — $v=0$; $y=1$, $x=2{,}5$, $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}1$.

$$-yr+y(u-v)s+(4a+y)p-[4au-y(u-v)]q=0;$$
$$y(u-v)r+y(2a+1)s+[4au-y(u-v)]p+[4a+4ax+y]q=2a,$$
где
$$a=1+(u-v)^2.$$

Решение при $u=v=0$ имеет вид:

$$r=0; \quad s=\frac{6x-2(4+4x+y)D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}}{9xy-(4+4x+y)(4+4y+x)}.$$

Графики для r и s приведены на рис. 1—3 *.

Диэлектрическая проницаемость определяется одной из формул [6] (см. также [4]) **

$$\varepsilon=1+8\pi\frac{\overset{+}{\rho}_{23}\mu_{23}}{E_0};$$

$$\varepsilon=1+8\pi\frac{\mu_{32}^2}{\hbar}r_1-i8\pi\frac{\mu_{32}^2 s_1}{\hbar};$$

$$\varepsilon=1+8\pi\frac{\mu_{32}^2\tau D_{13}^0}{\hbar}r-i8\pi\frac{\mu_{32}^2\tau D_{13}^0}{\hbar}s,$$

так что

$$\varepsilon'=1+8\pi\frac{\mu_{32}^2 D_{13}^{(0)}\tau}{\hbar}r; \qquad \varepsilon''=8\pi\frac{\mu_{32}^2\tau D_{13}^{(0)}}{\hbar}s \tag{6}$$

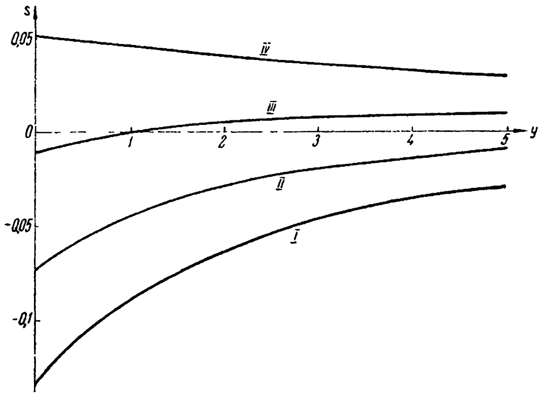

Рис. 3. Зависимость s от y при $v=u=0$ (при этом $r\equiv0$) и $x=2{,}5$: I—$D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}1$; II—$D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}3$. III—$D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}5$; IV—$D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)}=0{,}7$.

(r, s, r_1 и s_1 — функции, определяемые из уравнений (4), (5)). Таким образом, для нашего случая $\varepsilon=\varepsilon(u, v, x, y)$.

Учитывая тепловой шум контура при помощи комплексной случайной функции $\text{Э}_T(t)$, мы окончательно получаем (вместо (2)) уравнение

$$\ddot{\text{Э}}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{\text{Э}}+a\text{Э}=\text{Э}_T(t), \tag{7}$$

где

$$a=a(u, v, x, y); \quad u=(\omega_{31}-\Omega_{31})\tau; \quad v=(\omega_{32}-\omega)\tau \quad (\Omega_{32}\equiv\omega); \quad x=k_1E_{13}^2; \tag{8}$$
$$y=k_2E_0^2; \; k_1=\tau^2\mu_{13}^2/\hbar^2; \quad k_2=\tau^2\mu_{23}^2/\hbar^2.$$

* Численный расчет и построение графиков выполнены Г. А. Семеновой.

** Для Э, изменяющегося по закону $\text{Э}=E_0e^{i\omega t}$.

2. ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Предположим, что, во-первых, отсутствует тепловой шум и, во-вторых, амплитуда и частота внешнего поля постоянны и соответственно равны $\overline{E}_{13}$, $\overline{\Omega}_{13}$. В этом случае амплитуда и частота поля излучения также постоянны и равны $\overline{E}$, $\overline{\omega}$.

Нетрудно видеть, что эти стационарные значения амплитуды и частоты излучения определяются из уравнений

$$-\overline{\omega}^2+\overline{a}'=0; \quad \overline{\omega}\omega_0/Q+\overline{a}''=0, \tag{9}$$

легко получаемых из (7). Таким образом, в отсутствие флюктуаций комплексная функция поля излучения равна $Э=\overline{E}e^{\overline{i\omega t}}$.

Пусть теперь имеются флюктуации амплитуды и частоты внешнего поля $\Delta E_{13}(t)$ и $\Delta\Omega_{13}(t)$, средние значения которых равны нулю. Другими словами,

$$E_{13}=\overline{E}_{13}+\Delta E_{13}(t); \quad \Omega_{13}=\overline{\Delta\Omega}_{13}+\Omega_{13}(t)$$

или

$$u=\overline{u}+\Delta u(t); \quad \Delta u=-\Delta\Omega_{13}\tau;$$

$$x=\overline{x}+\Delta x(t); \quad \Delta x=2k_1E_{13}\Delta E_{13}.$$

Пусть теперь $Э_T(t)\neq 0$. В этом случае решение уравнения (7) будет представлять собой колебание с изменяющейся амплитудой и фазой. Предполагая флюктуации $\Delta E_{13}(t)$, $\Delta\Omega_{13}(t)$ и $Э_T(t)$ достаточно малыми, мы будем иметь излучение с медленно меняющимися амплитудой и фазой, которое может быть записано в виде

$$Э=(\overline{E}+\rho)e^{i(\overline{\omega t}+\varphi)}=Ee^{i\vartheta}, \tag{10}$$

где $\rho(t)$ — флюктуации амплитуды (малые и медленные), $\varphi(t)$ — медленные флюктуации фазы. Нетрудно видеть, что теперь

$$v=\overline{v}+\Delta v(t); \quad \Delta v=-\Delta\omega\tau=-\tau\frac{d\varphi}{dt}\equiv-\tau\nu; \tag{11}$$

$$y=\overline{y}+\Delta y(t); \quad \Delta y=2k_2\overline{E}\Delta E=2k_2\rho\overline{E}. \tag{12}$$

Представим тепловой шум в виде

$$Э_T(t)=[Э'_T(t)+iЭ_T''(t)]e^{i\vartheta}, \tag{13}$$

где $Э'_T(t)$ и $Э''_T(t)$ — медленные функции времени. Такое представление теплового шума равносильно тому, что из всего спектра тепловых шумов мы выбираем только часть, лежащую вблизи частоты автоколебания $\overline{\omega}$, ибо только на нее, в основном, и реагирует система.

Учитывая малость флюктуаций Δu, Δv, Δx, Δy, получаем:

$$a'=\overline{a}'+\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial u}\right)}\Delta u+\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial v}\right)}\Delta v+\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial x}\right)}\Delta x+\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)}\Delta y; \tag{14}$$

$$a''=\overline{a}''+\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial u}\right)}\Delta u+\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial v}\right)}\Delta v+\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial x}\right)}\Delta x+\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial y}\right)}\Delta y, \tag{15}$$

где черта сверху обозначает взятие значений при $\Delta u\equiv\Delta v\equiv\Delta x\equiv\equiv\Delta y\equiv 0$. Подставляя теперь (10), (13), (14), (15) в (7), сохраняя лишь первые производные по времени от ρ и φ (вследствие медленности изменения ρ и φ) и учитывая (9), (11), (12), можно получить следующие уравнения для $\rho(t)$ и $\nu(t)$:

$$
\begin{aligned}
&-\nu\left[2\overline{\omega}+\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial v}\right)}\tau\right]\overline{E}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{d\rho}{dt}+2k_2\overline{E}^2\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)}\rho=\overline{E}\,V_{\parallel};\\
&\nu\left[\frac{\omega_0}{Q}-\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial v}\right)}\tau\right]\overline{E}+2\overline{\omega}\frac{d\rho}{dt}+2k_2\overline{E}^2\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial y}\right)}\rho=\overline{E}\,V_{\perp},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&V_{\parallel}(t)=\frac{1}{\overline{E}}\,Э'_T(t)-\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial u}\right)}\Delta u-\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial x}\right)}\Delta x;\\
&V_{\perp}(t)=\frac{1}{\overline{E}}\,Э''_T(t)-\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial u}\right)}\Delta u-\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial x}\right)}\Delta x.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Решая уравнения (16) относительно ν и ρ и вводя относительные флюктуации амплитуды $\alpha(t)=\rho(t)/\overline{E}$, можно получить окончательно следующие уравнения для флюктуаций амплитуды и частоты излучения:

$$
\begin{aligned}
&A\frac{d\nu}{dt}+Bk_2\nu=-2\overline{\omega}\frac{dV_{\parallel}}{dt}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dV_{\perp}}{dt}-2\overline{E}^2k_2\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial y}\right)}V_{\parallel}+2\overline{E}^2k_2\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)}V_{\perp};\\
&A\frac{d\alpha}{dt}+\beta k_2\alpha=\left[2\overline{\omega}+\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial v}\right)}\tau\right]V_{\perp}+\left[\frac{\omega_0}{Q}-\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial v}\right)}\tau\right]V_{\parallel},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A=2\overline{\omega}\left[2\overline{\omega}+\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial v}\right)}\tau\right]+\frac{\omega_0}{Q}\left[\frac{\omega_0}{Q}=\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial v}\right)}\tau\right];\\
&B=2\overline{E}^2\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial y}\right)}\left[2\overline{\omega}+\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial v}\right)}\tau\right]+2\overline{E}^2\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)}\left[\frac{\omega_0}{Q}-\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial v}\right)}\tau\right].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

3. ЕСТЕСТВЕННАЯ И ТЕХНИЧЕСКАЯ ШИРИНА ЛИНИИ ГЕНЕРАТОРА

Зная спектральные плотности тепловых флюктуаций $w_T(\omega)$, флюктуаций частоты внешнего поля $w_{\Delta u}(\omega)$ и флюктуаций амплитуды внешнего поля $w_{\Delta x}(\omega)$, из уравнений (18) можно найти спектральные плотности флюктуаций частоты $w_\nu(\omega)$ и амплитуды $w_\alpha(\omega)$ излучения. Известно, что ширина спектральной линии полностью определяется функцией $w_\nu(\omega)$ и, прежде всего, ее поведением вблизи $\omega=0$. Если, например, учетверенная ширина спектра $w_\nu(\omega)$ много больше $w_\nu(0)$, то энергетическая ширина спектральной линии колебаний равна [5]

$$
\Delta\omega=\frac{1}{8}w_\nu(0). \tag{20}
$$

Допустим, что $w_T(\omega)$, $w_{\Delta u}(\omega)$ и $w_{\Delta x}(\omega)$ таковы, что упомянутое выше условие для $w_\nu(\omega)$ имеет место, и, следовательно, справедлива формула (20).

Рассмотрение $w_\nu(\omega)$ при ω, близкой к нулю, означает рассмотрение очень медленных флюктуаций частоты. Из первого уравнения (18), отбрасывая все производные по времени и принимая во вниманне (17), можно получить для очень медленных $\nu(t)$:

$$
\nu=-\frac{2\overline{E}^2}{B}\left[\frac{1}{\overline{E}}\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial y}\right)}Э'_T(t)-\frac{1}{\overline{E}}\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)}Э''_T(t)+b_u\Delta u(t)+b_x\Delta x(t)\right], \tag{21}
$$

где

$$
b_u=\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)}\,\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial u}\right)}-\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial y}\right)}\,\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial u}\right)};\quad b_x=\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)}\,\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial x}\right)}-\overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial y}\right)}\,\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial x}\right)}. \tag{22}
$$

Принимая во внимание, что вблизи $\omega = 0$ спектральная плотность $Э'_T(t)$ равна спектральной плотности $Э''_T(t)$ и равна $2\,w_T(\omega_0)\,|a|^2$, из (21) нетрудно получить следующее выражение для $w_\nu(\omega)$ при $\omega \approx 0$:

$$w_\nu(\omega) = \frac{4\overline{E^4}}{B^2}\left\{\frac{b^2\,|a|^2}{\overline{E^2}}\,2w_T(\omega_0) + b_u^2\,w_{\Delta u}(\omega) + b_x^2\,w_{\Delta x}(\omega)\right\}, \quad (23)$$

где

$$b^2 = \overline{\left(\frac{\partial a''}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)^2}.$$

Отсюда, согласно (20), имеем: $\Delta\omega = \Delta\omega_{ест} + \Delta\omega_{техн}$. Естественная ширина линии равна

$$\Delta\omega_{ест} = \frac{\overline{E^2}b^2}{B^2}\,|a|^2 w_T(\omega_0) = \frac{\overline{E^2}b^2}{4B^2}\,|a|^2\,\theta(\omega_0)\,r, \quad (24)$$

где $\theta(\omega_0)$ — эквивалентная энергетическая температура резонатора, настроенного на частоту ω_0, r — сопротивление потерь резонатора. В общем случае

$$\theta(\omega_0) = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_0}{\varkappa T}} - 1}.$$

Техническая ширина линии равна

$$\Delta\omega_{техн} = \frac{\overline{E^4}}{2B^2}\,[b_u^2\,w_{\Delta u}(0) + b_x^2\,w_{\Delta x}(0)]. \quad (25)$$

Из формул (24) и (25) видно, что в общем случае ширина спектральной линии квантового генератора на трех уровнях, кроме собственных тепловых шумов, зависит и от флюктуаций амплитуды и частоты задающего генератора.

Перейдем теперь к оценке технической ширины линии. Для оценок нужно вычислить b_u^2 и b_x^2. Используя формулы (6), (8), (22) и полагая $|\varepsilon| \simeq 1$, получаем:

$$b_u = k^2\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial u}\right); \quad b_x = k^2\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\right),$$

где $k = 8\pi\omega_0^2\,|\mu_{32}|^2 D_{13}^{(0)}\tau/\hbar$.

Для оценок рассмотрим случай $u \approx v \approx 0$, когда $r = 0$ (что легко получается из (5)) и не зависит от x и y, т. е.

$$b_x = 0; \quad b_u = -k^2\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial u}.$$

Из формулы (19) находим:

$$B = 2E^2 k\frac{\partial s}{\partial y}\left[2\omega + k\frac{\partial r}{\partial v}\tau\right]$$

(второй член исчезает, так как при $u = v = 0$ $\frac{\partial r}{\partial y} = 0$). Из соотношения (25) получаем

$$\Delta\omega_{техн} = \frac{E^4}{2B^2}\,b_u^2\,w_{\Delta u}(0) = \frac{1}{8}k^2\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\left[2\omega + k\frac{\partial r}{\partial v}\tau\right]^{-2} w_{\Delta u} \quad (26)$$

В то же время $w_{\Delta u} = \tau^2\,\Omega_{13}^2\,w_{\delta\Omega}(0)$, где $\delta\Omega = \Delta\omega_{13}/\omega_{13}$ — относительные флюктуации частоты внешнего задающего поля, $w_{\delta\Omega}(\omega)$ — спектральная плотность флюктуации $\delta\Omega$, и, следовательно,

$$\Delta\omega_{техн} = \frac{1}{8}k^2\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\tau^2\,\Omega_{13}^2\left[2\omega + k\frac{\partial r}{\partial v}\tau\right]^{-2} w_{\delta\Omega}(0). \quad (27)$$

Оценим величину $k = 8\pi\omega_0^2 |\mu_{32}|^2 D_{13}^{(0)} \tau/\hbar$. Пусть $\omega_0 = 10^{10}$ *сек*$^{-1}$, $|\mu_{32}|^2 = 10^{-36}$ (электрический дипольный момент), $D_{13}^{(0)} \approx 10^{10}$, $\tau = 10^{-4}$ *сек*; эти данные соответствуют молекулярному генератору на NH_3. Тогда $k = 2{,}5 \cdot 10^{18}$. Для генератора на парамагнитном веществе k будет того же порядка или больше, так как в этом случае $|\mu_{32}|^2 \approx 10^{-40}$ (магнитный диполь), но соответственно будет больше $D_{13}^{(0)}$ и τ. Оценим теперь $\partial r/\partial u$ и $\partial r/\partial v$. Из графика (рис. 1) при $D_{23}^{(0)}/D_{13}^{(0)} = 0{,}1$, $v = u = 0$ находим: $\partial r/\partial u = 0{,}01/0{,}2 = 5 \cdot 10^{-2}$ ($x = 2{,}5$; $y = 0$). Для оценки $\partial r/\partial v$ рассмотрим случай $x = y = u = v = 0$. Из уравнений (5) $\partial r/\partial v = D_{23}^{(0)}/2D_{13}^{(0)} = 5 \cdot 10^{-2}$. В этом случае $k \dfrac{\partial r}{\partial v} \tau = 2{,}5 \cdot 10^{18} \times 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 1{,}25 \cdot 10^{13} \gg \omega$ и формула (27) переходит в соотношение:

$$\Delta\omega_{\text{техн}} = \frac{\Omega_{13}^2}{8} w_{\delta\Omega}(0).$$

Пусть ширина линии генератора, создающего внешнее поле амплитуды E_{13} и частоты Ω_{13}, определяется формулой (20) (см. [5]), т. е. она равна

$$\Delta\Omega = \frac{1}{8} w_{\Delta\Omega}(0) = \frac{1}{8} \Omega_{13}^2 w_{\delta\Omega}(0).$$

В таком случае формула (27) переходит в

$$\Delta\omega_{\text{техн}} = k^2 \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 \tau^2 \left[2\omega + k \frac{\partial r}{\partial v} \tau\right]^{-2}.$$

Если $k \dfrac{\partial r}{\partial v} \tau \gg 2\omega$, то $\Delta\omega_{\text{техн}} \approx \Delta\Omega$, т. е. ширина спектральной линии квантового генератора по порядку величины равна ширине спектральной линии задающего генератора.

Однако не исключено, что более подробный анализ формул (22) и (23) поможет найти такой режим квантового генератора, при котором $\Delta\omega_{\text{техн}}$ меньше или даже много меньше $\Delta\Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Конторович, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, **33**, 1428 (1957).
2. Ali Javan, Phys. Rev., **107**, 1579 (1957).
3. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., **14**, 145 (1950).
4. В. М. Файн, ЖЭТФ, **33**, 1290 (1957)
5. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, **2**, 1295 (1957).
6. R. Karplus, J. Schwinger, Phys. Rev., **73**, 1020 (1948).

Исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 4 июня 1958 г.