

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ В МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Х. Ю. Халдре и Р. В. Хохлов

Статья посвящена исследованию устойчивости работы молекулярного генератора. Исследование выполнено на основе упрощения укороченных уравнений, приближенно описывающих процессы в молекулярном генераторе. Показано, что стационарные колебания в генераторе всегда устойчивы.

Теории молекулярного генератора посвящено уже большое число работ (см. обзоры [¹] и [²]). Однако до последнего времени анализ автоколебательных процессов в нем ограничивался исследованием возможных стационарных колебаний. Вопрос же о физической реализуемости этих стационарных колебаний оставался, в сущности, открытым, так как их устойчивость не изучалась.

Для исследования устойчивости стационарных колебаний в молекулярном генераторе необходимо определение поляризации молекулярного пучка, находящегося под воздействием переменного электрического поля с изменяющейся амплитудой и фазой. Такому определению посвящены работы [³,⁴,⁵]. В статьях [³] и [⁵], выполненных независимо, на основе хотя и грубого, но все же правильно учитывающего главные особенности явлений, статистического усреднения вектора поляризации авторы выводят довольно простое уравнение для поляризации. В работе [⁴] упомянутое статистическое усреднение проведено более последовательно, что дает возможность анализа ряда эффектов в молекулярном генераторе, не описываемых уравнениями работ [³,⁵]. Однако при этом, естественно, сами уравнения для определения вектора поляризации имеют более сложную структуру.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости стационарных колебаний в молекулярном генераторе. Исследование устойчивости проводится на основе использования уравнений для усредненного вектора поляризации, выведенных в [³] и [⁵]. Исследование же устойчивости с помощью более строгой методики, разработанной в [⁴], будет проведено в другом месте.

1. УСКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ

Уравнения, описывающие нестационарные процессы в молекулярном генераторе, имеют следующий вид:

$$\Sigma + \frac{\omega_p}{Q} \Sigma + \omega_p^2 \Sigma = -4\pi \vec{P};$$

$$\ddot{\vec{P}} + \frac{2}{\tau} \dot{\vec{P}} + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) \vec{P} = -2 \frac{P^2 \omega_0}{\hbar} N \Sigma; \quad (1.1)$$

$$\dot{N} + \frac{1}{\tau} (N - N_0) = -\frac{2}{\hbar \omega_0} \Sigma \left(\dot{\vec{P}} + \frac{1}{\tau} \vec{P} \right).$$

Здесь ξ — напряженность электрического поля в резонаторе генератора, P — усредненное значение поляризации молекулярного пучка, N — число активных молекул, вылетевших из резонатора, N_0 — общее число активных молекул, влетающих в резонатор, ω_p и Q — собственная частота и добротность резонатора, τ — среднее время пролета молекул сквозь резонатор, ω_0 — частота молекулярного перехода, p — матричный элемент дипольного момента молекулы, \hbar — постоянная Планка.

Уравнения (1.1) показывают [5], что молекулярный генератор подобен в некотором смысле двум слабо затухающим осцилляторам с частотами резонатора и молекулярного перехода, взаимодействующих через инерционно нелинейную связь с временной постоянной τ . При этом разность фаз колебаний в осцилляторах такова, что затухание в них может быть скомпенсировано.

Как известно, для анализа таких систем целесообразно использовать метод Ван-дер-Поля. Представим напряженность поля ξ и поляризацию пучка P в виде синусоидальных колебаний с медленно меняющимися амплитудами E и P и фазами колебаний φ и ψ :

$$\xi = E \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad P = P \cos(\omega_0 t + \psi). \quad (1.2)$$

Небольшое отличие δ частоты стационарных колебаний генератора от частоты молекулярного перехода описывается здесь линейным ростом со временем стационарных значений фаз φ_{st} и ψ_{st} :

$$\delta = \omega_0 - \omega = -\dot{\varphi}_{st} = -\dot{\psi}_{st}. \quad (1.3)$$

Изменение амплитуд и фаз со временем описывается следующей системой укороченных дифференциальных уравнений:

$$\dot{E} = -\frac{\omega_0}{2Q} E + 2\pi \omega_0 P \sin \Phi; \quad \dot{P} = -\frac{1}{\tau} P + \frac{p^2}{\hbar} N E \sin \Phi; \quad (1.4)$$

$$\dot{N} = -\frac{1}{\tau} (N - N_0) - \frac{1}{\hbar} P E \sin \Phi; \quad \dot{\varphi} = \Delta - 2\pi \omega_0 \frac{P}{E} \cos \Phi; \\ \dot{\psi} = \frac{p^2}{\hbar} N \frac{E}{P} \cos \Phi.$$

Здесь $\Delta = \omega_p - \omega_0$ — расстройка между частотой резонатора и частотой молекулярного перехода; Φ — разность фаз колебаний

$$\Phi = \psi - \varphi. \quad (1.5)$$

Вычитая из последнего уравнения (1.4) предпоследнее, можно получить уравнение, описывающее поведение разности фаз Φ :

$$\dot{\Phi} = -\Delta + \left(\frac{p^2}{\hbar} N \frac{E}{P} + 2\pi \omega_0 \frac{P}{E} \right) \cos \Phi. \quad (1.6)$$

Стационарные значения P и Φ можно получить из уравнений (1.4) и (1.6). Имеем:

$$\operatorname{ctg} \Phi = -\delta \tau; \quad P = \frac{p^2}{\hbar} N_0 E \frac{(\delta^2 + \tau^{-2})^{1/2}}{p^2 E^2 \hbar^{-2} + \delta^2 + \tau^{-2}}. \quad (1.7)$$

Подставляя эти значения в первое и четвертое уравнения системы (1.4), можно получить уравнение для стационарной амплитуды поля E и выражение для частоты колебаний $\omega = \omega_0 - \delta$:

$$\frac{1}{4\pi Q} = \frac{N_0 p^2}{\hbar \tau} P^2 E^2 \hbar^{-2} + (\delta^2 + \tau^{-2})^{-1}; \quad (1.8)$$

$$\delta = -\frac{\Delta}{1 + \tau \omega_0 / 2Q} \approx -\frac{2Q}{\omega_0 \tau} \Delta.$$

Стационарное значение числа вылетающих из резонатора активных молекул равно

$$N = \frac{\hbar}{p^2 \tau} \frac{1 + (2Q \Delta/\omega_0)^2}{4\pi Q}. \quad (1.9)$$

Условие самовозбуждения колебаний, которое может быть получено из первого соотношения (1.8), имеет вид:

$$N_0 > \frac{\hbar}{p^2 \tau} \frac{1 + (2Q \Delta/\omega_0)^2}{4\pi Q}. \quad (1.10)$$

Выражения для стационарных значений параметров колебаний практически совпадают с соответствующими выражениями Басова и Прохорова [1]. Имеющиеся несущественные отличия связаны с различным учетом затухания колебаний в резонаторе.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ.

Если проводить исследование устойчивости стационарных колебаний обычными методами, то можно легко получить следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \partial \dot{E}/\partial E - \lambda & \partial \dot{E}/\partial \Phi & \partial \dot{E}/\partial P & \partial \dot{E}/\partial N \\ \partial \dot{\Phi}/\partial E & \partial \dot{\Phi}/\partial \Phi - \lambda & \partial \dot{\Phi}/\partial P & \partial \dot{\Phi}/\partial N \\ \partial \dot{P}/\partial E & \partial \dot{P}/\partial \Phi & \partial \dot{P}/\partial P - \lambda & \partial \dot{P}/\partial N \\ \partial \dot{N}/\partial E & \partial \dot{N}/\partial \Phi & \partial \dot{N}/\partial P & \partial \dot{N}/\partial N - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.1)$$

Стационарные колебания устойчивы, если все корни этого уравнения имеют отрицательную действительную часть. Запишем уравнение (2.1) в форме

$$\lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0. \quad (2.2)$$

Для того, чтобы все корни этого уравнения имели отрицательную действительную часть, необходимо, согласно критерию Гурвица, выполнение следующих условий:

$$A_1 > 0; A_1 A_2 - A_3 > 0; A_3 (A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4 > 0; A_4 > 0. \quad (2.3)$$

Условия (2.3) являются условиями устойчивости стационарных колебаний. Однако их физический анализ весьма труден ввиду громоздкости соотношений (2.3). Поэтому представляет интерес иной подход к решению задачи об устойчивости стационарных колебаний.

Укороченные уравнения, описывающие неустановившиеся процессы в молекулярном генераторе, не являются равнозначными. Правые части уравнений для E и Φ по абсолютной величине значительно больше правых частей уравнений для P и N . Это обстоятельство позволяет ввести в укороченные уравнения малый параметр, равный отношению добротности резонатора и „добротности спектральной линии“

$$\mu = Q/\omega_0 \tau. \quad (2.4)$$

Этот параметр в экспериментально реализованных генераторах равен $10^{-3} - 10^{-4}$. Факт неравнозначности укороченных уравнений означает, что установление стационарного режима происходит быстро по координатам E и Φ и медленно по координатам P и N . Это обстоятельство приводит к тому, что вначале при нарушении стационарного режима быстрые координаты устанавливаются в соответствии с начальными значениями медленных координат, которые в это время

можно считать неизменными. После такого установления быстрых координат происходит медленное установление по остальным координатам, к которым уже в каждый момент квазистатически „приспосабливаются“ быстрые координаты.

Этот анализ процесса установления приводит к тому, что устойчивость стационарных колебаний определяется в начальные моменты установления уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -\frac{\omega_0}{2Q} E + 2\pi\omega_0 P_0 \sin \Phi; \\ \dot{\Phi} &= -\Delta + 2\pi\omega_0 \frac{P_0}{E} \cos \Phi,\end{aligned}\tag{2.5}$$

где P_0 — начальное значение поляризации при нарушении стационарного режима. В последующие моменты устойчивость определяется системой „медленных“ уравнений, а быстрые координаты квазистатически „следят“ за медленными:

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{\omega_0}{2Q} E + 2\pi\omega_0 P \sin \Phi; \\ 0 &= -\Delta + 2\pi\omega_0 \frac{P}{E} \cos \Phi; \\ P &= -\frac{1}{\tau} P + \frac{P^2}{\hbar} N E \sin \Phi; \\ \dot{N} &= -\frac{1}{\tau} (N - N_0) - \frac{1}{\hbar} P E \sin \Phi.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Подставляя в последние уравнения (2.6) значения E и Φ , определенные из первых двух уравнений, имеем для описания медленных движений уравнения

$$\begin{aligned}\dot{P} &= -\frac{1}{\tau} P + \frac{P^2}{\hbar} N \frac{4\pi Q P}{1 + (2Q \Delta/\omega_0)^2}; \\ \dot{N} &= -\frac{1}{\tau} (N - N_0) - \frac{4\pi Q}{\hbar} \frac{P^2}{1 + (2Q \Delta/\omega_0)^2}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Устойчивость по быстрым координатам определяется, согласно уравнениям (2.5), условиями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{E}}{\partial E} + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi} &= -\frac{\omega_0}{2Q} - 2\pi\omega_0 \frac{P}{E} \sin \Phi < 0; \\ \frac{\partial \dot{E}}{\partial \Phi} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi} - \frac{\partial \dot{E}}{\partial \Phi} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial E} &= \frac{\omega_0}{2Q} 2\pi\omega_0 \frac{P}{E} \sin \Phi + 4\pi^2 \omega_0^2 \frac{P^2}{E^2} \cos^2 \Phi > 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Как следует из укороченного уравнения для E , стационарное значение $\sin \Phi > 0$. Это значит, что по быстрым координатам система всегда устойчива.

Устойчивость по медленным координатам определяется, согласно уравнениям (2.7), условиями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{P}}{\partial P} + \frac{\partial \dot{N}}{\partial N} &= -\frac{1}{\tau} + \frac{P^2}{\hbar} N \frac{4\pi Q}{1 + (2Q \Delta/\omega_0)^2} - \frac{1}{\tau} < 0; \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial N} \frac{\partial \dot{N}}{\partial P} - \frac{\partial \dot{P}}{\partial N} \frac{\partial \dot{N}}{\partial P} &= -\frac{1}{\tau} \left[-\frac{1}{\tau} + \frac{P^2}{\hbar} N \frac{4\pi Q}{1 + (2Q \Delta/\omega_0)^2} \right] + 2 \frac{P^2}{\hbar^2} \frac{(4\pi Q P)^2}{[1 + (2Q \Delta/\omega_0)^2]^2} > 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Подставляя в эти соотношения стационарное значение координаты N (1.9), легко установить, что по медленным координатам устойчивость также всегда имеет место.

Таким образом, стационарные колебания в молекулярном генераторе, описываемые системой уравнений (1.1), всегда устойчивы.

Отличный от этого результат был получен в работе [6], где указывалось на существование областей значений параметров, в которых стационарные режимы неустойчивы. Такой вывод был получен вследствие использования для исследования устойчивости стационарных колебаний системы укороченных уравнений для E и Φ , в которых P и N имели квазистатические значения. (Точнее, используется величина $\epsilon_1 = 1 + 4\pi(P/N) \cos \Phi$.) Согласно изложенному, подобная процедура незаконна, так как медленно меняющиеся величины P и N при установлении не успевают следить за быстрыми изменениями E и Φ . Наоборот, медленные движения определяются системой укороченных уравнений для P и N , в которых E и Φ имеют квазистатические значения.

3. О ВОЗМОЖНОСТИ УПРОЩЕНИЯ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Приведем теперь более строгий вывод условий устойчивости (2.8) и (2.9), к которым сводятся условия (2.3) при наличии малого параметра в правых частях укороченных уравнений.

Как следует из структуры характеристического уравнения (2.1) и (2.2), коэффициенты A_i имеют разный порядок малости относительно μ , а именно:

$$A_1 \sim \omega/Q; A_2 \sim (\omega/Q)^2; A_3 \sim \tau^{-1}(\omega/Q)^3 = \mu(\omega/Q)^3; A_4 \sim \mu^2(\omega/Q)^4. \quad (3.1)$$

В результате этого характеристическое уравнение (2.2) разбивается на два, причем условия отрицательности действительных частей корней этого уравнения сводятся к условиям устойчивости по быстрым и по медленным координатам (см. в этой связи [7] и [8]).

Действительно, пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 — корни характеристического уравнения (2.2). Тогда

$$A_1 = - \sum_{k=1}^4 \lambda_k; \quad A_2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^4 \lambda_i \lambda_k; \quad A_3 = - \frac{1}{6} \sum_{i \neq k \neq j}^4 \lambda_i \lambda_k \lambda_j; \quad (3.2)$$

$$A_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4.$$

Сопоставляя (3.2) с (3.1), можно видеть, что два корня λ_1 и λ_2 должны иметь порядок величины ω/Q , а два других λ_3 и λ_4 — порядок $\mu\omega/Q$. Если подставить теперь корень λ_1 или λ_2 в характеристическое уравнение (2.2) и пренебречь в нем величинами порядка μ и выше, то характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda^4 + \lambda^3 A_1 + \lambda^2 A_2 = 0 \quad (3.3)$$

или (для нетривиальных корней):

$$\lambda^2 + \lambda A_1 + A_2 = 0. \quad (3.4)$$

Если же, наоборот, подставить в (2.2) корень λ_3 или λ_4 и пренебречь членами порядка μ^2 и μ^4 , характеристическое уравнение приобретает вид

$$\lambda^2 A_2 + \lambda A_3 + A_4 = 0. \quad (3.5)$$

Итак, характеристическое уравнение (2.2) распадается на два уравнения (3.4) и (3.5) (одно — для корней, порядок которых ω/Q , дру-

гое — для малых корней, порядок которых $\mu\omega/Q$). Эти уравнения, как нетрудно показать, имеют вид:

$$\begin{vmatrix} \partial\dot{E}/\partial E - \lambda & \partial\dot{E}/\partial\Phi \\ \partial\dot{\Phi}/\partial E & \partial\dot{\Phi}/\partial\Phi - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \partial\dot{E}/\partial E & \partial\dot{E}/\partial\Phi & \partial\dot{E}/\partial P & \partial\dot{E}/\partial N \\ \partial\dot{\Phi}/\partial E & \partial\dot{\Phi}/\partial\Phi & \partial\dot{\Phi}/\partial P & \partial\dot{\Phi}/\partial N \\ \partial\dot{P}/\partial E & \partial\dot{P}/\partial\Phi & \partial\dot{P}/\partial P - \lambda & \partial\dot{P}/\partial N \\ \partial\dot{N}/\partial E & \partial\dot{N}/\partial\Phi & \partial\dot{N}/\partial P & \partial\dot{N}/\partial N - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

Легко убедиться, что первое из них является характеристическим уравнением для быстрых движений, описываемых системой (2.5), а второе — для медленных движений, описываемых уравнениями (2.6).

Таким образом, строго показано, что в случае, когда правые части системы укороченных уравнений имеют разный порядок малости (так что процесс установления происходит быстро по одним координатам и медленно по другим), общие условия устойчивости стационарных колебаний распадаются в первом приближении на два условия — отдельно по быстрым и по медленным координатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН, 57, 485 (1955).
2. J. P. Wittke, Proc. IRE, 45, 291 (1957).
3. В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 945 (1957).
4. Г. Н. Любимов и Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 33, 1396 (1957).
5. А. В. Ораевский, Радиотехника и электроника (в печати).
6. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 3, 1298 (1958).
7. И. С. Градштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 253 (1949).
8. И. С. Градштейн, Матем. сб., 32 (74), 533 (1953).

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
1 марта 1958 г.