ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 5—6 РАДИОФИЗИКА 1958

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ СТАТИСТИЧЕСКИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

Н. Г. Денисов

На основе уравнения Эйнштейна—Фоккера рассматривается распространение волн в среде с регулярными и статистическими неоднородностями показателя преломления. Рассчитаны флюктуации угла прихода, угловой спектр и поперечная функция корреляции волнового поля, прошедшего через неоднородный слой. Рассчитаны также флюктуации интенсивности.

При описании распространения волн в средах с нерегулярными неоднородностями интерес представляют статистические характеристики волнового поля, прошедшего достаточно большой путь. При этом приходится рассматривать многократное рассеяние волн на случайных неоднородностях. При наличии в среде регулярных неоднородностей необходимо, кроме того, учитывать влияние рефракции, определяющей систематическое отклонение лучей. Оказывается, что статистическое описание рассеяния волн в плоско-слоистой среде можно провести также, как и для однородной среды, при помощи известной в теории броуновского движения статистической схемы. Это описание основывается на исследовании уравнения типа Эйнштейна—Фоккера. Флюктуации угла прихода, интенсивности и фазы волны в приближении геометрической оптики также легко можно рассчитать, используя уравнение луча:

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ И ФЛЮКТУАЦИИ УГЛА ПРИХОДА

Рассмотрим распространение волн в плоско-слоистой среде, в каждой точке которой имеются, кроме того, флюктуации показателя преломления. Это означает, что показатель преломления испытывает случайные отклонения около среднего значения $n(z)$, которое, в свою очередь, регулярно изменяется по высоте z. Для решения этой задачи разобъем неоднородный слой на плоские слои. Толщина этих слоев должна быть, с одной стороны, достаточно малой для того, чтобы отдельные слои можно было считать статистически однородными. С другой стороны, каждый слой должен содержать много неоднородностей. Тогда корреляцией между слоями можно пренебречь. Суммарное же действие всех слоев учитывается на основе следующей статистической схемы.

Так же, как и в случае, когда средние характеристики среды не меняются [1, 2], в нашей задаче можно ввести вероятность $W(z, \vartheta, \varphi) \sin\vartheta$ того, что луч, прошедший толщу z, будет иметь направление, определяемое углами ϑ и φ (ϑ—угол между осью z и направлением луча; φ — азимутальный угол). Для малых углов ϑ статистическая схема этого случайного процесса совпадает со схемой, известной в теории вращательного броуновского движения молекул, находящихся во внешнем поле [3], где при учете внешних сил появляется регулярная скорость изменения ориентации молекулы. Точно также и в нашей задаче наряду со случайными отклонениями луча при учете рефракции будет иметь место систематическое отклонение, „скорость" которого легко найти, используя закон преломления $n(z)\sin\vartheta=\sin\vartheta_0=\mathrm{const}$. Дифференцируя, получим:

$$\frac{d\vartheta}{dz}=-\frac{1}{n(z)}\frac{dn(z)}{dz}\operatorname{tg}\vartheta. \qquad (1)$$

Предположим, что начальное направление луча совпадает с осью z. Тогда в силу симметрии W не будет зависеть от φ, и функция $W(z,\vartheta)$ будет удовлетворять следующему уравнению [3]:

$$\sin\vartheta\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\sin\vartheta\left(D\frac{\partial W}{\partial\vartheta}-\frac{d\vartheta}{dz}W\right)\right\}. \qquad (2)$$

Коэффициент диффузии D определяется статистическими свойствами элементарного слоя и равен [1,3]

$$D=\frac{1}{2}\frac{\overline{\Delta\vartheta^2}}{\Delta z}=\frac{1}{4}\frac{\overline{\vartheta^2}}{\Delta z}, \qquad (3)$$

где $\overline{\vartheta^2}$ — средний квадрат угла отклонения луча от первоначального направления по выходе из слоя толщиной Δz. Для статистически изотропного слоя в приближении геометрической оптики можно получить для коэффициента диффузии формулу [1,2]

$$D=-\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\nabla^2 R(r)\,dr. \qquad (4)$$

Корреляционная функция $R(r)$, как обычно, равна

$$R(r)=\frac{\overline{\Delta n_1\Delta n_2}}{n^2}=\frac{\overline{(\Delta n)^2}}{n^2}N(r) \qquad (5)$$

(r — расстояние между точками 1 и 2). Полагая $N(r)=e^{-r^2/l^2}$ (l — масштаб случайных неоднородностей), из (4) получим для коэффициента диффузии следующее выражение:

$$D=\frac{\sqrt{\pi}}{l}\frac{\overline{(\Delta n)^2}}{n^2}. \qquad (6)$$

Условия применимости приближения геометрической оптики к описанию рассеяния в элементарном слое толщиной Δz имеют вид [4]:

$$\lambda\ll l;\qquad \lambda\Delta z\ll 2\pi l^2. \qquad (7)$$

Если принять размер ионосферных неоднородностей $l\sim10^3$ *м*, то первое условие (7) хорошо выполняется вплоть до критических частот слоя F ($\lambda\sim15$ *м*). Второе условие при $\lambda<15$ *м* может быть легко выполнено ($\Delta z\ll6\cdot10^5$ *м*). При наличии регулярных градиентов показателя преломления столь же существенным является условие $\Delta z\ll z_m$, где z_m — масштаб регулярных неоднородностей, например, полутолщина ионосферного слоя. Для F слоя $z_m\sim10^5$ *м*, и, следовательно, толщину элементарного слоя, который должен, кроме того, содержать много случайных неоднородностей, можно выбрать равной 10^4 *м*. Заметим, наконец, что аналогичное положение имеет место и при распространении ультразвуковых волн в море. В этом случае $l\sim10^2$ *см*, $\lambda=2{,}5$ *см* ($f=60$ *кгц*), $z_m\sim10^4$ *см*.

Функцию $W(\vartheta,z)$, определяющую вероятность того, что луч на уровне z будет иметь направление ϑ, можно рассматривать как нормированный угловой энергетический спектр волны, прошедшей толщу z. Ниже мы будем рассматривать только малые углы рассеяния. Заменив в уравнении (2) $\sin\vartheta$, $\operatorname{tg}\vartheta$ на ϑ, получим для этого случая уравнение

$$\vartheta\frac{dW}{dz}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{D\vartheta\frac{\partial W}{\partial\vartheta}+\frac{1}{n}\frac{dn}{dz}\vartheta^2W\right\}.$$

Нормированное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\vartheta W(\vartheta, 0) = \delta(\vartheta)$ (δ — дельта-функция), имеет вид:

$$W(\vartheta, z) = \frac{1}{4\pi f(z)} e^{-\frac{\vartheta^2}{4f(z)}}; \quad f(z) = \frac{1}{n^2(z)} \int_0^z Dn^2(\varsigma)\, d\varsigma. \tag{8}$$

Отсюда легко получить для среднего квадрата флюктуаций угла прихода формулу

$$\overline{\vartheta^2} = 4 f(z) = \frac{4}{n^2(z)} \int_0^z Dn^2(\varsigma)\, d\varsigma. \tag{9}$$

По выходе из неоднородного слоя толщиной z_0 ($n(z_0) = 1$) это дает

$$\overline{\vartheta^2} = 4 \int_0^{z_0} Dn^2(\varsigma)\, d\varsigma. \tag{9a}$$

Заметим, что коэффициент диффузии D обратно пропорционален $n^2(\varsigma)$ (см. (6)). Следовательно, для неоднородного слоя, как это видно из (9a), влияние этой зависимости полностью компенсируется влиянием рефракции.

Рассмотрим случай прохождения радиоволн через ионосферу. Для ионосферного слоя без учета магнитного поля Земли показатель преломления равен $n = \sqrt{1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2}$. Отсюда легко выразить среднюю квадратичную флюктуацию показателя преломления через средний квадрат флюктуаций плотности электронов $(\Delta N/N)^2$:

$$\overline{(\Delta n)^2} = \frac{1}{4} \frac{(1-n^2)^2}{n^2} \overline{\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2}. \tag{10}$$

Используя (6) и (10), запишем формулу (9a) в следующем виде:

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{l} \int_0^{z_0} \overline{\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2} \frac{(1-n^2)^2}{n^2}\, d\varsigma. \tag{11}$$

Эта формула указывает на тенденцию к увеличению флюктуаций, если на пути луча в некоторой точке $n(\varsigma) \to 0$. По-видимому, сильное влияние на рассеяние будет оказывать область, в которой показатель преломления мал. Приближение геометрической оптики и формула (11) в этом случае становятся неприменимыми, и вопрос о рассеянии волн на уровне, где показатель преломления обращается в нуль, нуждается в дополнительном исследовании.

Найденная функция распределения позволяет также рассчитать функции корреляции поля излучения в плоскости $z = \text{const}$. Как известно [5], нормированный энергетический спектр и функция корреляции $\rho(\xi, \eta) = \overline{E^*(x, y) E(x+\varsigma, y+\eta)}/\overline{E^*(x, y) E(x, y)}$ (E — поле волны) являются фурье-сопряженными. В случае, когда $W(\vartheta, \varphi, z)$ не зависит от φ, эту связь можно записать в виде

$$\rho(r, z) = 2\pi \int_0^\infty W(\vartheta, z) J_0(k_0 r \vartheta) \vartheta\, d\vartheta, \tag{12}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Используя угловой спектр (8), получим:

$$\rho(r, z) = e^{-k^2(z) f(z) r^2}; \quad f(z) = \frac{1}{n^2(z)} \int_0^z Dn^2(\varsigma)\, d\varsigma. \tag{13}$$

По выходе из неоднородного слоя протяженностью z_0 $(n(z_0)=1)$ эта функция будет равна

$$\rho(r, z_0) = \exp\left(-k_0^2 r^2 \int_0^{z_0} Dn^2(\varsigma)\, d\varsigma\right). \tag{14}$$

2. ФЛЮКТУАЦИИ УГЛА ПРИХОДА ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ

До сих пор мы рассматривали рассеяние плоских волн, падающих нормально на неоднородный слой. Обобщение на случай наклонного падения проводится сравнительно просто, а окончательные формулы в случае малых углов рассеяния получаются подобными формуле (9а), в которой интегрирование нужно проводить по траектории луча.

При нахождении средних величин в этой задаче (например, среднего квадрата флюктуаций угла прихода) можно использовать уравнение луча (см., например, [2])

$$\frac{d(n'S)}{d\sigma} - \nabla n' = 0, \tag{15}$$

где $n'(x, y, z)$ — показатель преломления неоднородного слоя, S — единичный вектор касательной к лучу и σ — линейная координата, отсчитываемая вдоль луча. Запишем показатель преломления в виде $n' = n(z) + \mu(x, y, z)$. Будем считать, что среднее значение показателя преломления $n(z)$ зависит от одной координаты z и что случайные отклонения от среднего значения малы $(\mu \ll n)$. Тогда, интегрируя уравнение (15) вдоль луча, получим по выходе из слоя толщиной z_0:

$$n(z_0) S - S_0 = \int_0^{\sigma} \nabla n(z)\, d\sigma + \int_0^{\sigma} \nabla \mu(x, y, z)\, d\sigma. \tag{16}$$

В формуле (16) учтено, что $n(0) = 1$.

Возводя обе части равенства (16) в квадрат, получим:

$$1 + n^2(z_0) - 2n(z_0)\cos\alpha' = \left[\int_0^{\sigma} \nabla n + \int_0^{\sigma} \nabla \mu(x, y, z)\, d\sigma\right]^2. \tag{17}$$

В последней формуле α' — угол отклонения луча от первоначального направления (угол между единичными векторами S и S_0). Если в неоднородном слое нет случайных неоднородностей $(\mu=0)$, то мы можем записать для этого случая следующее уравнение:

$$1 + n^2(z_0) - 2n(z_0)\cos\alpha = \left[\int_0^{\sigma} \Delta n\, d\sigma\right]^2 \tag{18}$$

(здесь α — отклонение луча от первоначального направления только за счет рефракции). Считая, что флюктуационное отклонение луча $(\alpha' - \alpha)$ мало, мы можем записать теперь формулу (17) в виде

$$\begin{gathered} -2n(z_0)(\cos\alpha' - \cos\alpha) \approx n(z_0)\cos\alpha\,(\alpha' - \alpha)^2 = \\ = \int_0^{\sigma}\int_0^{\sigma} \nabla_1 \mu(x_1 y_1 z_1)\, \nabla_2 \mu(x_2 y_2 z_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2. \end{gathered} \tag{19}$$

Производя усреднение в формуле (19) и применяя обычную методику вычисления двойных интегралов в случае, когда радиус корреляции мал по сравнению с масштабом регулярных изменений показателя преломления, получим:

$$\overline{(\alpha' - \alpha)^2} = \overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{n(z_0)\cos\alpha} \int_0^\sigma \int_0^\sigma \nabla_1 \nabla_2 \overline{\mu_1 \mu_2}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 =$$
$$= -\frac{1}{n(z_0)\cos\alpha} \int_0^\sigma \overline{\mu^2} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla^2 N(r)\, dr. \tag{20}$$

Здесь $N(r) = \frac{\overline{\mu(x_1 y_1 z_1)\mu(x_2 y_2 z_2)}}{\overline{\mu^2}}$ — функция корреляции случайных изменений показателя преломления; предполагается, что N зависит только от взаимного расстояния между точками 1 и 2.

Если далее ввести коэффициент диффузии D (см. (4))

$$D = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \nabla^2 R(r)\, dr = -\frac{1}{2}\frac{\overline{\mu^2}}{n^2}\int_0^\infty \nabla^2 N(r)\, dr,$$

то формула (20) запишется в следующем виде:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{4}{n(z_0)\cos\alpha}\int_0^\sigma Dn^2(z)\, d\sigma, \tag{21}$$

где интеграл берется по траектории луча. В случае, когда луч падает нормально на слой, $\alpha = 0$, $\sigma = z$ и формула (21) переходит в формулу (9). Заметим, что и при наклонном падении, если $n(z_0) = 1$, угол α всегда равен нулю (закон Снеллиуса). Следовательно, формула для флюктуаций угла прихода при наклонном падении отличается от случая нормального падения лишь тем, что в каждом из этих случаев нужно интегрировать по соответствующей траектории луча. Заметим, наконец, что аналогичным путем можно рассчитать и другие статистические характеристики волны, прошедшей через неоднородный слой, например, средний квадрат флюктуаций фазы.

3. ФЛЮКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ

Флюктуации интенсивности луча, прошедшего неоднородный слой, можно рассчитать точно так же, как это сделано в работе [2] для случая, когда средний показатель преломления не зависит от координат. Будем исходить из уравнения лучевой теории (15) и для простоты рассмотрим случай нормального падения, когда начальное направление луча совпадает с направлением, вдоль которого изменяются средние параметры среды. Записывая показатель преломления в виде

$$n' = n(z) + \mu(x, y, z) \quad (\mu \ll n)$$

и считая, что среднее его значение $n(z)$ зависит только от одной координаты z, запишем уравнение (15) в виде следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial (nS_x)}{\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial x}=0;\\
&\frac{\partial (nS_y)}{\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial y}=0;\\
&\frac{\partial (nS_z)}{\partial z}-\frac{\partial n}{\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Из первых двух уравнений (22) найдем

$$\left.\begin{aligned}
&S_x=\frac{1}{n(z)}\int\limits_0^z \frac{\partial \mu}{\partial x}\,d\varsigma;\\
&S_y=\frac{1}{n(z)}\int\limits_0^z \frac{\partial \mu}{\partial y}\,d\varsigma.
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Боковое смещение луча l по выходе из неоднородного слоя толщиной z_0 будет равно

$$\left.\begin{aligned}
&l_x=\int\limits_0^{z_0} S_x d\varsigma=\int\limits_0^{z_0}\frac{dz}{n(z)}\int\limits_0^z \frac{\partial \mu}{\partial x}\,d\varsigma;\\
&l_y=\int\limits_0^{z_0}\frac{dz}{n(z)}\int\limits_0^z \frac{\partial \mu}{\partial y}\,d\varsigma.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Относительное изменение интенсивности луча определяется дивергенцией вектора l

$$\frac{\Delta J}{J}=-\operatorname{div} l=-\int\limits_0^{z_0}\frac{dz}{n(z)}\int\limits_0^z\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\right)d\varsigma. \tag{25}$$

Интегрируя полученное выражение по частям, получим

$$\frac{\Delta J}{J}=\int\limits_0^{z_0}\left[v(z)-v(z_0)\right]\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\right)d\varsigma. \tag{26}$$

Здесь функция $v(z)=\int\limits_0^z\frac{dz}{n(z)}$ представляет собой для плазмы групповой путь луча. Используя формулу (26), можно написать для средней квадратичной флюктуации выражение

$$\overline{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2}=\int\limits_0^{z_0}\int\limits_0^{z_0}\left[v(z_0)-v(z_1)\right]\left[v(z_0)-v(z_2)\right]\overline{\Delta_1\mu_1\Delta_2\mu_2}\,dz_1 dz_2, \tag{27}$$

где Δ — лапласиан по переменным x и y. Функция корреляции, входящая в эту формулу, равна

$$\overline{\Delta_1\mu(x_1y_1z_1)\,\Delta_2\mu(x_2y_2z_2)}=\overline{\mu^2}\Delta_1\Delta_2 N(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

Так как функция N зависит только от взаимного расстояния между точками 1 и 2, удобно перейти к относительным координатам

$x=x_2-x_1$; $y=y_2-y_1$; $z=z_2-z_1$ и координатам центра тяжести $\xi=(x_1+x_2)/2$; $\eta=(y_1+y_2)/2$; $\varsigma=(z_1+z_2)/2$. Делая замену переменных в интеграле (27), получим

$$\overline{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2}=\int\limits_0^{z_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[v(z_0)-v\left(\frac{2\varsigma-z}{2}\right)\right]\left[v(z_0)-v\left(\frac{2\varsigma+z}{2}\right)\right]\overline{\mu^2}\Delta^2 N(x,y,z)\,d\varsigma\,dz. \quad (28)$$

Здесь считается, что толщина слоя z_0 много больше масштаба нерегулярных неоднородностей l; тогда по z можно интегрировать от $-\infty$ до $+\infty$. Так как, кроме того, функция $N(x, y, z)$ очень быстро убывает с расстоянием от начала координат, то стоящие вместе с ней в интеграле (28) медленно меняющиеся функции можно вынести за знак интеграла со значением в начале координат $z=0$:

$$\overline{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2}=\int\limits_0^{z_0}[v(z_0)-v(\varsigma)]^2\,\overline{\mu^2}(\varsigma)\,d\varsigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 N(x,y,z)\,dz. \quad (29)$$

Полученная формула, как легко убедиться, переходит в известную формулу [2] для однородного слоя $v(\varsigma)=\varsigma$:

$$\overline{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2}=2\int\limits_0^{z_0}[z_0-\varsigma]^2\,\overline{\mu^2}\,d\varsigma\int\limits_0^{\infty}\Delta^2 N(x,y,z)\,dz=\frac{2}{3}\overline{\mu^2}z_0^3\int\limits_0^{\infty}\Delta^2 N(x,y,z)\,dz. \quad (30)$$

Таким образом, формула (29) для неоднородного слоя отличается от формулы (30) тем, что вместо линейных координат z_0 и ς в ней стоят соответствующие им групповые пути $v(z_0)$ и $v(\varsigma)$. Для конкретной функции корреляции $N=\exp(-r^2/l^2)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 N(r)\,dr=\frac{32\sqrt{\pi}}{l^3}$$

и, следовательно,

$$\overline{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2}=\frac{32\sqrt{\pi}}{l^3}\int\limits_0^{z_0}[v(z_0)-v(\varsigma)]^2\,\overline{\mu^2}(\varsigma)\,d\varsigma. \quad (31)$$

Полученная формула точно так же, как и формула (9а), указывает на тенденцию роста флюктуации интенсивности, если в слое на некотором уровне $n\to 0$ $(v(\varsigma)\to\infty)$. Однако этот вопрос нуждается в обосновании, так как расчет флюктуации поля волны, прошедшей через область малых значений показателя преломления, должен основываться на уравнениях волновой теории.

В заключение заметим, что все формулы получены для волн с безграничным фронтом. Однако эти результаты могут быть применены и для расчета флюктуаций в пучках, если поперечные размеры пучка захватывают много случайных неоднородностей.

Автор признателен В. Л. Гинзбургу за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, ЖЭТФ, 24, 210 (1953).
2. Л. А. Чернов, Докторская диссертация, Акустич. ин-т АН СССР, М., 1955
3. М. А. Леонтович, Статистическая физика, Гостехиздат, М., 1944.
4. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 25, 84 (1953).
5. J. Ratcliff, Rep. Progr. Phys., 19, 188 (1956).

Исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 23 мая 1958 г.