

## К ВОПРОСУ О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТАХ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*В. В. Железняков*

Обсуждается частотная зависимость кроссмодуляции (люксембург-горьковского эффекта). Показано, что в однородной магнитоактивной плазме кроссмодуляция увеличивается по мере приближения частоты возмущающей волны к значениям, при которых резко возрастает показатель поглощения этой волны. Указанные значения, вообще говоря, не совпадают с гирочастотой. Заключение о „резонансе“ кроссмодуляции на гирочастоте в однородной плазме, сделанное ранее в теории люксембург-горьковского эффекта, вызвано неучетом характера поляризации возмущающей волны в присутствии магнитного поля.

Как известно, при распространении в плазме электромагнитных волн конечной амплитуды принцип суперпозиции нарушается. Возникающее при этом взаимодействие проявляется, в частности, в том, что электромагнитная волна II, прошедшая через слой плазмы, в котором распространяется модулированная по амплитуде волна I, также становится модулированной (эффект кроссмодуляции радиоволн; см., например, [1] § 64). Указанное явление обусловлено изменениями электронной температуры и, тем самым, степени поглощения и величины амплитуды волны II под действием электрического поля первой волны; эти изменения следуют за модуляцией возмущающей волны.

I. В отсутствие модуляции электрическое поле волны I в магнитоактивной плазме имеет вид:

$$E_1(r, t) = \sum_{i=1,2} E_{i0}^{(j)}(r) \exp(i\omega_1 t - ik_1^{(j)}r), \quad (1)$$

где  $E_{i0}^{(j)}(r)$  и  $k_1^{(j)}$  — соответственно амплитуды и волновые векторы нормальных компонент волны — необыкновенной ( $j=1$ ) и обыкновенной ( $j=2$ ) — с частотой  $\omega_1$ . Поскольку нормальные волны в магнитоактивной плазме, вообще говоря, эллиптически поляризованы, амплитуды  $E_{i0}^{(j)}$  должны быть комплексными.

Указанная в (1) зависимость  $E_{i0}^{(j)}$  от радиуса-вектора  $r$  связана с поглощением электромагнитной волны. Энергия, передаваемая от волны к электрону в единицу времени, равна

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(e V_1 E_1^*), \quad (2)$$

где  $V_1$  — скорость вынужденных колебаний электрона с зарядом  $e$  под действием поля  $E_1$ :

$$V_1(r, t) = \sum_{i=1,2} V_{i0}^{(j)}(r) \exp(i\omega_1 t - ik_1^{(j)}r). \quad (3)$$

В соотношении (3)  $r$  имеет смысл среднего значения радиуса-вектора электрона;  $V_{i0}^{(j)}$  — амплитуды скорости, связанные с соответствующими амплитудами поля  $E_{i0}^{(j)}$ ; знак \* указывает на комплексно сопряженную величину.

В случае квазистационарной модуляции волны I (например, по закону  $1 + a \cos \Omega t$ , где  $a$  и  $\Omega$  — глубина и частота модуляции) выражения (1) и (3) для  $E_1$  и  $V_1$  сохраняются; при этом, однако, амплитуды будут медленными функциями времени ( $\Omega \rightarrow 0$ ):

$$E_{10}^{(j)} = E_{10}^{(j)}(\mathbf{r})(1 + a \cos \Omega t);$$

$$V_{10}^{(j)} = V_{10}^{(j)}(\mathbf{r})(1 + a \cos \Omega t).$$

Отсюда следует, что средняя за период  $2\pi/\omega_1$  энергия, переданная электрону в единицу времени (2), пропорциональна фактору  $(1 + a \cos \Omega t)^2$ . Поэтому  $W$  можно представить в виде суммы

$$W = v_{\text{эфф}}(\omega_0 + a\omega_1 \cos \Omega t + a^2\omega_2 \cos 2\Omega t), \quad (4)$$

выделив члены, по-разному зависящие от времени.

В выражении (4) сразу учтено, что в нерелятивистской плазме работа поля над электроном пропорциональна эффективному числу соударений  $v_{\text{эфф}}$  (если  $s = v_{\text{эфф}}/\omega_1 \ll 1$ ).

Передача энергии от волны к электронам приводит к изменению кинетической температуры электронного газа и связанных с ней эффективного числа соударений и степени поглощения волны II. Согласно элементарной теории кроссмодуляции (см. [2-4], а также [1] § 94), в случае соударений с молекулами зависящая от времени часть числа соударений  $\Delta v_{\text{эфф}}$  связана с  $W$  соотношением

$$\Delta v_{\text{эфф}} = \frac{a\omega_1 \cos(\Omega t - \varphi_1)}{m l^2 \sqrt{\Omega^2 + (\delta v_{\text{эфф},0})^2}} + \frac{a^2\omega_2 \cos(2\Omega t - \varphi_2)}{m l^2 \sqrt{4\Omega^2 + (\delta v_{\text{эфф},0})^2}}; \quad (5)$$

$$\text{tg } \varphi_1 = \Omega/\delta v_{\text{эфф},0}; \quad \text{tg } \varphi_2 = 2\Omega/\delta v_{\text{эфф},0},$$

где  $\delta$  — средняя относительная доля кинетической энергии, теряемая электроном при одном соударении,  $v_{\text{эфф},0} = v_{\text{эфф}} - \Delta v_{\text{эфф}}$  — среднее число соударений,  $m$  и  $l$  — масса и длина свободного пробега электрона\*.

Амплитуда  $j$ -ой компоненты волны II после прохождения через область взаимодействия (где  $\Delta v_{\text{эфф}} \neq 0$ ) модулирована по закону

$$E_{II0}^{(j)}(t) \sim \exp\left(-\frac{\omega_{II}}{c} \int \frac{\Delta v_{\text{эфф}}}{v_{\text{эфф},0}} \eta_{II0}^{(j)} \cos \theta_{II}^{(j)} dl\right). \quad (6)$$

В соотношении (6)  $\eta_{II0}^{(j)}$  — средний по времени показатель поглощения,  $\theta_{II}^{(j)}$  — угол между вектором  $\mathbf{k}^{(j)}$  и направлением групповой скорости  $d\omega_{II}/d\mathbf{k}_{II}^{(j)}$ ,  $c$  — скорость света; интеграл берется по лучу, вдоль которого распространяется  $j$ -ая компонента волны.

Из (1) — (3) ясно, что в выражение для энергии  $W$  (а также в  $\Delta v_{\text{эфф}}$ ; см. (4), (5)) входят четыре члена, пропорциональные

$$E_{10}^{(1)*} V_{10}^{(1)}; \quad E_{10}^{(2)*} V_{10}^{(2)} \quad (7)$$

и

$$E_{10}^{(1)*} V_{10}^{(2)} e^{-i(k_1^{(2)} - k_1^{(1)})r}; \quad E_{10}^{(2)*} V_{10}^{(1)} e^{+i(k_1^{(2)} - k_1^{(1)})r}. \quad (8)$$

Однако при интегрировании в (6) смешанные члены (8) исчезают; каждый из оставшихся членов (7) связан лишь с одной компонентой модулирующей волны I (необыкновенной или обыкновенной).

\* Выражение (5) записано для случая соударений электронов с молекулами. Для соударений с ионами соотношение между  $\Delta v_{\text{эфф}}$  и  $W$  отличается от (5) на постоянный множитель [4]. В интересующем нас аспекте это различие совершенно несущественно.

Отсюда следует, что вследствие различия показателей преломления нормальных волн в магнитоактивной плазме эффект кроссмодуляции от необыкновенной и обыкновенной компонент волны I нужно рассматривать отдельно.

2. Для одной из компонент часть энергии  $W^{(j)}$ , передаваемой электрону в единицу времени, легко связать с коэффициентом поглощения  $\mu^{(j)}$ :

$$W^{(j)} = \mu^{(j)} \bar{S}^{(j)} / N \quad (9)$$

( $N$  — концентрация электронов в плазме,  $\bar{S}^{(j)}$  — поток энергии в волне). Поскольку в магнитоактивной плазме вектор Пойнтинга для плоской волны

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [E_1^{(j)}(n_1^{(j)} E_1^{(j)})]; \quad \mathbf{k}_1^{(j)} = \frac{\omega_1}{c} n_1^{(j)} \quad (10)$$

прецессирует относительно направления групповой скорости  $d\omega_1/d\mathbf{k}_1^{(j)}$  (см. [1] § 76), усредненный по периоду  $2\pi/\omega_1$  поток энергии  $\bar{S}$  равен проекции вектора  $\mathbf{S}$  на вектор  $d\omega_1/d\mathbf{k}_1^{(j)}$ . В то же время коэффициент поглощения равен

$$\mu^{(j)} = 2 \frac{\omega_1}{c} \eta_1^{(j)} \cos \theta_1^{(j)}, \quad (11)$$

где  $\eta_1^{(j)}$  и  $\theta_1^{(j)}$  — показатель поглощения и угол между  $\mathbf{k}_1^{(j)}$  и  $d\omega_1/d\mathbf{k}_1^{(j)}$

Из соотношений (9) — (11) следует, что  $W^{(j)}$  (а вместе с ней и эффект кроссмодуляции) достигает наибольших значений в той области параметров, где велики показатели преломления  $n_1^{(j)}$  и поглощения  $\eta_1^{(j)}$  модулирующей волны.

Без учета теплового движения  $n^{(j)}$  и  $\eta^{(j)}$  резко возрастают в окрестности частоты  $\omega_r$ , удовлетворяющей (при  $s = v_{эф}/\omega_1 \ll 1$ ) уравнению

$$1 - u - v + uv \cos^2 \alpha = 0; \quad (12)$$

$$u = \omega_H^2/\omega_1^2 \equiv (eH_0/mc \omega_1)^2; \quad v = \omega_0^2/\omega_1^2 \equiv 4\pi e^2 N/m \omega_1^2$$

( $\omega_H$  — гирочастота,  $\omega_0$  — лэнгмюровская частота плазмы,  $H_0$  — постоянное магнитное поле, наложенное на плазму,  $\alpha$  — угол между  $H_0$  и  $\mathbf{k}_1^{(j)}$ ; см. подробнее [1] § 75 и [5]). При  $\alpha = \pi/2$  частота  $\omega_1$ , определенная из уравнения (12), равна  $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$ ; при  $\alpha = 0$   $\omega_1 = \omega_H$ ; для значений  $\alpha$ , отличных от 0 и  $\pi/2$ , частота  $\omega_1$  принимает промежуточные значения.

Таким образом, эффект кроссмодуляции в плазме при  $V \neq 0$  не имеет особенностей на гирочастоте, за исключением случая продольного распространения волны I ( $\alpha = 0$ ), тогда как из статей [2–4, 6, 7] следует, что в однородной плазме можно ожидать существенного увеличения кроссмодуляции по мере приближения  $\omega_1$  к гирочастоте  $\omega_H$ . В свете изложенного становится ясным, что выводы относительно зависимости эффекта кроссмодуляции в магнитном поле от частоты модулирующей волны, сделанные в [2–4, 6, 7], нуждаются в определенных коррективах.

3. Заключение о „резонансе“ кроссмодуляции на гирочастоте вызвано неправильным представлением возмущающей волны I в магнитоактивной плазме как волны линейно поляризованной. Если принять во внимание эллиптический характер поляризации нормальных волн в присутствии магнитного поля  $H_0$  и правильно.

учесть фазовые соотношения между отдельными составляющими поля  $E_p$ , то, в согласии с результатами раздела 2, „резонанс“ кросс-модуляции будет иметь место не на гирочастоте, а на частоте  $\omega_p$ , определяемой из уравнения (12).

Проиллюстрируем сказанное на примере необыкновенной возмущающей волны, распространяющейся в направлении  $\alpha = \pi/2$ .

Компоненты скорости, соответствующие вынужденным колебаниям электрона в электрическом поле с составляющими  $E_x, E_y, E_z$ , равны (см. [5])

$$V_x = -\frac{ieE_x}{m\omega(1-is)}; \quad V_y = \frac{ie(1-is)E_y - i\sqrt{u}E_z}{m\omega(u-(1-is)^2)}; \quad (13)$$

$$V_z = \frac{ie(1-is)E_z + i\sqrt{u}E_y}{m\omega(u-(1-is)^2)}$$

(предполагается, что магнитное поле  $H_0$  направлено по оси  $x$ ). Поскольку при поперечном распространении в необыкновенной волне составляющая поля  $E_x^{(1)}$  по оси  $x$  равна нулю, а составляющие  $E_y^{(1)}$  и  $E_z^{(1)}$  по осям  $y$  и  $z$  связаны соотношением (см. [1] § 75)

$$E_y^{(1)}v\sqrt{u} = iE_z^{(1)}[u + v(1-is) - (1-is)^2],$$

из (13) следует, что

$$V_x^{(1)} = 0; \quad V_y^{(1)} = \frac{ieE_y^{(1)}}{m\omega} \frac{v-(1-is)}{(1-is)^2 - v(1-is) - u}; \quad V_z^{(1)} = -\frac{ieE_z^{(1)}}{m\omega} \frac{1}{v}.$$

Тогда средняя энергия, передаваемая от волны к электрону в единицу времени, равна ( $s \ll 1$ )

$$W^{(1)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(eV_y^{(1)}E_y^{(1)*}) \approx \frac{e^2E_yE_y^*}{2m\omega} \frac{u+(1-v)^2}{(1-v-u)^2} s. \quad (14)$$

Из соотношения (14) ясно (см. также (2), (4)–(6)), что эффект кросс-модуляции, в согласии с изложенным выше, возрастает по мере приближения  $\omega_1$  к  $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$ . Напротив, если считать поле линейно поляризованным (положив, например,  $E_x = E_z = 0$ ,  $E_y \neq 0$ ), то

$$V_x = 0; \quad V_y = \frac{ie}{m\omega} \frac{(1-is)E_y}{u-(1-is)^2}; \quad V_z = \frac{ie}{m\omega} \frac{i\sqrt{u}E_y}{u-(1-is)^2};$$

$$W \approx \frac{e^2E_yE_y^*}{2m\omega} \frac{u+1}{(u-1)^2} s \quad (s \ll 1),$$

и „резонанс“ кросс-модуляции достигается на гирочастоте.

4. Соотношение (14) позволяет судить о частотной зависимости эффекта кросс-модуляции в частном случае поперечного распространения возмущающей волны в однородной плазме. Обобщение на случай произвольных углов  $\alpha$  не встречает каких-либо затруднений.

Для сопоставления теории кросс-модуляции с экспериментом следует также учитывать, что в реальных условиях распространения электромагнитных волн в ионосфере люксембург-горьковский эффект возникает в неоднородной плазме. Последнее может существенно изменить характер частотной зависимости кросс-модуляции, так как глубина модуляции волны II определяется не только степенью возмущающего действия волны I в ионосфере, но и положением (а также размерами) области эффективного взаимодействия (см. (6)).

Из вышеизложенного ясно, что учет характера поляризации возмущающей волны существенен на частотах, при которых  $\omega_{H1}^2/\omega_1^2 \sim 1$ , в том случае, когда обе волны I и II достигают области, где  $\nu = \omega_0^2/\omega_1^2 \sim 1$ . Для этого, очевидно, необходимо, чтобы частота модулирующей волны  $\omega_{II} \gtrsim \omega_I$  и волна I слабо затухала в процессе распространения от начала ионосферного слоя до области  $\nu = \omega_0^2/\omega_1^2 \sim 1$ . Однако и при выполнении указанных условий ожидать резонансного нарастания эффекта кроссмодуляции в слое  $\nu = \omega_0^2/\omega_1^2 \sim 1$  не приходится, поскольку область сильной кроссмодуляции  $n_j^2 \rightarrow \infty$  не достигается волной (так как точка отражения  $n_j^2 = 0$  в неоднородном ионосферном слое всегда расположена ниже точки  $n_j^2 \rightarrow \infty$ ).

Для получения частотной зависимости с учетом поляризации возмущающей волны в конкретных условиях ионосферы необходимо дополнительное рассмотрение. Можно думать, однако, что указанный в настоящей статье эффект не приведет к существенному смещению положения максимума „резонансной“ кривой кроссмодуляции и вызовет лишь некоторое изменение зависимости глубины кроссмодуляции от частоты  $\omega_1$  на крыльях „резонансной“ кривой. Дело в том, что по мере приближения  $\omega_1$  к  $\omega_H$  ( $\mu \rightarrow 1$ ) резко увеличивается поглощение в начале слоя (где  $\nu \ll 1$  и характер поляризации безразличен); при этом наступает состояние „полной“ кроссмодуляции [8], отвечающее максимальному значению глубины модуляции волны II.

Автор благодарен А. В. Гуревичу за ценное замечание.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТТЛ, М., 1953.
2. V. A. Bailey, D. F. Martyn, *Phyl. Mag.*, **18**, 369 (1934).
3. V. A. Bailey, *Phyl. Mag.*, **23**, 929 (1937).
4. В. Л. Гинзбург, Изв. АН СССР, сер. физ., **12**, 293 (1948).
5. В. Л. Гинзбург, В. Е. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, 2, 59 (1958).
6. С. А. Жевакин и В. М. Файн, ЖЭТФ, **30**, 518 (1956).
7. И. М. Виленский, ЖЭТФ, **26**, 42 (1954).
8. А. В. Гуревич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, 5—6, 17 (1958).

Исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
23 октября 1958 г.