

МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ. III

Ю. И. Неймарк

Настоящая работа представляет собою непосредственное продолжение работ [40, 41] автора и в основном посвящена вопросам устойчивости и зависимости периодических движений от параметров.

1. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ И ДРУГИЕ БОЛЕЕ ОБЩИЕ СИСТЕМЫ ПОДОБНОГО РОДА

Пусть движение рассматриваемой динамической системы описывается в зависимости от ее состояния (а, возможно, и ее предшествующего движения) одной из N систем дифференциальных уравнений вида

$$dx_i^j/dt = X_i^j(t; x_1^j, \dots, x_{n_j}^j) \quad (i = 1, 2, \dots, n_j; \quad j = 1, 2, \dots, N). \quad (1.1)$$

Переход от описания p -ой системой уравнений к описанию q -ой системой происходит при выполнении условий

$$S_{pq}(x_1^p, x_2^p, \dots, x_{n_p}^p; t) = 0 \quad (1.2)$$

и, возможно, еще некоторых неравенств вида

$$\Omega_{pq}^s(x_1^p, x_2^p, \dots, x_{n_p}^p; t) > 0 \quad (s = 1, 2, \dots, r_{pq}). \quad (1.3)$$

При переходе от описания p -ой системой уравнений (1.1) к описанию q -ой системой значения новых переменных $x_1^q, x_2^q, \dots, x_{n_q}^q$ в момент перехода t определяются через значения старых переменных $x_1^p, x_2^p, \dots, x_{n_p}^p$ в тот же момент времени t посредством соотношений

$$x_j^q = f_j^{pq}(x_1^p, x_2^p, \dots, x_{n_p}^p; t) \quad (j = 1, 2, \dots, n_q). \quad (1.4)$$

Простейшим и практически очень важным классом систем, подходящих под только что описанную схему, являются так называемые кусочно-линейные системы, и, в частности, системы с кусочно-линейными характеристиками нелинейностей [3—9, 31], системы с ударными взаимодействиями [17—19, 10, 55—57] и системы в идеализации, приводящей к так называемым разрывным колебаниям [42—47]. Именно, на базе изучений кусочно-линейных систем и метода секущей поверхности Пуанкаре—Биркгофа [22, 23, 48, 49] так называемый метод сшивания превратился в метод точечных отображений [50]. Эффективному применению метода точечных отображений к кусочно-линейным системам, особенно в вопросах глобального поведения, необычайно способствовала возможность получения точечных отображений непосредственным интегрированием* и рассмотрение наря-

* Отметим, что вопрос об отыскании периодических движений при этом сводился к решению некоторых трансцендентных уравнений, и появлялась возможность сравнительно простого исследования устойчивости в то время как непосредственное применение метода Ляпунова встречало затруднения (из-за разрывности правых частей дифференциальных уравнений). Следует заметить, что в последнее время часть этих трудностей преодолена и на основе прямого обобщения метода Ляпунова [51].

ду с фазовым пространством системы ее пространства параметров. Однако это обстоятельство дало повод к неправильной оценке метода точечных отображений как метода изучения только кусочно-линейных систем или даже как метода, в основе которого лежит возможность поэтапного интегрирования.

Целью настоящего параграфа является изложение утверждений, лежащих в основе применения метода точечных отображений к изучению движений только что описанных динамических систем.

Фазовое пространство описываемой выше системы состоит из: фазовых пространств $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$ систем (1.1). Переход из одного фазового пространства Φ_p в другое пространство Φ_q осуществляется при выполнении условий (1.2) и (1.3) согласно преобразованию (1.4). В силу этого точки поверхности S_{pq} фазового подпространства Φ_p , удовлетворяющие условиям (1.3), мы отождествим с соответствующими точками фазового подпространства Φ_q и в соответствии с этим будем рассматривать соотношение (1.4) как формулы перехода от переменных x_i^p к x_i^q . Такое отождествление для систем с небольшим числом степеней свободы может быть осуществлено геометрически наглядным „склеиванием“, что в некоторых случаях (сухое трение, петлевая характеристика реле и др.) приводит к так называемым многолистным фазовым плоскостям [52–54] или фазовым пространствам, составленным, например, из полупространства и полуплоскости [17]. На рис. 1а изображена склейка фазовых подпространств Φ_p и Φ_q по поверхности S_{pq} . При этом надо иметь в виду, что точки поверхности S_{pq} могут быть внутренними точками пространств Φ_p и Φ_q . На рис. 1б изображена склейка фазовых подпространств Φ_p и Φ_q в случае, когда размерность пространства Φ_q на единицу меньше размерности пространства Φ_p .

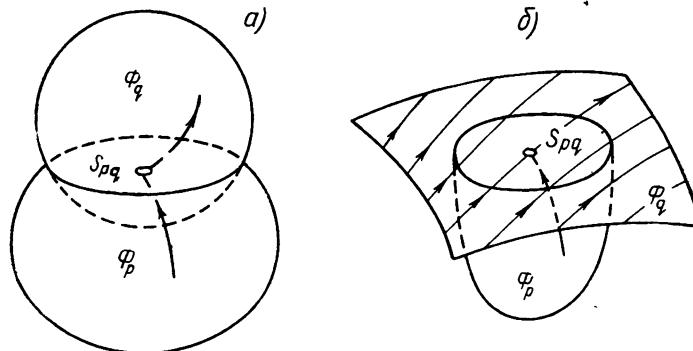


Рис. 1.

Описанную выше систему назовем автономной, если ни в одну из функций X_i^j , S_{pq} , Ω_{pq}^S , f_j^{pq} не входит явно время t ; в противном случае систему назовем неавтономной. Под фазовым пространством автономной или неавтономной системы будем понимать склеенные (как было описано выше) фазовые пространства систем (1.1). Кроме того, ниже, в случае неавтономной системы, мы будем предполагать, что X_i^j , S_{pq} , Ω_{pq}^S , f_j^{pq} — периодические, периода τ , функции времени t и что в соответствии с этим в фазовом пространстве системы произведено отождествление точек с одинаковыми координатами x_i^j и временами, отличающимися на целое число периодов τ . В силу этого периодическим движениям как автономной, так и неавтономной системы будут соответствовать в их фазовых пространствах замкнутые фазовые траектории. Функции X_i^j каждой из систем уравнений (1.1), а также функции f_j^{pq} , S_{pq} и Ω_{pq}^S будем

предполагать достаточное число раз дифференцируемыми или даже аналитическими. При этом через каждую точку фазового пространства Φ (за исключением особых точек) будет проходить единственная фазовая траектория, поскольку при заданных начальных условиях, согласно уравнениям (1.1) и условиям перехода (1.4), (1.2) и (1.3), дальнейшее изменение фазовых переменных находится однозначно. При этом непрерывная зависимость решений от начальных условий, вообще говоря, не имеет места. Действительно, если отрезок фазовой траектории L оканчивается в какой-либо граничной точке одной из поверхностей S_{pq}^* , то сколь угодно близкие соседние с L фазовые траектории, пересекающие поверхность S_{pq} и не пересекающие ее, расходятся за конечный промежуток времени. Нарушение непрерывной зависимости от начальных условий возможно и при наличии касания траекторией L одной из поверхностей S_{pq} . Однако, если $L(t_0 \leq t \leq t_1)$ — отрезок фазовой траектории, не пересекающий граничных точек поверхностей S_{pq} ,

причем в точках его пересечения с поверхностями S_{pq} выполнено условие (2.2), то для точек некоторой достаточно малой окрестности L и $t_0 \leq t \leq t_1$ будет иметь место непрерывная зависимость решений от начальных условий, и для любых двух пересекающих L поверхностей S и \bar{S} в окрестности L может быть построено дважды непрерывно дифференцируемое точечное отображение. Поэтому установленные ранее теоремы о связи между неподвижными точками преобразования и периодическими движениями сохраняют силу, если рассматриваемое периодическое движение удовлетворяет условиям, сформулированным только что для фазовой траектории L .

Периодическому движению в фазовом пространстве Φ отвечает замкнутая траектория Γ , составленная из отрезков $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \dots, \Gamma_{j_m}$ фазовых траекторий систем уравнений (1.1) (рис. 2). Отрезок Γ_{j_k}

Рис. 2.

траекторий Γ , расположенный в фазовом подпространстве Φ_{j_k} , начинается на поверхности $S_{j_{k-1} j_k}$ и оканчивается на поверхности $S_{j_k j_{k+1}}$. Обозначим через T_{pqr} определяемое фазовыми траекториями Φ_q отображение поверхности S_{pq} в поверхность S_{qr} и через R_{pq} — преобразование (2.4), соответствующее замене переменных x_1^p, \dots, x_n^p на x_1^q, \dots, x_n^q . Пусть M_1, M_2, \dots, M_m — последовательные точки пересечения замкнутой траектории Γ с поверхностями $S_{j_1 j_2}, S_{j_2 j_3}, \dots, S_{j_m j_1}$. Последовательности переходов от точки M_1 к M_2 , от M_2 к M_3, \dots , от M_m к M_1 отвечает отображение

$$R_{j_m j_1} T_{j_m -1 j_m j_1} \dots, R_{j_3 j_4} T_{j_2 j_3 j_4} R_{j_2 j_3} T_{j_1 j_2 j_3} \quad (1.5)$$

поверхности $S_{j_1 j_2}$ в себя. Неподвижной точке этого отображения

* Под поверхностью S_{pq} понимается часть поверхности (1.2), удовлетворяющая неравенствам (1.3).

соответствует замкнутая фазовая траектория, проходящая последовательно через пространства $\Phi_{j_1}, \Phi_{j_2}, \dots, \Phi_{j_m}$.

Поверхности $S_{j_1 j_2}, \dots, S_{j_m j_1}$ могут быть разной размерности. Если σ — наименьшая из размерностей этих поверхностей, то δ -окрестность точки M_1 на поверхности $S_{j_1 j_2}$ отображением (1.5) переводится в $\bar{\delta}$ -“окрестность” точки M_1 размерности σ , и поэтому при повторных применениях отображения (1.5) можно ограничиться рассмотрением отображения множества $\bar{\delta}$ в себя. В силу этого отыскание и исследование периодических движений, составленных из отрезков фазовых траекторий $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \dots, \Gamma_{j_m}$, целесообразно сводить к рассмотрению отображения в себя поверхности наименьшей размерности σ . Такой поверхностью может быть одна из поверхностей $S_{j_1 j_2}, \dots, S_{j_m j_1}$, имеющая наименьшую размерность σ , или поверхность, специально выбранная в одном из фазовых пространств $\Phi_{j_1}, \dots, \Phi_{j_m}$ размерности $\sigma + 1$.

Допустим, что секущая поверхность S выбрана именно таким образом. Пусть M^* — неподвижная точка отображения поверхности S в себя, Γ — соответствующая ей замкнутая траектория и $\delta(M^*)$ — некоторая достаточно малая окрестность точки M^* на поверхности S . Обозначим через Δ совокупность фазовых траекторий, выходящих из всех точек $\delta(M^*)$. Фазовая траектория, проходящая через любую точку, достаточно близкую к Γ , спустя промежуток времени, не превосходящий некоторой постоянной величины, попадает в Δ . Поэтому вопрос об устойчивости периодического движения Γ сводится к исследованию устойчивости периодического движения Γ , рассматриваемого в фазовом подпространстве Δ размерности $\sigma + 1$. По отношению к устойчивости Γ в Δ можно целиком повторить все сказанное ранее в первой части настоящей работы [40], т. е. периодическое движение Γ устойчиво тогда и только тогда, когда устойчива неподвижная точка M^* отображения поверхности S в себя. Неподвижная точка M^* устойчива, если все корни отображения T поверхности S в себя лежат внутри единого круга, и неустойчива, если хотя бы один из этих корней лежит вне единичного круга. Заметим, что вместо отображения T можно построить отображение T_τ^* , причем в случае автономной системы, как было установлено, один корень характеристического уравнения T_τ равен единице, а остальные совпадают с характеристическими корнями отображения T .

Если \bar{S} — какая-либо другая, отличная от S , секущая поверхность размерности $\bar{\sigma} \geq \sigma$ и \bar{T} — соответствующее рассматриваемому типу периодического движения** отображение \bar{S} в себя, то, как это непосредственно видно, характеристическое уравнение отображения \bar{T} имеет $\bar{\sigma} - \sigma$ нулевых корней, а остальные корни совпадают с корнями характеристического уравнения отображения T .

* Напомним, что T_τ есть отображение, при котором соответствующими точками являются точки, лежащие на одной и той же фазовой траектории и отстоящие друг от друга на промежуток времени τ , равный периоду рассматриваемой замкнутой фазовой траектории Γ .

** Под типом периодического движения или соответствующей ему замкнутой фазовой траектории Γ понимается последовательность номеров (с точностью до циклической перестановки) фазовых подпространств $\Phi_{j_1}, \dots, \Phi_{j_m}$, через которые проходит фазовая траектория Γ .

2. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАДАННОЙ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

Изучение движений динамической системы или (что то же самое) изучение структуры разбиения ее фазового пространства на траектории может быть в той или иной мере сведено к изучению некоторых точечных отображений. Сам способ построения точечного отображения, вообще говоря, зависит от структуры фазового пространства рассматриваемой системы, но во всех известных задачах состоит в возможно многократном повторении построения, описываемого ниже. На отдельных этапах этого построения правые части описывающих систему дифференциальных уравнений и функции $S(t; x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{S}(t; x_1, \dots, x_n)$, о которых речь будет ниже, являются аналитическими или достаточное число раз дифференцируемыми функциями.

Допустим, что в некоторой окрестности фазовой траектории L_0 , пересекающей поверхности S и \bar{S} в точках M_0 и \bar{M}_0 , между поверхностями S и \bar{S} движения системы описываются уравнениями

$$dx_i/dt = f_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

и что в точке \bar{M}_0 выполнено условие

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_i} f_i \neq 0. \quad (2.2)$$

Тогда фазовая кривая L , выходящая из любой достаточно близкой к M_0 точки M , пересечет поверхность \bar{S} в некоторой точке \bar{M} , близкой к \bar{M}_0 . Тем самым с помощью фазовых траекторий системы уравнений (2.1) определяется в окрестностях точек M_0 и \bar{M}_0 соответственно точечное отображение поверхности S в \bar{S} .

Задачей настоящего раздела является указание способа построения этого точечного отображения на основе дифференциальных уравнений движения системы (2.1) и известной фазовой траектории L_0 .

Отыскание описанного точечного отображения не представляет затруднений, если известно общее решение системы уравнений (2.1). В случае же, когда невозможно получить общее решение системы (2.1), следует прибегнуть к тому или иному приближенному методу интегрирования. Наиболее приемлемым для наших целей является метод, основывающийся на отыскании решения в виде ряда по степеням так называемого малого параметра.

Пусть дана система уравнений

$$dx_i/dt = f_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \mu), \quad (2.3)$$

зависящих от параметра μ , и пусть $x_i = x_i^0(t; x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; t_0)$ ($t_0 \ll t \ll t_1$) — ее решение при $\mu = 0$; обращающееся в x_{i0} при $t = t_0$. Тогда решение уравнений (2.3) для $t_0 \ll t \ll t_1$ и тех же начальных условий при $\mu \neq 0$ и достаточно малом может быть найдено в виде ряда по степеням параметра μ *

$$x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \dots$$

* Отметим, что для представления решения в виде конечного отрезка этого ряда требуется лишь наличие соответствующего числа производных от правых частей системы уравнений (2.3).

Функции x_i^1, x_i^2, \dots обращаются в нуль при $t = t_0$ и удовлетворяют уравнениям вида

$$dx_i^m/dt = \sum_{j=1}^n (\partial f_i / \partial x_j) x_j^m + A_{im}(x_1^0, \dots, x_n^0, x_1^1, \dots, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}). \quad (2.4)$$

Отыскание функций x_i^1, x_i^2, \dots выполняется последовательным интегрированием систем линейных дифференциальных уравнений (2.4), которое выполняется в квадратурах при наличии общего решения системы уравнений (2.3) для $\mu = 0$ [58] или фундаментальной системы решений соответствующей (2.4) однородной системы уравнений. Действительно, пусть $l_{ij}(t, \tau), \dots, l_{nj}(t, \tau)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (2.4), удовлетворяющая начальным условиям при $t = \tau : l_{ii} = 1$ и $l_{ij} \neq 1$, если $i \neq j$. Тогда, как известно [59], решение неоднородного уравнения (2.4), обращающееся в нуль при $t = t_0$, может быть записано в виде:

$$x_i^m(t) = \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t A_{jm}(x_1^0(\tau), \dots, x_n^0(\tau)) l_{ij}(t, \tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Интегрирование уравнений (2.4) особенно просто в случае, когда система уравнений (2.3) при $\mu = 0$ обращается в систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Перейдем теперь к стоящей перед нами задаче получения уравнений фазовой траектории системы (2.1), начинающейся в произвольной точке M окрестности точки M_0 и кончающейся в произвольной же точке \bar{M} окрестности точки \bar{M}_0 . Пусть $x_i = \varphi_i(t)$ ($t_0 < t < t_1$) — уравнение заданной фазовой траектории L_0 . Введем новые переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и малый параметр μ , положив $x_i = \varphi_i(t) + \mu \xi_i$; будем искать решение системы уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям $x_i = \varphi_i(t_0) + \mu \xi_{i0}$ при $t = t_0$. В переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ уравнения (2.1) запишутся в виде

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x_s=\varphi_s} \xi_j + \frac{1}{2} \mu \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{x_s=\varphi_s} \xi_j \xi_k + \dots. \quad (2.6)$$

Нужно найти решение $\xi_i(t)$ этого уравнения, отображающееся при $t = t_0$ в ξ_{i0} . Согласно изложенному, это решение может быть найдено в виде ряда по степеням μ

$$\xi_i(t) = \xi_i^0(t) + \mu \xi_i^1(t) + \mu^2 \xi_i^2(t) + \dots,$$

где $\xi_i^0(t)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $\xi_i(t)$, а ξ_i^1, ξ_i^2, \dots обращаются в нуль при $t = t_0$.

Таким образом, точечное отображение плоскости $t = t_0$ в плоскость $t = \bar{t}_0$ в окрестностях точек M_0 и \bar{M}_0 пересечения этих плоскостей с известной фазовой траекторией L_0 может быть найдено в виде ряда по начальным отклонениям координат точки M от точки M_0 . В частности, линейное приближение этого отображения, как это уже было установлено ранее [40], получается интегрированием уравнения в вариациях, т. е. уравнения (2.6) при $\mu = 0$. Отыскание всех последующих приближений (квадратичного относительно разностей $x_j - x_{j0}$, кубического и т. д.) выполняется в квадратурах по формуле (2.5), если только известно общее решение уравнений в вариациях.

Для полного решения задачи отыскания точечного отображения поверхности S в \bar{S} достаточно теперь проинтегрировать урав-

нения (2.1) в окрестностях точек M_0 и \bar{M}_0 . Это интегрирование может быть осуществлено в виде рядов по независимому переменному. Пусть $g(t; x_1, \dots, x_n)$ — произвольная аналитическая или допускающая необходимые для дальнейшего производные функция, в которой x_1, x_2, \dots, x_n представляют собою решение системы (2.1), обращающееся в x_{10}, \dots, x_{n0} при $t=t_0$. Разлагая функцию $g(t; x_1, x_2, \dots, x_n)$ в ряд Тейлора, найдем [60], что

$$\begin{aligned} g(t; x_1, \dots, x_n) = & \{g\}_{t=t_0} + \{X(g)\}_{t=t_0}(t-t_0) + \\ & + \frac{1}{2} \{X^2(g)\}_{t=t_0}(t-t_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где X обозначает дифференциальный оператор вида

$$X = \partial/\partial t + f_1 \partial/\partial x_1 + \dots + f_n \partial/\partial x_n. \quad (2.8)$$

В частном случае, когда $g = x_1$, приходим к представлению решения уравнений (2.1) в виде ряда по независимому переменному t :

$$\begin{aligned} x_i(t; x_{10}, \dots, x_{n0}; t_0) = & x_{i0} + f_i(t_0; x_{10}, \dots, x_{n0})(t-t_0) + \\ & + \frac{1}{2} \{X(f_i)\}(t-t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

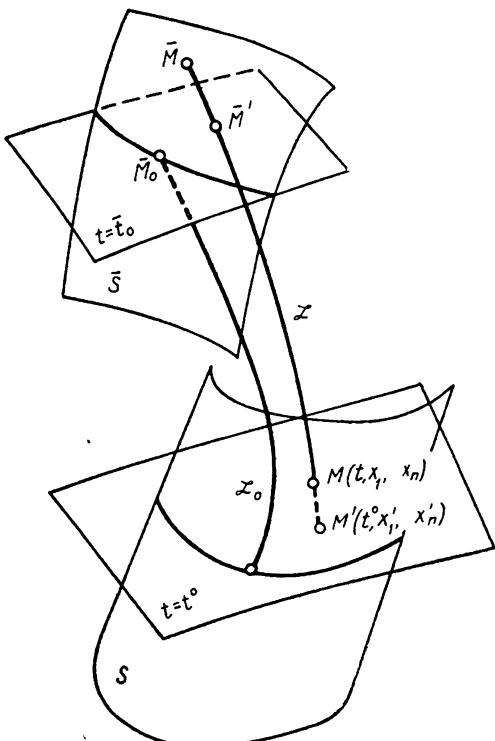


Рис. 3.

Отображение поверхности S и \bar{S} в окрестностях точек M_0 и \bar{M}_0 может быть получено по следовательным выполнением отображения поверхности S в плоскость $t=t_0$, отображения плоскости $t=t_0$ в плоскость $t=\bar{t}_0$ и отображения плоскости $t=\bar{t}_0$ в поверхность \bar{S} . Пусть $M(x_1, \dots, x_n; t)$, $M'(x'_1, \dots, x'_n; t')$, $\bar{M}(x_1, \dots, x_n; \bar{t})$ и $\bar{M}'(x'_1, \dots, x'_n; \bar{t}')$ — точки пересечения фазовой траектории L с поверхностью S , плоскостью $t=t_0$, поверхностью \bar{S} и плоскостью $t=\bar{t}_0$ соответственно (рис. 3). Согласно (2.9),

$$\begin{aligned} x_i = & x'_i + (f_i)_M(t-t_0) + \\ & + \frac{1}{2} \{X(f_i)\}_{M'}(t-t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Кроме того, поскольку точка M лежит на поверхности S , то имеет место уравнение $S(t; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, которое, согласно (1.7), может быть записано в виде

$$S(t_0; x'_1, \dots, x'_n) + \{X(S)\}_{M'}(t-t_0) + \frac{1}{2} \{X^2(S)\}_{M'}(t-t_0)^2 + \dots = 0 \quad (2.11)$$

При заданных координатах точки M' уравнение (2.11) определяет промежуток времени $t' - t_0$, после чего по формулам (2.10) нахо-

дятся координаты точки M . Аналогично для преобразования, связывающего координаты точек \bar{M} и \bar{M}' , находим соотношения:

$$\bar{x}_i = \bar{x}'_i + (f_i)_{\bar{M}'} (\bar{t} - \bar{t}_0) + \frac{1}{2} \{X(f_i)\}_{\bar{M}'} (\bar{t} - \bar{t}_0)^2 + \dots; \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}(\bar{t}_0; \bar{x}_1', \dots, \bar{x}_n') + \{X(\bar{S})\}_{\bar{M}'} (\bar{t} - \bar{t}_0) + \\ + \frac{1}{2} \{X^2(\bar{S})\}_{\bar{M}'} (\bar{t} - \bar{t}_0)^2 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

В линейном приближении из полученных формул для трех преобразований, из которых может быть составлено искомое отображение поверхности S в \bar{S} , приходим к уже установленному ранее [40] результату. Действительно, в линейном приближении отображения плоскостей $t = t_0$ и $t = \bar{t}_0$ в поверхности S и \bar{S} соответственно записываются в виде:

$$x_i = x'_i + (f_i)_{M_0} \{X(S)\}_{M_0}^{-1} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right)_{M_0} (x'_j - x_{j0}) \quad (2.14)$$

и в виде:

$$\bar{x}_i = \bar{x}'_i + (f_i)_{\bar{M}_0} \{X(\bar{S})\}_{\bar{M}_0}^{-1} \sum \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}_j} \right)_{\bar{M}_0} (\bar{x}'_j - \bar{x}_{j0}), \quad (2.15)$$

а линеаризованное отображение плоскости $t = t_0$ в плоскость $t = \bar{t}_0$ совпадает с отображением, даваемым линеаризованными уравнениями (2.1), т. е. уравнениями в вариациях.

3. О ЗАВИСИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Изучение зависимости структуры разбиения фазового пространства динамической системы на траектории от ее параметров и связанное с ним выделение в пространстве параметров областей, соответствующих одной и той же структуре разбиения фазового пространства, представляет собою основную задачу качественного исследования динамики системы*. Для систем с одной степенью свободы, имеющих двумерное фазовое пространство, эта задача при некотором ограничении в значительной мере решена в работах А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонович и А. Г. Майера [61–68]. Ограничение, накладываемое на рассматриваемые системы, состоит в требовании так называемой грубости [61] и в предположении, что изменение качественной картины разбиения фазового пространства происходит через системы с конечной степенью негрубости. Эти ограничения, весьма естественные с физической точки зрения, позволяют определить всю качественную картину разбиения фазового пространства на траектории через конечное число ее элементов: особых точек, сепаратрис седел и предельных циклов. В силу этого вопрос о зависимости качественной картины разбиения фазового пространства на траектории сводится к изучению зависимости от параметров особых точек, предельных циклов и сепаратрис. Значения параметров, при которых происходит изменение одного из только что перечисленных элементов, приводящее к изменению всей качественной картины

* При этом важно иметь в виду, что изучение зависимости качественной картины разбиения фазового пространства от параметров в ряде случаев необычайно облегчает исследование и численно заданных конкретных систем.

разбиения фазового пространства на траектории, называются бифуркационными. При любой бифуркации происходит либо рождение, либо исчезновение особых точек или предельных циклов, либо изменения в ходе сепаратрис. Основных случаев рождения предельных циклов, т. е. случаев, составляющих в пространстве параметров граничные поверхности, всего четыре [63]: рождение из фокуса в момент смены его устойчивости, из сепаратрисы седла, идущей (в простейшем случае) в то же седло, и из сепаратрисы сложной седло-узловой особой точки, идущей в нее же, а также одновременное рождение двух слившихся предельных циклов, из которых один затем становится устойчивым, а другой — неустойчивым.

Осуществление аналогичной программы исследования для систем с числом степеней свободы, большим единицы, наталкивается на ряд очень больших трудностей, связанных, прежде всего, с отсутствием какой бы то ни было качественной теории в целом для системы дифференциальных уравнений порядка выше второго. В силу этого пока приходится ограничиваться локальными рассмотрениями без непосредственной их связи со структурой разбиения на траектории всего фазового пространства, т. е. изучением зависимости от параметров отдельных наиболее важных типов движений и прежде всего состояний равновесия и периодических движений. Следует отметить, что в конкретных задачах такое исследование иногда оказывается достаточным и для выяснения качественной структуры разбиения в целом. Настоящий раздел посвящен рассмотрению (носящему в значительной мере предварительный характер) зависимости состояний равновесия и периодических движений от параметров.

Пусть неавтономная система типа, описанного в разделе 1, зависит от параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. Ее устойчивому или неустойчивому периодическому движению Γ периода τ взаимно-однозначно соответствует устойчивая или неустойчивая неподвижная точка M^* преобразования T_τ . При непрерывном изменении параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ неподвижная точка M^* может исчезнуть, не покидая области определения точечного отображения T_τ , лишь при условии появления у ее характеристического уравнения единичного корня и слияния ее с какой-то другой неподвижной точкой [41]. Отсюда вытекает, что периодическое движение Γ периода τ , остающееся при непрерывном изменении параметров системы в рассматриваемой области фазового пространства, может исчезнуть лишь путем слияния с каким-нибудь другим периодическим движением, и в момент слияния один из характеристических показателей Γ обращается в нуль *. Заметим, что граничными точками области определения отображения T_τ могут быть только точки, для которых выходящий из них отрезок фазовой траектории длительности τ либо пересекает одну из границ поверхностей S_{pq} , либо касается одной из этих поверхностей. Нарушение устойчивости неподвижной точки происходит при появлении у ее характеристического уравнения корня с модулем, равным единице (т. е. корня $z = +1$ или $z = -1$, или пары комплексно сопряженных корней вида $z = e^{i\varphi}$ и $z = e^{-i\varphi}$). Соответствующие этим корням граничные поверхности N_{+1} , N_{-1} и N_q будут одновременно и граничными поверхностями области существования и устойчивости периодического движения Γ .

* Напомним, что характеристические показатели ρ периодаического движения Γ и корни z характеристического уравнения неподвижной точки преобразования T_τ связаны соотношением $\rho = z^{-1} \ln z$ [40].

Таким образом, область существования периодического движения Γ ограничена поверхностью N_{+1} и поверхностями, соответствующими или прохождению Γ через граничные точки поверхностей S_{pq} или касанию Γ с одной из этих поверхностей. Поверхности N_{-1} и N_φ выделяют из области существования периодического движения Γ подобласть, в которой Γ устойчиво. Тут же отметим, что для фактического отыскания поверхностей N_{+1} , N_{-1} и N_φ достаточно располагать линейным приближением отображения T . При выходе через поверхность N_{-1} неподвижная точка M^* либо сливается с циклом двукратных неустойчивых точек, либо из нее в момент перехода через поверхность N_{-1} рождается цикл из двукратных устойчивых точек. Первый случай имеет место, когда проходимой граничной точке поверхности N_{-1} отвечает неустойчивая неподвижная точка, второй, — когда устойчивая. В соответствии с этим при выходе из области устойчивости через поверхность N_{-1} периодическое движение Γ либо сливается с неустойчивым периодическим движением удвоенного периода 2τ , либо из него рождается устойчивое периодическое движение периода 2τ . Первый случай слияния с неустойчивым периодическим движением периода 2τ имеет место, когда проходимой точке граничной поверхности N_{-1} отвечает неустойчивое периодическое движение, второй случай, — когда, напротив, в момент прохождения граничной поверхности N_{-1} периодическое движение Γ устойчиво. Для того, чтобы выяснить, какой из только что описанных случаев имеет место, необходимо, согласно [41], найти точечное отображение в окрестности M^* с точностью до величины четвертого порядка.

Случай перехода через поверхность N_φ значительно более сложен, и установленные ранее факты полного его анализа дать не могут. Можно лишь утверждать, что при переходе через граничную поверхность N_φ возможно слияние только с периодическими движениями периода $q\tau$, если $\varphi = 2\pi p/q$, где p и q — несократимые целые числа. При некоторых дополнительных предположениях и заведомо при предположениях, сделанных в [41], при выходе из области устойчивости периодического движения Γ через поверхность N_φ возникает тороидальная поверхность, к которой неограниченно приближаются все соседние траектории. Эта тороидальная поверхность составлена из фазовых траекторий системы с числом вращения Пуанкаре μ в момент рождения, равным $\varphi/2\pi$. При μ иррациональном траектории, составляющие эту поверхность образуют квазипериодическую ее обмотку, и при μ рациональном на торе в общем случае есть несколько пар устойчивых и неустойчивых замкнутых траекторий с числом вращения μ .

Перейдем теперь к рассмотрению бифуркаций периодических движений автономной системы. Пусть Γ — замкнутая фазовая траектория и пусть π — некоторая пластинка, ортогонально пересекающая Γ в точке M^* (рис. 4). Фазовые траектории, близкие к Γ , порождают в некоторой окрестности $\varepsilon(M^*)$ точки M^* точечное отображение T пластиинки π в себя. При этом отрезки фазовых траекторий, выходящие из точек $\varepsilon(M^*)$ до их повторного пересечения с пластинкой π , образуют некоторую $\varepsilon(\Gamma)$ окрестность замкнутой кривой Γ . При непрерывном изменении параметров системы вплоть до момента бифуркации периодического движения Γ мыслим две возможности:

а) вплоть до момента бифуркации Γ возможно построение отображения T , определенного в некоторой ε -окрестности точки

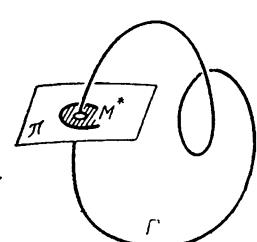


Рис. 4.

M^* , и ϵ все время превосходит некоторое положительное число;

б) построение такого точечного отображения невозможно, поскольку при приближении к моменту, при котором происходит бифуркация Γ , ϵ -окрестность точки M^* , в которой определено необходимое число раз непрерывно-дифференцируемое преобразование T , неограниченно уменьшается.

В первом случае бифуркациям Γ соответствуют некоторые бифуркации неподвижной точки M^* , и поэтому о них можно целиком повторить все сказанное ранее в отношении бифуркаций периодических движений неавтономных систем, происходящих при пересечении поверхностей N_{+1} , N_{-1} и N_ϕ . Во втором случае, напротив, изучение бифуркации Γ непосредственно не сводится к рассмотрению бифуркации неподвижной точки M^* преобразования T . Пусть D — произвольная ограниченная замкнутая область фазового пространства рассматриваемой нами системы и пусть Γ — любая расположенная в D замкнутая фазовая траектория с периодом, меньшим $\tau < +\infty$, причем в ϵ -окрестности этой траектории нет ни граничных точек поверхностей S_{pq} , ни фазовых траекторий, касающихся поверхностей S_{pq} , ни состояний равновесия. Тогда можно утверждать, что существует отображение с окрестностью определения, большей некоторого $\epsilon > 0$. Действительно, в этом случае множество замкнутых кривых Γ , удовлетворяющих поставленным выше условиям, компактно; поэтому в случае, если бы не существовало положительной нижней грани величин ϵ -окрестностей, в которых определено точечное отображение, существовала бы удовлетворяющая всем сформулированным выше условиям замкнутая траектория Γ , для которой построение точечного отображения T невозможно. Исчезновение ϵ -окрестности точки M^* , в которой определено точечное отображение T , при непрерывном изменении параметров системы возможно лишь при нарушении одного из условий только что сформулированного утверждения, т. е. только в одном из следующих случаев: 1) замкнутая фазовая кривая Γ уходит из любой ограниченной области фазового пространства; 2) Γ неограниченно увеличивает свой период τ ; 3) Γ пересекает границу одной из поверхностей S_{pq} ; 4) Γ касается одной из поверхностей S_{pq} ; 5) Γ слиивается с одним из состояний равновесия.

Таким образом, объединяя все сказанное, приходим к выводу, что границами области существования и устойчивости периодического движения Γ могут быть только поверхности N_{+1} , N_{-1} , N_ϕ и поверхности, соответствующие реализации одного из только что перечисленных пяти случаев. Прежде всего, не вдаваясь в детали, сравним этот вывод с тем, что известно для системы двух дифференциальных уравнений на плоскости. В случае плоскости поверхности N_{-1} и N_ϕ отсутствуют, поскольку преобразование T является преобразованием отрезка прямой в себя, сохраняющим ориентацию. Первый случай обычно исключается путем либо рассмотрения системы только внутри замкнутой кривой без контакта, либо на всей полусфере Пуанкаре. Второй случай может иметь место только вместе с пятым, который существует в двух вариантах: или Γ стягивается к состоянию равновесия, или Γ превращается в траекторию, идущую из особой точки в нее же. При наличии линий, на которых происходит изменение описывающих движение системы дифференциальных уравнений, могут иметь место случаи 3) и 4). При двумерном фазовом пространстве (но более сложном, чем плоскость) сохранение ориентации преобразованием T , вообще, не обязательно, и поэтому становится возможным случай, отвечающий поверхности N_{-1} .

Выясним, каковы простейшие мыслимые возможности слияния периодического движения с состоянием равновесия. Прежде всего, возможно стягивание замкнутой кривой к состоянию равновесия. В следующем разделе будет показано, что в этом случае в момент слияния с состоянием равновесия два корня его характеристического уравнения будут чисто мнимыми, и поэтому поверхность в пространстве параметров, соответствующая этой бифуркации, является частью поверхности, на которой у характеристических уравнений особых точек системы есть чисто мнимые корни. При сближении нестягивающегося в точку периодического движения с состоянием равновесия его период неограниченно возрастает, и в момент слияния возникает состояние равновесия с выходящей и снова входящей в него фазовой траекторией.

Пусть теперь точка O является состоянием равновесия, из которого при выполнении каких-то r соотношений между параметрами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ есть выходящий пучок фазовых траекторий размерности p и входящий пучок размерности q , представляемые в виде:

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(t; a_1, a_2, \dots, a_{p-1}; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m); \\ x_i &= \psi_i(t; b_1, b_2, \dots, b_{q-1}; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_{p-1} и b_1, b_2, \dots, b_{q-1} — параметры соответственно первого и второго пучков. В выходящем и входящем пучках есть общая траектория, если при некоторых значениях параметров пучков выполняются (тождественно относительно τ) соотношения

$$\varphi_i(t + \tau; a_1, a_2, \dots, a_{p-1}; \sigma_1, \dots, \sigma_m) = \psi_i(t' + \tau; b_1, b_2, \dots, b_{q-1}; \sigma_1, \dots, \sigma_m). \quad (3.2)$$

Эти n соотношений, помимо r условий существования пучков (3.1), налагают на параметры $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ $n - p - q + 1$ условий. Общее число условий, налагаемых на параметры $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, равно одному, когда $r = 0$ и $n - p - q = 0$ или когда $r = 1$ и $n - p - q + 1 < 0$. Таким образом, граничная поверхность, на которой происходит исчезновение нестягивающегося в точку периодического движения, является частью поверхности, соответствующей наличию состояния равновесия, для которого $r = 0$ и $p + q = n$, либо $r = 1$ и $p + q > n + 1$. В простейшем случае $n = 2$ этим требованиям удовлетворяют две существенно различные комбинации значений p , q и r (1,1,0) и (1,2,1).

4. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ХАРАКТЕРЕ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ИЛИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Наряду с исследованием устойчивости состояний равновесия и периодических движений значительный интерес представляет изучение поведения фазовых траекторий, близких к состоянию равновесия или периодическому движению, при малых нарушениях их устойчивости. Именно в связи с таким исследованием Н. Н. Баутинным [68] были введены понятия „опасных“ и „безопасных“ участков границ областей устойчивости состояния равновесия.

Пусть Γ — некоторый элемент притяжения фазовых траекторий (устойчивое состояние равновесия или устойчивое периодическое движение) и пусть $\sigma(\Gamma)$ — область притяжения Γ , т. е. совокупность фазовых траекторий, асимптотически приближающихся к Γ при $t \rightarrow +\infty$. При изменении параметров системы, приводящем к нарушению устойчивости Γ , мыслимы два случая:

а) в момент перехода параметрами системы через границу области устойчивости область притяжения $\sigma(\Gamma)$ исчезает, стягиваясь к Γ ;

б) при изменении параметров на границе области устойчивости $\sigma(\Gamma)$ не исчезает, т. е. содержит внутри себя некоторую окрестность Γ .

В первом случае после сколь угодно малого нарушения устойчивости и на самой границе области устойчивости фазовые точки, близкие к Γ , при $t \rightarrow \infty$ стремятся к некоторому другому, отличному от Γ элементу притяжения, который при обратном изменении параметров не сливается с Γ . Напротив, во втором случае при достаточно малых нарушениях устойчивости траектории, начинаяющиеся вблизи Γ , при $t \rightarrow +\infty$ остаются в малой окрестности Γ , хотя само Γ при этом становится неустойчивым (от Γ при нарушении ее устойчивости „отрождается“ какой-то другой устойчивый элемент притяжения, а область притяжения $\sigma(\Gamma)$ переходит в область притяжения этого нового элемента). Наиболее наглядно все сказанное может быть проиллюстрировано в случае двумерной фазовой плоскости.

Случай а). При значениях параметра $\mu < \mu_0$ состояние равновесия устойчиво, и областью притяжения σ является область, лежа-

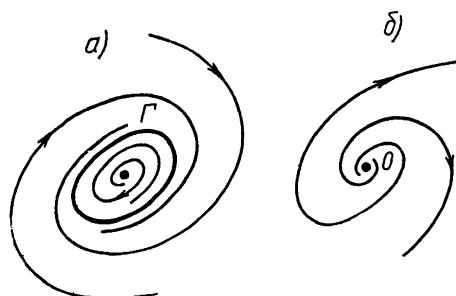


Рис. 5.

щая внутри неустойчивого предельного цикла (рис. 6б). При $\mu \rightarrow \mu_0$ σ стягивается к состоянию равновесия. При $\mu \geq \mu_0$ фазовые точки, близкие к состоянию равновесия, уходят при $t \rightarrow +\infty$ к какому-то другому элементу притяжения (устойчивому состоянию равновесия или предельному циклу) (рис. 5б).

Случай б). При $\mu < \mu_0$ состояние равновесия устойчиво (рис. 6а). Если же $\mu > \mu_0$, то состояние равновесия становится неустойчивым, и от него „отрождается“ устойчивый предельный цикл (периодическое движение) (рис. 5б). При этом область притяжения состояния равновесия непрерывно переходит в область притяжения предельного цикла.

Настоящий раздел имеет целью показать, что результаты, полученные в предыдущем разделе и работе [4], позволяют решить вопрос об опасных и безопасных участках границы области устойчивости состояния равновесия и периодического движения, и,

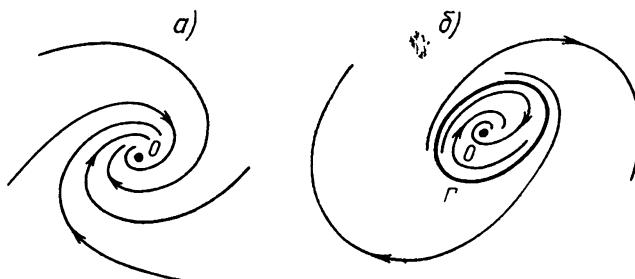


Рис. 6.

в случае безопасной границы, установить, какой именно новый элемент притяжения рождается.

Нарушение устойчивости периодического движения возможно при переходе через поверхности N_{+1} , N_{-1} и N_φ . При переходе поверхности N_{+1} происходит исчезновение периодического движе-

ния путем слияния его с другим неустойчивым* периодическим движением; поэтому граница N_{+1} является опасной. При пересечении границы N_{-1} возможны два случая: периодическое движение на самой границе устойчиво, и при переходе через границу от него „отрождается“ устойчивое периодическое движение удвоенного периода; периодическое движение на самой границе области устойчиво, и при переходе через границу с ним сливаются неустойчивое периодическое движение удвоенного периода. Первый случай соответствует безопасной части границы N_{-1} , второй — опасной.

Нарушение устойчивости состояния равновесия происходит либо при появлении у его характеристического уравнения нулевого корня, либо пары чисто мнимых корней. В общем случае при появлении нулевого корня происходит слияние устойчивого и неустойчивого состояний равновесия с последующим их исчезновением, так что этот случай соответствует опасной границе.

Для рассмотрения случая чисто мнимых корней запишем уравнение движения в окрестности состояния равновесия в виде

$$dx_i/dt = \lambda_i(\mu) x_i + \sum a_{ijk}(\mu) x_j x_k + \sum a_{ijks}(\mu) x_j x_k x_s + \dots \quad (4.1)$$

Общее решение уравнений (4.1) с точностью до величин четвертого порядка малости относительно $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$, согласно разделу 2, найдется в виде

$$x_i = x_{i0} e^{\lambda_i t} + \sum A_{ijk}(t) x_{j0} x_{k0} + \sum A_{ijks} x_{j0} x_{k0} x_{s0} + \dots \quad (4.2)$$

Прежде всего, заметим, что если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для $i = 3, 4, \dots, n$, то, как непосредственно видно из формул (4.2), всякая фазовая траектория, начинающаяся в области

$$|x_3|^2 + |x_4|^2 + \dots + |x_n|^2 > \delta (|x_1|^2 + |x_2|^2) \quad (\delta > 0) \quad (4.3)$$

и в ней остающаяся, асимптотически стремится к состоянию равновесия $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0^{**}$. С другой стороны, при $\lambda_1 = \sigma + i\omega$, $\lambda_2 = \sigma - i\omega$ и $\omega \neq 0$ всякая фазовая траектория, начинающаяся в достаточно малой окрестности состояния равновесия в точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, лежащей вне области (4.3), вновь, через промежуток времени, близкий к π/ω , пересекает гиперплоскость $x_1 + x_2 = 0$ в точке $\bar{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, также лежащей вне области (4.3).

В силу этого рассмотрение поведения фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия сводится к изучению точечного отображения, переводящего точку $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ гиперплоскости $x_1 + x_2 = 0$ в точку $\bar{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ этой же гиперплоскости (рис. 7). Это точечное отображение, согласно (4.2), записывается в виде

$$\bar{x}_i = x_i e^{\lambda_i \tau} + \sum A_{ijk}(\tau) x_j x_k + \sum A_{ijks}(\tau) x_j x_k x_s + \dots, \quad (4.4)$$

где время τ движения от фазовой точки M к \bar{M} находится из уравнения

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = x_1 e^{(\sigma+i\omega)\tau} + x_2 e^{(\sigma-i\omega)\tau} + \dots = 0. \quad (4.5)$$

* Предполагается, что имеет место случай, рассмотренный в [4], и, в частности, нет слияния с периодическим движением периода τ/m , где m целое число.

** Это непосредственно следует из того, что при условии (4.3) величина $|x_3|^2 + \dots + |x_n|^2$ уменьшается с ростом t (см. (4.4)).

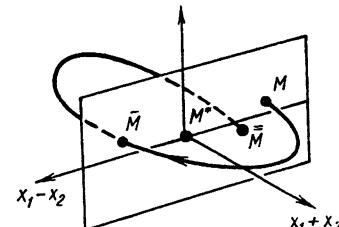


Рис. 7.

Из уравнения для τ находим, что с точностью до величин порядка x_1, x_2, \dots, x_n $\tau = \pi/\omega$. Последнее означает, что отображение (4.4) имеет при $\sigma = 0$ один корень, равный -1 , а остальные корни по модулю строго меньше единицы.

Как было ранее установлено [4], характер бифуркации неподвижной точки $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ отображения (4.4) определяется знаком величины g_0 , которая может быть легко найдена, если выписан квадрат преобразования (4.4). Заметим, что квадрат преобразования (4.4) также записывается в виде (4.4), если под τ понимать корень уравнения (4.5), близкий к $2\pi/\omega$. Неподвижная точка $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ отображения (4.4) при $\sigma = 0$ устойчива, если $g_0 < 0$, и неустойчива, если $g_0 > 0$. При изменении параметров, приводящем к смене знака величины σ с минуса на плюс, происходит рождение устойчивой двукратной неподвижной точки, если $g_0 < 0$, и слияние с неустойчивой двукратной неподвижной точкой, если $g_0 > 0$. Таким образом, граничная точка области устойчивости состояния равновесия, соответствующая наличию двух чисто мнимых корней, будет безопасной, если $g_0 < 0$, и опасной, если $g_0 > 0$. При переходе через безопасную часть границы области устойчивости от состояния равновесия „отрождается“ устойчивое периодическое движение с периодом в момент рождения, равным $2\pi/\omega$, а при переходе через опасную часть границы происходит слияние состояния равновесия с неустойчивым периодическим движением того же периода $2\pi/\omega$.

5. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ОТБОРАЖЕНИЙ

Пусть дана система n -дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = F_s(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \mu), \quad (5.1)$$

зависящих от параметра μ . А. Пуанкаре [22] в связи с задачами небесной механики указал метод, позволяющий, исходя из известных периодических решений системы (5.1) при $\mu = 0$, найти ее периодические решения при достаточно малых μ . Наибольший практический интерес представляет случай, когда при $\mu = 0$ система уравнений (5.1) допускает семейство периодических решений, зависящее от одного или нескольких параметров; при этом возникает задача отыскания так называемых порождающих решений, т. е. тех периодических решений семейства, к которым стремятся периодические решения уравнения (5.1) при $\mu \rightarrow 0$.

Этот метод отыскания периодических движений в сочетании с теорией устойчивости А. М. Ляпунова [21] сыграл очень большую роль в открытии и изучении ряда основных нелинейных явлений [50, 77–85].

Настоящий раздел имеет целью изложить метод малого параметра, понимая под этим сочетание методов А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова, с точки зрения метода точечных отображений. Такое изложение интересно не только тем, что отличается от принятого, но и тем, что естественно приводит к практически важному обобщению метода малого параметра на системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [76] (системы с сухим трением, с реле, с кусочно-линейными характеристиками нелинейностей и др.).

Допустим, что точечное отображение T , к которому сводится исследование периодических движений системы (5.1), найдено. Если рассматриваемая система (5.1) при $\mu = 0$ имеет периодические

движения, то отображение T при $\mu=0$ имеет неподвижные точки, множество которых обозначим через J . J представляет собою множество точек пересечения фазовых траекторий, соответствующих периодическим движениям системы (5.1) при $\mu=0$, с некоторой поверхностью S (см. рис. 8).

Пусть u_1, u_2, \dots, u_n — некоторые криволинейные координаты на поверхности S , в которых преобразование T записывается в виде:

$$\bar{u}_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n; \mu), \quad (5.2)$$

и пусть

$$u_i = \varphi_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \quad (5.3)$$

параметрические уравнения множества неподвижных точек J преобразования T при $\mu=0$. В отношении функций f_i и φ_i достаточно предположить, что они в рассматриваемых областях их изменения имеют непрерывные вторые производные. Задача отыскания и исследования периодических движений системы дифференциальных уравнений (5.1), пересекающих поверхность S , сводится к задаче отыскания и исследования неподвижных точек преобразования (5.2). Эта задача была рассмотрена ранее [4]. Основные результаты этого рассмотрения сформулированы ниже в теоремах 1 и 2, позволяющих указать „порождающие“ решения и исследовать устойчивость соответствующих им периодических движений системы (5.1) при достаточно малых μ .

Характеристическое уравнение

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right) - z, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right), \dots, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right), & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right), \dots, & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_n} \right) - z \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

преобразования (5.2) в любой точке множества J имеет m единичных корней. Если остальные корни (5.2) отличны от единицы, то существует неравный нулю диагональный минор порядка $n-m$. Пусть этим диагональным минором является минор Δ , составленный из последних $n-m$ строк определителя (5.4) с $z=1$.

Теорема 1. Для того, чтобы неподвижной точке $M^*(0)$ преобразования T при $\mu=0$ соответствовала неподвижная точка $M^*(\mu)$ преобразования T при $\mu \neq 0$, стремящаяся к точке $M^*(0)$ при $\mu \rightarrow 0$, необходимо, чтобы координаты этой точки множества J удовлетворяли системе уравнений:

$$\Phi_s(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_s}{\partial \mu}, & \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+1}}, & \dots, & \frac{\partial f_s}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_{m+1}}{\partial \mu}, & & & \Delta \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mu}, & & & \end{vmatrix} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m), \quad (5.5)$$

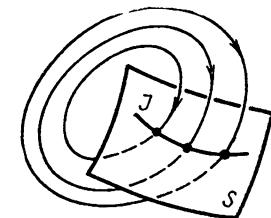


Рис. 8.

и достаточно, чтобы в точке множества J , удовлетворяющей системе уравнений (5.5), якобиан этой системы был отличен от нуля. При выполнении последнего условия точка $M^*(\mu)$ является един-

ственной неподвижной точкой преобразования T , стремящейся при $\mu \rightarrow 0$ к точке $M^*(0)$.

Теорема 2. Неподвижная точка $M^*(\mu)$ устойчива при $\mu > 0$, если $n - m$ корней характеристического уравнения (5.4) для точки $M^*(0)$ лежат внутри единичного круга и если все корни уравнения

где

$$a_{is} = \left[-\frac{\partial}{\partial u_s} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mu} \right) \right],$$

имеют отрицательные действительные части. Неподвижная точка $M^*(\mu)$ неустойчива при достаточно малых $\mu > 0$, если характеристическое уравнение преобразования (5.2) имеет хотя бы один корень, по модулю больший единицы, или если хотя бы один корень уравнения (5.6) имеет положительную действительную часть.

В качестве примера возьмем важный для приложений и уже достаточно изученный в [77-83] случай, когда система (5.1) при $\mu=0$ обращается в систему n линейных уравнений с постоянными коэффициентами. После соответствующей замены переменных эта система может быть приведена к виду

$$dx_i/dt = \lambda_i x_i + \omega_i(t) + \mu f_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \mu), \quad (5.7)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения системы (5.1) с $\mu = 0$, а $\omega_i(t)$ и $f_i(t; x_1, \dots, x_n; \mu)$ — периодические, периода 2π , непрерывно дифференцируемые функции времени t и дважды непрерывно дифференцируемые функции остальных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$.

При рассмотрении периодических решений неавтономной системы уравнений (5.7) необходимо различать две возможности.

а) Нерезонансный случай, когда среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ нет близких (с порядком близости μ) к числу $i\rho$, где ρ — целое. В этом случае при $\mu=0$ система (5.7) имеет общее решение вида

$$x_s^0(t) = [x_{s0} - \varphi_s(t_0)] \exp \lambda_s(t - t_0) + \varphi_s(t), \quad (5.8)$$

где $\varphi_s(t)$ — некоторые периодические, периода 2π , функции t , а x_{s0} — значения $x_s(t)$ при $t = t_0$.

б) Резонансный случай, когда один из корней λ_s близок к ip , где p — целое число. В этом случае система (5.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= -px_2 + \mu f_1; & dx_2/dt &= px_1 + \mu f_2; \\ dx_s/dt &= \lambda_s x_s + \omega_s(t) + \mu f_s \quad (s = 3, 4, \dots, n) \end{aligned} \tag{5.9}$$

и имеет при $\mu = 0$ решение

$$\begin{aligned}x_1^0(t) &= x_{10} \cos p(t - t_0) - x_{20} \sin p(t - t_0); \\x_2^0(t) &= x_{10} \sin p(t - t_0) + x_{20} \cos p(t - t_0); \\x_s^0(t) &= [x_{s0} - \varphi_s(t_0)] \exp \lambda_s(t - t_0) + \varphi_s(t).\end{aligned}\quad (5.10)$$

Отличие нерезонансного случая от резонансного состоит в том, что соответствующее уравнениям (5.7) при $\mu = 0$ отображение гиперплоскости $t = 0$ в гиперплоскость $t = 2\pi$ (отождествляемую с гиперплоскостью $t = 2\pi$)

$$\bar{x}_s = [x_s - \varphi_s(0)] \exp 2\pi\lambda_s + \varphi_s(2\pi) \quad (5.11)$$

имеет в нерезонанском случае единственную неподвижную точку $x_i^* = \varphi_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), в то время как в резонансном случае это отображение

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1; \quad \bar{x}_2 = x_2; \\&\bar{x}_s = [x_s - \varphi_s(0)] \exp 2\pi\lambda_s + \varphi_s(2\pi) \quad (s = 3, 4, \dots, n)\end{aligned}\quad (5.12)$$

имеет двумерную плоскость неподвижных точек $x_s^* = \varphi_s(0)$ ($s = 3, 4, \dots, n$). В нерезонанском случае при $\mu = 0$ якобиан

$$\chi(z) = (\exp 2\pi\lambda_1 - z)(\exp 2\pi\lambda_2 - z) \dots (\exp 2\pi\lambda_n - z), \quad (5.13)$$

совпадающий с характеристическим полиномом преобразования (5.11), если в нем положить $z = 1$, отличен от нуля (поскольку ни одно из чисел λ_s не является целым). В силу этого, согласно теореме 1, при достаточно малых μ преобразование $T_{2\pi}$ имеет единственную неподвижную точку, сливающуюся с точкой $x_i^* = \varphi_i(0)$ при $\mu \rightarrow 0$. Эта неподвижная точка и соответствующее ей периодическое движение будут устойчивыми, если все корни характеристического уравнения (5.13) лежат внутри единичного круга, и неустойчивыми в противном случае.

В резонансном случае при отличном от нуля и достаточно малом μ общее решение уравнений (5.12) может быть найдено согласно разделу 2, и точечное отображение $T_{2\pi}$ записано в виде:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 + \mu \int_0^{2\pi} \{[f_1] \cos p\tau + [f_2] \sin p\tau\} d\tau + \mu^2(...); \\&\bar{x}_2 = x_2 + \mu \int_0^{2\pi} \{-[f_1] \sin p\tau + [f_2] \cos p\tau\} d\tau + \mu^2(...); \\&\bar{x}_s = [x_s - \varphi_s(0)] \exp 2\pi\lambda_s + \mu \int_0^{2\pi} [f_s] \exp \lambda_s(2\pi - \tau) d\tau + \mu^2(...),\end{aligned}\quad (5.14)$$

где

$$[f_j] = f_j(\tau; x_1^0(\tau), x_2^0(\tau), \dots, x_n^0(\tau); 0)$$

(в функциях $x_1^0(\tau), \dots, x_n^0(\tau)$, определяемых формулами (5.10), положено $x_{10} = x_1, \dots, x_{n0} = x_n$). Применяя теперь к преобразованию (5.14) теорему 1, найдем, что неподвижные точки преобразования

$T_{2\pi}$ стремятся к точкам, у которых $x_3^* = \varphi_3(0), \dots, x_n^* = \varphi_n(0)$, а координаты x_1^* и x_2^* удовлетворяют уравнениям:

$$\Phi_1(x_1^*, x_2^*) = \int_0^{2\pi} \{[f_1]^* \cos p\tau + [f_2]^* \sin p\tau\} d\tau = 0; \quad (5.15)$$

$$\Phi_2(x_1^*, x_2^*) = \int_0^{2\pi} \{-[f_1]^* \sin p\tau + [f_2]^* \cos p\tau\} d\tau = 0,$$

где для $j = 1, 2$

$$[f_j]^* = f_j(\tau; x_1^* \cos p\tau - x_2^* \sin p\tau; x_1^* \sin p\tau + x_2^* \cos p\tau; \varphi_3(0), \dots, \varphi_n(0); 0).$$

Далее, согласно теореме 2, неподвижная точка M^* преобразования, определяемого формулами (5.14), и соответствующее ей периодическое решение периода 2π , в первом приближении выражается формулами (5.10), если в них положить $x_{10} = x_1^*, \dots, x_{n0} = x_n^*$ и $t_0 = 0$. Они будут устойчивыми при достаточно малых μ , если $|\exp 2\pi\lambda_s| < 1$ ($s = 3, 4, \dots, n$) и если одновременно корни уравнения

$$\Omega(\sigma) = \sigma^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1^*} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2^*} \right) \sigma + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1^*} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2^*} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2^*} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1^*} = 0 \quad (5.16)$$

имеют знаки действительных частей, совпадающие со знаком $-\mu$.

Пусть система (5.1) автономна и после соответствующей замены переменных представлена в виде:

$$dx_1/dt = -x_2 + \mu f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu); \quad dx_2/dt = x_1 + \mu f_2(x_1, \dots, x_n; \mu); \quad (5.17)$$

$$dx_s/dt = \lambda_s x_s + \mu f_s(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) \quad (s = 3, 4, \dots, n),$$

что соответствует наличию у ее характеристического уравнения двух чисто мнимых сопряженных корней. Порождаемое фазовыми траекториями (5.17) $\mu = 0$ отображение полугиперплоскости $x_2 = 0, x_1 \geq 0$ в себя допускает прямую неподвижных точек $x_3^* = x_4^* = \dots = x_n^* = 0$ (предполагается, что при $s = 3, 4, \dots, n$ $\exp 2\pi\lambda_s \neq 1$). При $\mu \neq 0$ это отображение записывается в виде:

$$\bar{x}_1 = x_1 \cos t - x_2 \sin t + \mu \int_0^t \{[f_1] \cos \tau + [f_2] \sin \tau\} d\tau + \mu^2(...);$$

$$\bar{x}_s = x_s \exp \lambda_s t + \mu (...), \quad (s = 3, 4, \dots, n), \quad (5.18)$$

где промежуток времени t , спустя который фазовая траектория, выходящая из точки $M(x_1, 0, x_3, \dots, x_n)$, вновь пересекает полугиперплоскость $x_2 = 0, x_1 \geq 0$ в точке $\bar{M}(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, определяется из уравнения

$$x_1 \sin t + x_2 \cos t + \mu \int_0^t \{-[f_1] \sin \tau + [f_2] \cos \tau\} d\tau + \mu^2(...) = 0. \quad (5.19)$$

Применяя к преобразованию (5.18) теорему 1, найдем, что его неподвижные точки порождаются из точек гиперплоскости $x_2 = 0$, одна из координат которой (x_1^*) удовлетворяет уравнению

$$\Phi_1(x_1^*) = \int_0^{2\pi} \{[f_1]^* \cos \tau + [f_2]^* \sin \tau\} d\tau = 0, \quad (5.20)$$

где

$$[f_j]^* = f_j(x_1^* \cos \tau, x_1^* \sin \tau, 0, \dots, 0; 0),$$

а остальные координаты $x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ равны нулю.

Вопрос об устойчивости неподвижной точки и соответствующего ей периодического движения (которое в первом приближении

записывается в виде $x_1 = x_1^* \cos t$, $x_2^* = x_1^* \sin t$, $x_3 = 0, \dots, x_n = 0$) непосредственно решается применением теоремы 2. Именно, имеет место устойчивость, если знак выражения

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1^*} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1^*} \{ [f_1]^* \cos \tau + [f_2]^* \sin \tau \} d\tau \quad (5.21)$$

совпадает со знаком μ и кроме этого $|\exp 2\pi\lambda_s| < 1$ ($s = 3, 4, \dots, n$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

40. Ю. И. Неймарк, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 41 (1958).
41. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 95 (1958).
42. А. А. Андronов, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ч. 1, ОНТИ, М.—Л., 1937.
43. Н. А. Железцов, ЖТФ, 20, 788 (1950).
44. Н. А. Железцов, Л. В. Родыгин, ДАН СССР, 81, 391 (1951).
45. М. И. Фейгин, Сборник памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 300, 1955.
46. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Гостехиздат, М., 1959.
47. Н. А. Железцов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 67 (1958).
48. George D. Birkhoff, Acta Mathematica, 43 (1922).
49. George D. Birkhoff, Rendiconti di Palermo, 39 (1915).
50. А. А. Андронов, Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний, изд. АН СССР, М., 441, 1956.
51. М. А. Айзerman и Ф. Р. Гантмахер, ПММ, 21, 658 (1957).
52. В. В. Казакевич, ДАН СССР, 74, 665 (1950).
53. В. В. Петров и Г. М. Уланов, Автоматика и телемеханика, 11, 289 (1950).
54. В. В. Петров, Труды 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, 1, изд. АН СССР, М., 1955.
55. Н. Н. Баутин, ДАН СССР, 61, 17 (1948).
56. Н. Н. Баутин, Инженерный сборник, 12, 3 (1952).
57. З. М. Аксельрод, Регуляторы скорости в приборостроении, Машгиз, М.—Л., 1949.
58. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Госуд. изд. технико-теорет. лит-ры, М.—Л., 1950.
59. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1954.
60. Э. Гурса, Курс математического анализа, 2, ОНТИ НКТИ СССР, М.—Л., 1936.
61. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 14, 247 (1937).
62. А. А. Андронов и Е. А. Леонович, ДАН СССР, 21, 427 (1938).
63. А. А. Андронов и Е. А. Леонович, Уч. зап. Горьк. ун-та, вып. 6, 3 (1937).
64. Е. А. Леонович и А. Г. Майер, ДАН СССР, 14, 251 (1937).
65. Е. А. Леонович, ДАН СССР, 78, 641 (1951).
66. Е. А. Леонович и А. Г. Майер, ДАН СССР, 103, 557 (1955).
67. А. А. Андронов и Е. А. Леонович, Математич. сб., 40, 179 (1956).
68. Л. Н. Белюстин, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 118 (1958).
69. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
70. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
71. М. А. Айзerman, Прикл. матем. и мех., 14, 444 (1950).
72. Г. В. Аронович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 131 (1958).
73. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955.
74. Ю. И. Неймарк и С. Д. Киняпин, Автоматика и телемеханика (в печати).
75. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 14, 556 (1953).
76. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, Прикл. матем. и мех. (в печати)
77. А. А. Андронов и А. А. Витт, Прикладная физика, 7, 1 (1930).
78. А. А. Андронов и А. А. Витт, ЖТФ, 4, 122 (1934).
79. Б. В. Булгаков, Прикл. матем. и мех., 6, 127 (1943).
80. Б. В. Булгаков, Прикл. матем. и мех., 7, 97 (1943).
81. Б. В. Булгаков, Прикл. матем. и мех., 10, 313 (1946).
82. И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
83. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
84. И. Г. Малкин, Труды 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, 1, изд. АН СССР, М., 1955.
85. М. А. Айзerman и И. М. Смирнова, Сборник памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955.