

ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. А. Солнцев, А. С. Тагер

Дан теоретический анализ взаимодействия двух электронных потоков, движущихся в периодическом электростатическом поле. Показано, что эффективное взаимодействие потоков, приводящее к усилению высокочастотного сигнала, происходит в узких интервалах длин волн (полосах взаимодействия), ширина которых определяется плотностью тока. Значения длины волны в полосах взаимодействия могут быть меньше периода электростатического поля и во всех полосах взаимодействия, кроме длинноволновой, слабо зависят от плотности тока пучков. Приближенно учтен разброс скоростей электронов; показано, что этот разброс уменьшает эффективность взаимодействия потоков и ограничивает возможности уменьшения рабочей длины волны.

ВВЕДЕНИЕ

Как было показано в работах [1,2], при анализе распространения высокочастотного сигнала вдоль электронного потока, движущегося прямолинейно в периодическом электростатическом поле, переменные составляющие тока (а также поля и скорости электронов) можно представить в виде бесконечной суммы пространственных гармоник, имеющих различные фазовые скорости. При синхронизации этих пространственных гармоник тока с собственными волнами волновода или замедляющей системы осуществляются условия, необходимые для усиления или генерации высокочастотного сигнала (подобно тому, как это имеет место в обычных лампах с бегущей или обратной волной).

Можно показать, что при синхронизации пространственных гармоник тока двух электронных потоков, движущихся в периодическом электростатическом поле с различными средними скоростями, также появляется возможность усиления или генерации высокочастотного сигнала, обусловленная взаимодействием этих потоков на пространственных гармониках тока.

По сравнению с обычным двулучевым взаимодействием такое взаимодействие двух электронных потоков обладает рядом интересных особенностей, изучению которых посвящена настоящая работа.

Рассмотрим вначале качественно общую картину взаимодействия двух электронных потоков на пространственных гармониках тока. Согласно [1,2], в линейном электронном потоке с периодически изменяющейся скоростью электронов $v(z)$ каждой пространственной гармонике тока номера n соответствуют две волны пространственного заряда—быстрая и медленная; фазовые скорости этих волн v_n^- и v_n^+ в случае малого пространственного заряда ($\Lambda_p \ll L$) определяются выражением

$$c/v_{n\pm} = \overline{c/v} + n\lambda/L \pm \lambda/\Lambda_p. \quad (1)$$

В этом выражении черта над переменной величиной означает ее усреднение по периоду изменения скорости L , c —скорость света в пустоте, λ —длина волны в пустоте, $\omega_p(z)$ —частота колебаний плазмы в данном сечении z , $\Lambda_p = 2\pi/\sqrt{(\omega_p/v)^2}$ —средняя плазменная длина волны.

Заметим, что выражение (1) было получено в [1,2] лишь для случая скачкообразного изменения скорости электронного потока; однако, как нетрудно показать, оно остается справедливым и при других законах изменения $v(z)$.

Как известно [3,4], с каждой волной пространственного заряда связан определенный поток кинетической энергии, отрицательный для медленных волн и положительный для быстрых волн*. Усиление или генерация высокочастотных колебаний может происходить при взаимодействии волн, несущих кинетические энергии различных знаков. Поэтому в рассмотренном случае эффективного взаимодействия электронных потоков можно ожидать вблизи точки синхронизации медленных пространственных гармоник одного пучка с быстрыми пространственными гармониками второго пучка (и наоборот), т. е. при

$$v_{n-}^{(1)} \cong v_{n-}^{(2)}. \quad (2)$$

Индексы (1) и (2) относятся к первому и второму пучку соответственно.

Из (1) и (2) нетрудно получить последовательность значений длин волн λ_k ($k=0,1,2,\dots$), вблизи которых происходит взаимодействие потоков, причем ввиду равенства периодов изменения скорости в обоих потоках на каждой из этих длин волн синхронизуется не одна, а бесконечное число пар пространственных гармоник первого и второго потоков, номера которых отличаются на целое число $k = m - n$ (рис. 1):

$$\lambda_{k\pm} = \frac{c/v^{(1)} - c/v^{(2)}}{k \pm (L/\Lambda_p^{(1)} + L/\Lambda_p^{(2)})} L. \quad (3)$$

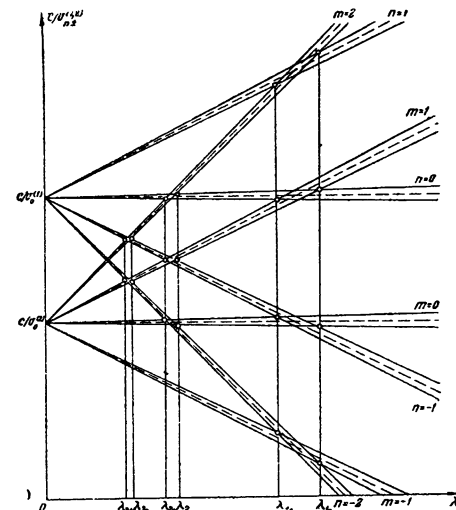


Рис. 1. Дисперсионные характеристики пространственных гармоник двух взаимодействующих электронных потоков с периодически изменяющейся скоростью электронов. Кружками обведены точки синхронизма медленных волн одного потока с быстрыми волнами другого. Пунктирные линии соответствуют пренебрежению влиянием пространственного заряда ($\omega_p=0$).

* Из принятого определения следует, что понятия „медленная“ и „быстрая“ волна зависят от выбора направления оси z ; если это направление изменяется на обратное, то изменяется наименование волн, а также знак потока кинетической энергии в каждой из этих волн.

на волны определяется плотностью тока пучков, как и в обычной двулучевой лампе.

Следует отметить, что путем подбора разности средних скоростей электронных пучков можно в широких пределах изменять период электростатического поля L , так что этот период может быть сделан как меньше, так и больше рабочей длины волны $\lambda_{k\pm}$.

В следующих разделах настоящей статьи выводится основное уравнение дисперсии для двух взаимодействующих электронных потоков и дается анализ эффективности этого взаимодействия в частном случае малого пространственного заряда, когда параметрическое усиление высокочастотного сигнала в каждом из потоков отсутствует.

Анализ ведется в линейном приближении при следующих основных предположениях: 1) траектории электронов прямолинейны; 2) постоянная составляющая электронного пространственного заряда скомпенсирована ионами; 3) не учитывается возбуждение высших типов волн пространственного заряда в пучке; 4) в разделах 1 и 2 предполагается, что оба потока в каждом поперечном сечении являются односкоростными; приближенный учет теплового разброса скоростей электронов дается в третьем разделе.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

Рассмотрим взаимодействие двух полностью смешанных электронных потоков, движущихся прямолинейно вдоль оси z со скоростями $v^{(1)}(z)$ и $v^{(2)}(z)$, изменяющимися с периодом L . Такое изменение скоростей электронов может быть обеспечено, например, наложением периодического электростатического поля. Согласно [1,2], уравнения для высокочастотных составляющих плотности тока $i^{(1)}$ и $i^{(2)}$ первого и второго потоков в приближении малого сигнала имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 i^{(1,2)}}{dz^2} + 2j \frac{\omega}{v^{(1,2)}} \frac{di^{(1,2)}}{dz} - \frac{\omega^2}{(v^{(1,2)})^2} i^{(1,2)} + \\ & + \frac{1}{v^{(1,2)}} \frac{dv^{(1,2)}}{dz} \left(2j \frac{\omega}{v^{(1,2)}} i^{(1,2)} + 3 \frac{di^{(1,2)}}{dz} \right) = \frac{j \omega J^{(1,2)} \eta}{(v^{(1,2)})^3} E(z), \end{aligned} \quad (4)$$

где $E(z)$ — амплитуда продольной составляющей высокочастотного поля, $J^{(1,2)}$ — постоянная составляющая плотности тока в первом и втором потоках, $\eta = e/m$ — отношение заряда электрона к его массе. Временной множитель $e^{j\omega t}$ опущен.

В случае достаточно широких движущихся в свободном пространстве электронных потоков, которые будут рассматриваться в дальнейшем, высокочастотное поле $E(z)$ в правой части (4) является полем пространственного заряда и записывается в виде:

$$E(z) = -(i^{(1)} + i^{(2)})/j \omega \epsilon_0. \quad (5)$$

Из уравнений (4), (5) для токов $i^{(1)}$ и $i^{(2)}$ получается система двух уравнений с периодическими коэффициентами. По теореме Флоке эта система должна иметь решения вида *

$$i^{(1,2)} = \sum_n i_n^{(1,2)} \exp[-j(\Gamma + 2\pi n/L)z], \quad (6)$$

* Суммирование во всех формулах производится от $-\infty$ до ∞ .

где Γ — постоянная распространения нулевой пространственной гармоники тока *, подлежащая определению.

В дальнейшем при расчетах оказывается более удобным записывать уравнения относительно новых переменных $i_3^{(1)}$ и $i_3^{(2)}$, определяемых равенствами:

$$i^{(1,2)} = i_3^{(1,2)} \exp \left(-j \int_0^z \frac{\omega}{v^{(1,2)}} d\zeta \right). \quad (7)$$

Как показано в работе [5], при такой подстановке уравнения для высокочастотных составляющих тока и потенциала в одиночном электронном потоке переходят в уравнения длинной линии, и величина i_3 имеет смысл тока в некоторой длинной линии, эквивалентной этому потоку.

Из (4), (5) и (7) получаем уравнения для эквивалентных токов $i_3^{(1)}$ и $i_3^{(2)}$ двух смешанных электронных потоков:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left[(v^{(1,2)})^3 \frac{di_3^{(1,2)}}{dz} \right] = - \\ & = - \frac{\eta J^{(1,2)}}{\varepsilon_0} \left\{ i_3^{(1,2)} + i_3^{(2,1)} \exp \left[j \int_0^z (\omega/v^{(1,2)} - \omega/v^{(2,1)}) d\zeta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

После двукратного интегрирования эти уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} i_3^{(1,2)} = & - \int \frac{\eta J^{(1,2)}}{\varepsilon_0 (v^{(1,2)})^3} \left\{ \int i_3^{(1,2)} dz + \right. \\ & \left. + \int i_3^{(2,1)} \exp \left[j \int_0^z (\omega/v^{(1,2)} - \omega/v^{(2,1)}) d\zeta \right] dz \right\} dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений (9) не удовлетворяет условиям теоремы Флоке; однако общую форму ее решений нетрудно получить, применяя разложение

$$\exp \left(-j \int_0^z \omega/v^{(1,2)} d\zeta \right) = \sum_n a_n^{(1,2)} \exp(-j \Gamma_n^{(1,2)} z), \quad (10)$$

где

$$\Gamma_n^{(1,2)} = L^{-1} \int_0^L \omega/v^{(1,2)} d\zeta + 2\pi n/L; \quad (10a)$$

$$a_n^{(1,2)} = L^{-1} \int_0^L \exp \left[-j \left(\int_0^z \omega/v^{(1,2)} d\zeta - \Gamma_n^{(1,2)} z \right) \right] dz. \quad (10b)$$

Учитывая (6) и (7), найдем:

$$i_3^{(1,2)} = \sum_n c_n^{(1,2)} \exp[-j(\Gamma - \Gamma_0^{(1,2)} + 2\pi n/L)z], \quad (11)$$

где

$$c_n^{(1,2)} = \sum_m i_m^{(1,2)} (a_{m-n}^{(1,2)})^*$$

— неизвестные амплитуды пространственных гармоник первого и второго эквивалентных токов.

Для решения системы (9) разложим коэффициенты уравнений в ряды:

* Нумерация пространственных гармоник, вообще говоря, произвольна. За нулевую условимся считать ту гармонику, для которой постоянная распространения Γ лежит в интервале $(0, 2\pi/L)$.

$$(\beta_p^{(1,2)})^2 = \eta J^{(1,2)}/\varepsilon_0 (v^{(1,2)})^3 = \sum_n b_n^{(1,2)} \exp(-j 2\pi n z/L); \quad (12)$$

$$\exp\left[-j \int_0^z (\omega/v^{(1)} - \omega/v^{(2)}) d\zeta\right] = \sum_k a_k \exp(-j \Gamma_k z), \quad (13)$$

где

$$\Gamma_k = L^{-1} \int_0^L (\omega/v^{(1)} - \omega/v^{(2)}) d\zeta + 2\pi k/L = \Gamma_{n+k}^{(1)} - \Gamma_n^{(2)}; \quad (13a)$$

$$\Gamma a_k = L^{-1} \int_0^L \exp\left\{-j \int_0^z (\omega/v^{(1)} - \omega/v^{(2)}) d\zeta - \Gamma_k z\right\} dz. \quad (13б)$$

Заметим, что коэффициенты a_k обладают свойством ортогональности:

$$\sum_n a_{n+p} a_{n+k}^* = \delta_{kp} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=p, \\ 0 & \text{при } k \neq p, \end{cases} \quad (14)$$

которое нетрудно получить непосредственно из (13).

Подставляя разложения (11) и (13) в уравнения (9), производя интегрирование в правой части и используя ортогональность функций $\exp\left(-j \frac{2\pi n}{L} z\right)$, получаем бесконечную нормальную систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд $c_n^{(1)}$ и $c_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned} c_m^{(1)} - \sum_n c_n^{(1)} \frac{b_{m-n}^{(1)}}{(\Gamma - \Gamma_0^{(1)} + 2\pi m/L)(\Gamma - \Gamma_0^{(1)} + 2\pi n/L)} - \\ - \sum_n c_n^{(2)} \sum_p \frac{b_{m-p}^{(1)} a_{n-p}^*}{(\Gamma - \Gamma_0^{(1)} + 2\pi m/L)(\Gamma - \Gamma_0^{(1)} + 2\pi p/L)} = 0; \\ - \sum_n c_n^{(1)} \sum_p \frac{b_{m-p}^{(2)} a_{p-n}}{(\Gamma - \Gamma_0^{(2)} + 2\pi m/L)(\Gamma - \Gamma_0^{(2)} + 2\pi p/L)} + \\ + c_m^{(2)} - \sum_n c_n^{(2)} \frac{b_{m-n}^{(2)}}{(\Gamma - \Gamma_0^{(2)} + 2\pi n/L)(\Gamma - \Gamma_0^{(2)} + 2\pi m/L)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя

$$\Delta(\Gamma) = 0. \quad (16)$$

Соотношение (16) является общим уравнением дисперсии двух смешанных электронных потоков, движущихся в периодическом электростатическом поле.

2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ ПРИ МАЛОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ЗАРЯДЕ

Случай малого пространственного заряда характеризуется тем, что период изменения скорости электронов мал по сравнению со средней плазменной длиной волны в каждом из пучков:

$$\Lambda_p^{(1,2)} = 2\pi/\sqrt{b_0^{(1,2)}} \gg L. \quad (17)$$

Будем искать решения уравнения (16) в k -ой полосе взаимодействия, где номера взаимодействующих гармоник первого и второго пучков отличаются на k . Тогда

$$\Gamma_0^{(2)} \cong \Gamma_0^{(1)} - 2\pi k/L. \quad (18)$$

Предполагая также, что усиление на одном периоде невелико:

$$|\Gamma - \Gamma_0^{(1)}| \sim |\Gamma - (\Gamma_0^{(2)} + 2\pi k/L)| \sim \sqrt{b_0^{(1,2)}}, \quad (19)$$

и пренебрегая членами порядка $L/\Lambda_p^{(1,2)}$ по сравнению с единицей, получим из (16) следующее дисперсионное уравнение (см. приложение 1):

$$1 - b_0^{(1)}(\Gamma - \Gamma_0^{(1)})^{-2} - b_0^{(2)}(\Gamma - \Gamma_0^{(2)} - 2\pi k/L)^{-2} + \\ + (1 - |a_{-k}|^2) b_0^{(1)} b_0^{(2)} (\Gamma - \Gamma_0^{(1)})^{-2} (\Gamma - \Gamma_0^{(2)} - 2\pi k/L)^{-2} = 0 \quad (20)$$

Это уравнение, как и дисперсионное уравнение обычной двухлучевой лампы, является алгебраическим уравнением четвертой степени относительно неизвестной Γ . Его решение значительно упрощается при равенстве средних плазменных длин волн в отдельных потоках ($b_0^{(1)} = b_0^{(2)} = b_0$). Полагая

$$\Gamma_0^{(1)} = \Gamma_{0k} + \delta; \quad \Gamma_0^{(2)} + 2\pi k/L = \Gamma_{0k} - \delta; \quad \Gamma = \Gamma_{0k} + \gamma; \quad x = \delta/\sqrt{b_0}, \quad (21)$$

вместо (20) получаем в случае $b_0^{(1)} = b_0^{(2)} = b_0$ биквадратное уравнение

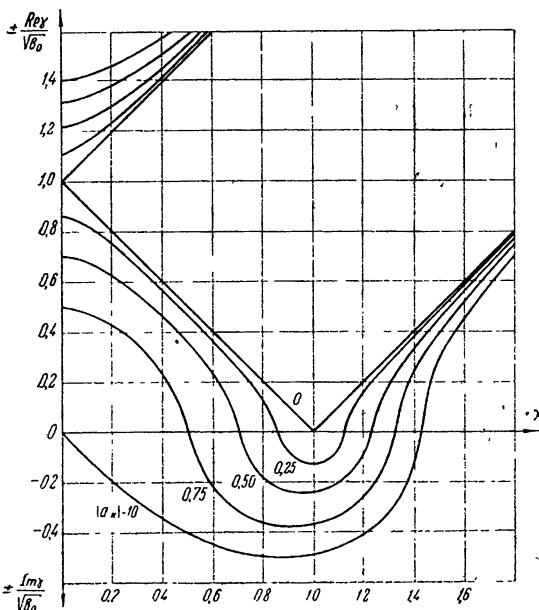
$$\gamma^4 - 2(b_0 + \delta^2)\gamma^2 + (\delta^2 - b_0)^2 - |a_{-k}|^2 b_0^2 = 0, \quad (22)$$

которое имеет следующие решения:

$$\gamma = \pm \sqrt{b_0} \sqrt{1 + x^2 \pm \sqrt{4x^2 + |a_{-k}|^2}}. \quad (23)$$

На рис. 2 приведены графики действительной и мнимой частей $\gamma/\sqrt{b_0}$ в зависимости от x , соответствующие различным значениям $|a_{-k}|$. Формула (23) и рис. 2 показывают, что нарастающие решения (соответствующие мнимым значениям γ) существуют в k -ой полосе взаимодействия при некоторых значениях параметра x , определяемых условием:

$$\sqrt{1 - |a_{-k}|} < |x| < \sqrt{1 + |a_{-k}|}. \quad (24)$$



Обычной двухлучевой лампе соответствует полоса $k=0$, причем при отсутствии периодического изменения скорости электронов $a_0=1$. В этом случае усиление может иметь место в широком интервале длин волн, определяемых условием:

$$x = \frac{1}{2} \frac{\Lambda_p}{\lambda} \left(\frac{c}{v^{(1)}} - \frac{c}{v^{(2)}} \right) < \sqrt{2}.$$

Рис. 2. Изменение действительной (выше горизонтальной оси) и мнимой (ниже горизонтальной оси) частей постоянной распространения γ в зависимости от параметра x в двухлучевой лампе с периодическим изменением скорости электронов.

Это условие связывает минимальную длину волны, при которой еще возможно усиление, с разностью скоростей электронов и пространственным зарядом в потоках. При периодическом изменении скорости электронов рабочий интервал длин волн в основной полосе взаимодействия сужается (поскольку в этом случае $|a_0| < 1$), но одновременно возникают новые полосы взаимодействия, лежащие вблизи длин волн γ_{k+} и γ_{k-} , определяемых формулой (3). Относительная ширина высших полос взаимодействия дается выражением:

$$\Delta\lambda_{k\pm}/\lambda_{k\pm} = (\sqrt{1 + |a_{-k}|} - \sqrt{1 - |a_{-k}|}) 2L/k \Lambda_p. \quad (24a)$$

Она уменьшается по мере увеличения номера полосы.

Следует еще раз отметить, что значения длины волны в высших полосах взаимодействия слабо зависят от величины пространственного заряда в потоках; однако последний, согласно (24), существенно влияет на ширину полос взаимодействия, которая увеличивается при возрастании плотности пространственного заряда и уменьшении плазменной длины волны Λ_p . Характер изменения постоянных распространения волн пространственного заряда в полосах взаимодействия и между ними иллюстрируется рис. 3, на котором указаны три полосы взаимодействия $k=0, 1, 2$ и три пары пространственных гармоник: $n=0, \pm 1$; $m=0, \pm 1$.

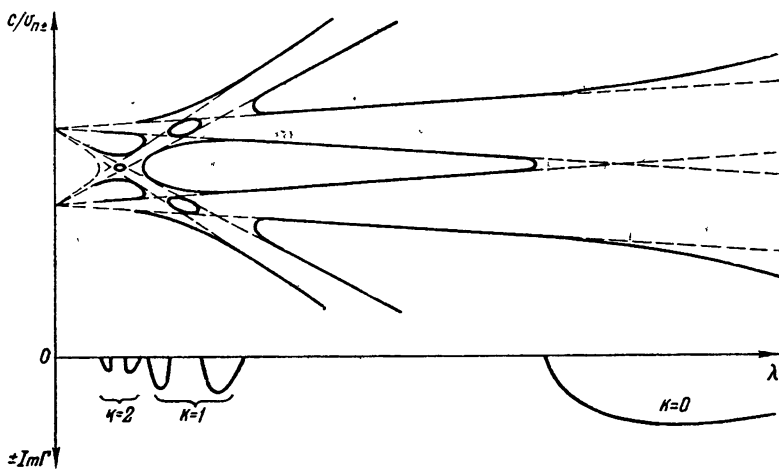


Рис. 3. Дисперсионные характеристики пространственных гармоник двух взаимодействующих электронных потоков. Пунктиром проведены дисперсионные характеристики невзаимодействующих потоков.

Максимальное усиление внутри каждой полосы достигается на длинах волн, несколько отличных от значений $\lambda_{k\pm}$, соответствующих точному синхронизму медленных и быстрых волн пространственного заряда обоих потоков. Эти длины волн определяются условием

$$x^2 = 1 - |a_{-k}|^2/2, \quad (25)$$

вытекающим из (23). При этом (23) дает

$$(\text{Im } \gamma)_{\text{макс}} = |a_{-k}| \sqrt{b_0}/2, \quad (26)$$

Максимальное значение усиления в децибелах на единицу длины имеет величину

$$G = 4,34 |a_{-k}| \sqrt{b_0}. \quad (26a)$$

Формулы (24) и (26) показывают, что эффективность взаимодействия двух электронных пучков на пространственных гармониках тока существенным образом зависит от коэффициентов a_k . Нетрудно установить связь этих коэффициентов с относительными амплитудами пространственных гармоник тока каждого из рассматриваемых электронных потоков. Действительно, в [1,2] показано, что при малом пространственном заряде амплитуды пространственных гармоник тока одиночного электронного потока равны коэффициентам $a_n^{(1,2)}$ разложения (10), а из (10) и (13) следует, что

$$a_k = \sum_n a_n^{(1)} (a_{n-k}^{(2)})^* = \sum_n a_{n+k}^{(1)} (a_n^{(2)})^* \quad (27)$$

Таким образом, величина a_{-k} , характеризующая эффективность взаимодействия двух пучков в k -ой полосе, равна сумме произведений амплитуд пространственных гармоник одного потока на сопряженные значения амплитуд пространственных гармоник второго потока, синхронизованных друг с другом (номера которых отличаются на k).

В приложении 2 приведен расчет коэффициентов a_k для случаев синусоидального и скачкообразного изменения электростатического потенциала вдоль потока.

При синусоидальном изменении потенциала

$$a_k = J_k(\varphi_s/2\pi), \quad (28)$$

где

$$\varphi_s = 2\pi\Delta v^{(1)} (\overline{v^{(1)}})^{-1} [k \pm (L/\Lambda_p^{(1)} + L/\Lambda_p^{(2)})] [1 + \overline{v^{(1)}}/\overline{v^{(2)}} + (\overline{v^{(1)}}/\overline{v^{(2)}})^2], \quad (29)$$

$\Delta v^{(1)}$ — амплитуда изменения скорости электронов в первом (более медленном) потоке, малая по сравнению со средней скоростью этого потока $\overline{v^{(1)}}$.

Так, например, при $\Delta v^{(1)}/\overline{v^{(1)}} = 0,2$ получаем $(\varphi_s)_{\max} \approx 1,2 k \pi$; $a_{\pm 1} \approx 0,3$; $a_{\pm 2} \approx 0,16$ и т. д. При скачкообразном изменении потенциала (рис. 4)

$$|a_k| = |\varphi_c \sin(\varphi_c l_1 l_2 L^{-2} - k \pi l_1 L^{-1}) [\varphi_c^2 l_1 l_2 L^{-2} + k \pi \varphi_c (l_2 - l_1) L^{-1} - (k \pi)^2]^{-1}|, \quad (30)$$

где

$$\varphi_c = \pi [k \pm (L/\Lambda_p^{(1)} + L/\Lambda_p^{(2)})] (\mu - 1) (\mu l_1/L + l_2/L)^{-1}; \quad (31)$$

Рис. 4. Скачкообразное изменение потенциалов электронных потоков.

Зависимость $|a_k|$ от параметра φ_c изображена на рис. 5. Численная оценка возможных значений φ_c показывает, что $|a_{-1}|$ может достигать значений $0,5 \div 0,6$ при изменении скорости электронов вдоль потока в два раза.

3. ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

В обычной дуговой лампе разброс скоростей электронов оказывает существенное влияние на характеристики лампы, в частности, ограничивает возможность уменьшения рабочей длины волны. Для дуговой лампы с периодическим изменением скорости электронов ограничимся приближенной оценкой этого влияния, используя результаты работы [6].

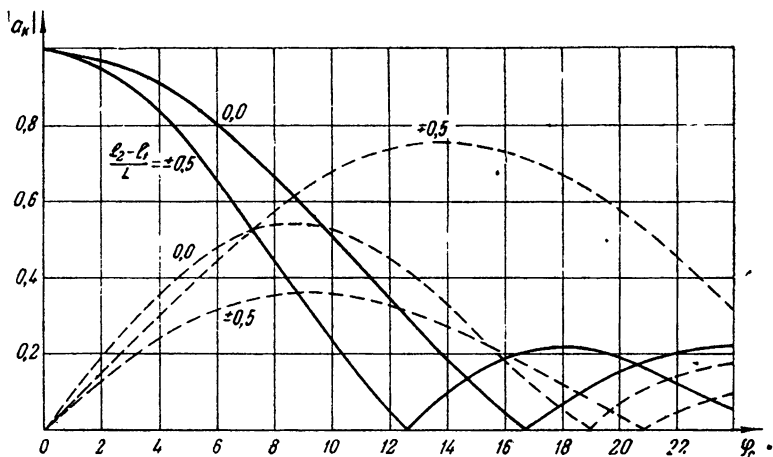


Рис. 5. Изменение параметра $|a_k|$, характеризующего связь между электронными потоками при скачкообразном изменении скорости электронов, в зависимости от параметра φ_c ; сплошные линии для $k = 0$; пунктирные — для $k = \pm 1$.

Как было показано в этой работе, если функция распределения скоростей электронов в потоке не изменяется вдоль оси z и определяется выражением

$$f(z) = \frac{N}{2\pi v_T} \left[\frac{1}{1 - (v - v^{(1)})^2 v_T^{-2}} + \frac{1}{1 - (v - v^{(2)})^2 v_T^{-2}} \right], \quad (32)$$

где N — плотность электронов, v_T — параметр, характеризующий разброс скоростей электронов, то уравнение дисперсии при небольших значениях $v_T \sim v_0^{-2} \delta\omega^{-1}$ принимает вид:

$$\frac{1}{(x+S)^2} + \frac{1}{(x-S)^2} = 1, \quad (33)$$

где

$$S = (\gamma + j\omega v_T v_0^{-2}) v_0 / \omega_p; \quad v_0 = (v^{(1)} + v^{(2)})/2; \\ \omega_p = \sqrt{Ne^2/2m\varepsilon_0}.$$

Уравнение (33) имеет вид обычного дисперсионного уравнения, полученного для строго двускоростного потока, с той разницей, что вместо постоянной распространения γ в него входит величина S , зависящая от разброса скоростей. Естественно допустить, что в рассматриваемом случае электронных потоков, движущихся в периодическом электростатическом поле, разброс скоростей электронов также можно приближенно учесть, вводя в дисперсионное уравнение (22) вместо постоянной распространения γ функцию S , имеющую вид:

$$S = (\gamma + j\overline{v_T^{(1)}} \Gamma_{0k}^2 / \omega_k) b_0^{-1/2}, \quad (34)$$

где $\overline{v_T^{(1)}}$ — некоторое усредненное по периоду значение разброса скоростей электронов в первом пучке.

Из (34) следует, что усиление имеет место только при условии

$$\sqrt{b_0} \operatorname{Im} S > \overline{v_T^{(1)}} \omega_k / (v_{0k})^2, \quad (35)$$

где

$$v_{0k} = \omega_k / \Gamma_{0k} \cong v_0^{(1)}.$$

Учитывая, что $(\text{Im } S)_{\text{макс}} = |a_{-k}|/2$, условие (35) можно записать в виде:

$$\frac{\overline{v_T^{(1)}}}{v_0^{(1)}} \frac{\omega_k}{v_0^{(1)}} \frac{1}{\sqrt{b_0}} < \frac{1}{2} |a_{-k}|. \quad (36)$$

Принимая во внимание выражение (17) для $\sqrt{b_0}$, нетрудно видеть, что условие (36) аналогично соответствующему условию для обычной двулучевой лампы $\omega v_T / \omega_p v_0 < 1/2$, полученному в [6].

Периодическое изменение скорости электронов вносит ряд существенных особенностей в характеристики двулучевого взаимодействия. Наибольший интерес представляет появление высших полос взаимодействия, лежащих вблизи частот, практически не зависящих от величины пространственного заряда пучка.

Можно показать, что аналогичные эффекты возникают и тогда, когда периодически изменяется не скорость электронов, а какие-либо другие параметры электронных потоков или степень их взаимодействия друг с другом и с полем волноводных систем. Анализ этого общего случая будет дан в следующих статьях.

П Р И Л О Ж Е Н И Я

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

Вводя бесконечные матрицы

$$B^{(1,2)} = \| B_{mn}^{(1,2)} \|; \quad A = \| A_{mn} \|; \quad \bar{A} = \| \bar{A}_{mn} \|,$$

где

$$B_{mn}^{(1,2)} = b_{m-n}^{(1,2)} (\Gamma - \Gamma_0^{(1,2)} + 2\pi m/L)^{-1} (\Gamma - \Gamma_0^{(1,2)} + 2\pi n/L)^{-1};$$

$$A_{mn} = a_{m-n}; \quad \bar{A}_{mn} = a_{m-n}^*,$$

можно записать определитель $\Delta(\Gamma)$ в виде определителя блочной матрицы

$$\Delta(\Gamma) = \text{Det} \left\| \begin{array}{cc} E - B^{(1)} & -B^{(1)} \bar{A} \\ -B^{(2)} A & E - B^{(2)} \end{array} \right\|.$$

Здесь E — единичная бесконечная матрица.

Учитывая соотношение $\bar{A} = A^{-1}$, вытекающее из (14), и применяя правила вычисления определителей от блочных матриц [7], получим

$$\Delta(\Gamma) = \text{Det}(E - B^{(1)} - A^{-1} B^{(2)} A) = \text{Det}(E - A B^{(1)} A^{-1} - B^{(2)}).$$

Эти соотношения показывают, что определитель $\Delta(\Gamma)$ имеет в полосе $0 \leq \Gamma < 2\pi/L$ два полюса второго порядка при $\Gamma = \Gamma_0^{(1)}$ и $\Gamma = \Gamma_0^{(2)} + 2\pi k/L$. Поэтому при выполнении соотношений (17) — (19) в разложении определителя можно ограничиться лишь членами, содержащими $(\Gamma - \Gamma_0^{(1)})^{-2}$ и $(\Gamma - \Gamma_0^{(2)} - 2\pi k/L)^{-2}$, что приводит к уравнению (20).

II. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ a_k

Синусоидальное изменение потенциала. Пусть

$$V^{(1,2)}(z) = \bar{V}^{(1,2)} - \Delta V \cos(2\pi z/L).$$

Предполагая $\Delta V \ll \bar{V}^{(1,2)}$ и пренебрегая членами $(\Delta V/\bar{V}^{(1,2)})^2$, для одинаково направленных электронных потоков получим

$$v^{(1,2)}(z) = \bar{v}^{(1,2)} - \Delta v^{(1,2)} \cos(2\pi z/L), \quad (\text{A.1})$$

где $\bar{v}^{(1,2)} = \sqrt{2\eta \bar{V}^{(1,2)}}$ — средняя скорость электронных пучков,

$\Delta v^{(1,2)} = \eta \Delta V / \bar{v}^{(1,2)}$ — амплитуда изменения их скорости. Подставляя (A.1) в (13а) и (13б), приходим к следующему выражению для a_k :

$$a_k = \frac{1}{L} \int_0^L \exp \left\{ j \left[\frac{L}{2\pi} \eta \Delta V (\omega(\bar{v}^{(1)})^{-3} - \omega(\bar{v}^{(2)})^{-3}) \sin(2\pi z/L) - k 2\pi z/L \right] \right\} dz = \\ = J_k(\varphi_s/2\pi),$$

где

$$\varphi_s = \omega L [\Delta v^{(1)} (\bar{v}^{(1)})^{-2} - \Delta v^{(2)} (\bar{v}^{(2)})^{-2}] = 2\pi \frac{L}{\lambda} \frac{\Delta v^{(1)}}{\bar{v}^{(1)}} \frac{c}{v^{(1)}} [1 - (\bar{v}^{(1)}/\bar{v}^{(2)})^3].$$

Учитывая также условие синхронизма (3), получим для φ_s формулу (29). В случае противоположно направленных потоков выражение для a_k остается тем же самым, но скорости $\bar{v}^{(1)}$ и $\bar{v}^{(2)}$ имеют различные знаки.

Скачкообразное изменение потенциала (рис. 4). Производя интегрирование отдельно на первом и втором участках, получим следующее выражение a_k :

$$a_k = \exp[-j(\varphi_c l_1 l_2 L^{-2} - k\pi l_1 L^{-1})] \frac{\varphi_c \sin(\varphi_c l_1 l_2 L^{-2} - k\pi l_1 L^{-1})}{\varphi_c^2 l_1 l_2 L^{-2} + k\pi \varphi_c (l_2 - l_1) L^{-1} - (k\pi)^2},$$

где

$$\varphi_c = (1/v_1^{(1)} + 1/v_2^{(2)} - 1/v_1^{(2)} - 1/v_2^{(1)}) \omega L/2.$$

Пределы изменения φ_c ограничены тем, что скорости электронных потоков связаны условием синхронизации, которое в случае скачкообразного изменения потенциала имеет вид

$$L^{-1} l_1 (c/v_1^{(1)} - c/v_1^{(2)}) + L^{-1} l_2 (c/v_2^{(1)} - c/v_2^{(2)}) = k\lambda/L \pm (\lambda/\Lambda_p^{(1)} + \lambda/\Lambda_p^{(2)}). \quad (\text{A.2})$$

При учете (A.2) найдем

$$\varphi_c = \pi [k \pm (L/\Lambda_p^{(1)} + L/\Lambda_p^{(2)})] \frac{(1/v_1^{(1)} - 1/v_1^{(2)}) - (1/v_2^{(1)} - 1/v_2^{(2)})}{L^{-1} l_1 (1/v_1^{(1)} - 1/v_1^{(2)}) + L^{-1} l_2 (1/v_2^{(1)} - 1/v_2^{(2)})},$$

откуда следует (31).

Для оценки возможных значений φ_c выразим параметр μ через потенциалы пучков. Используя обозначения рис. 4, получим:

$$\mu = \frac{1/\sqrt{V_1^{(1)}} \mp 1/\sqrt{V_1^{(1)} + V}}{1/\sqrt{V_2^{(1)}} \mp 1/\sqrt{V_2^{(1)} + V}} = \mu^{(1)} \frac{1 \mp 1/\sqrt{1 + V/V_1^{(1)}}}{1 \mp 1/\sqrt{1 + V/V_1^{(1)} (\mu^{(1)})^2}}, \quad (\text{A.3})$$

где

$$\mu^{(1)} = \sqrt{V_2^{(1)}/V_1^{(1)}} = v_2^{(1)}/v_1^{(1)} > 1.$$

Верхний знак соответствует однонаправленным электронным потокам, а нижний — потокам, направленным навстречу друг другу. Формула (А.3) показывает, что μ достигает максимального значения $\mu \approx (\mu^{(1)})^3$ при небольшой разнице средних скоростей электронных пучков ($V \ll V_1^{(1)}$) и убывает при увеличении этой разницы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Труды НИИ МРТП, 7(43), 3 (1957).
2. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Электронные волны в периодическом электростатическом поле и их взаимодействие с полем волноводных систем, Сборник докладов Всесоюзной конференции по СВЧ приборам, май 1957 г. (в печати).
3. W. H. Louisell, J. R. Pierce, Proc. IRE, 43, 425 (1955).
4. L. J. Chu, H. A. Haus, Доклад на конференции URSI (1957).
5. S. Bloom, R. W. Peter, RCA Review, 25, 95 (1954).
6. М. И. Родак, ЖТФ, 25, 644 (1955).
7. Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, М., 36, 1954.

Поступила в редакцию
12 мая 1956 г.