ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1958*

ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФЛЮКТУАЦИЙ УКВ РАДИОСИГНАЛА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. А. Семенов, Г. А. Карпеев

В статье приведены результаты теоретической оценки погрешностей, обусловленных конечным интервалом временного усреднения при непрерывном интегрировании и дискретно-выборочном методе усреднения для различного вида корреляционных функций в исследуемом процессе.

Даны результаты оценки оптимальных интервалов усреднения и объема выборки при заданной статистической точности выборочных характеристик.

Приведены экспериментальные результаты статистической оценки флюктуаций амплитуды УКВ радиосигнала (9350 *мгц*), распространяющегося на приземной трассе в зоне прямой видимости.

ВВЕДЕНИЕ

Радиосигнал УКВ диапазона, распространяющийся в условиях реальной тропосферы в силу многих причин, важнейшей из которых является неоднородная структура показателя преломления атмосферы, испытывает случайные колебания как по амплитуде, так и по фазе, т. е. по своей природе является некоторой случайной функцией времени. Одной из важнейших задач при исследовании распространения подобного сигнала является определение его статистических характеристик, а также вопросы точности оценки истинных значений статистических характеристик процесса по их экспериментальным значениям.

В дальнейшем будем считать, что исследуемый процесс является стационарным случайным процессом, и попытаемся произвести оценку интересующих нас параметров. Мы исходим из представлений о стационарном случайном процессе как бесконечной совокупности величин E_i, подчиняющихся некоторому многомерному закону распределения вероятностей

$$P(E_1,E_2,...E_n)\,dE_1 dE_2...dE_n$$

со статистическими параметрами

$$E_{0i}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_i P(E_i)\,dE_i;$$

$$\sigma_{0i}^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(E_i-E_{0i})^2 dE_i; \tag{1}$$

$$R_{ij}^0=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(E_i-E_{0i})(E_j-E_{0j})\,P(E_i,E_j)\;dE_i dE_j/\sigma_{0i}\sigma_{0j}.$$

Однако характеристики (1) стационарного случайного процесса непосредственно из эксперимента получить нельзя, ибо в нашем распоряжении имеется лишь временная запись сигнала (в течение определенного конечного промежутка времени). Из экспериментальных наблюдений можно определить временные характеристики процесса

$$E(T) = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,dt;$$

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{T}\int_0^T [E(t) - E(T)]^2 dt; \qquad (2)$$

$$R(T,\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T [E(t) - E(T)][E(t+\tau) - E(T)]dt/\sigma^2(T),$$

где $E(T), \sigma^2(T), R(T,\tau)$ — соответственно среднее значение, дисперсия и коэффициент автокорреляции величины $E(t)$ на временном интервале $(0, T)$, τ — временной сдвиг. Более того, при исследовании статистической структуры сигнала прибегают к выбору некоторой дискретной совокупности значений $E(t_i)$, которая и подвергается статистическому анализу. При этом сразу же возникает вопрос, на каком временном интервале T и каким образом взять дискретную выборку объема n, чтобы получить экспериментальные характеристики (2), которые с вероятностью, близкой к достоверности, находятся в заданной окрестности точных статистических значений (1).

Вначале мы найдем зависимость статистической точности приближения экспериментальных характеристик (2) к их точному статистическому значению от времени усреднения T при непрерывном интегрировании. Затем перейдем к выяснению роли числа n выборочных значений на данном временном интервале $(0, T)$, после чего найдем оптимальные значения величин n и T, определяемых, с одной стороны, статистической точностью измерений, требующей возможно больших T и n, а, с другой стороны, условиями стационарности процесса и уменьшения трудоемкости вычислительной работы, для которых необходимы возможно меньшие значения T и n.

Сравнение экспериментальных результатов по оценке статистических характеристик флюктуаций УКВ радиосигнала, распространяющегося в статистически неоднородной среде, с результатами выводов теоретического рассмотрения показывает правильность основных предпосылок, положенных в основу теории.

1. ОЦЕНКА ЗАВИСИМОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА ОТ ВРЕМЕНИ УСРЕДНЕНИЯ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ

Пусть $E(t)$ — некоторый стационарный случайный процесс. Рассмотрим выражение

$$u(T) = E(T) - E_0 = \frac{1}{T}\int_0^T [E(t) - E_0]\,dt. \qquad (3)$$

Тогда выражение

$$\overline{u^2(T)} = \overline{\frac{1}{T}\int_0^T [E(t) - E_0]dt \frac{1}{T}\int_0^T [E(t) - E_0]dt} \qquad (4)$$

дает ни что иное, как дисперсию временных средних значений величины $E(t)$ на временном интервале $(0,T)$ (здесь и в дальнейшем черта сверху означает статистическое усреднение).

Заменяя в (4) произведение интегралов двойным интегралом и меняя порядок временного интегрирования и статистического усреднения *, получим

$$\sigma^2_{E(T)}(T) = \overline{u^2(T)} = \frac{\sigma_0^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(t,t')\,dt\,dt', \tag{5}$$

где $R(t,t')$ — коэффициент автокорреляции в исследуемом процессе.

Из (5) по известной дисперсии σ_0^2 в генеральной совокупности и при нормальном распределении величины $E(T)$ получим оценку вероятности нахождения $E(T)$ в некоторой окрестности ΔE величины E_0:

$$P(-\Delta E \leqslant E_0 - E(T) \leqslant \Delta E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta E/\sigma_{E(T)}(T)}^{\Delta E/\sigma_{E(T)}(T)} e^{-\xi^2/2}\,d\xi. \tag{6}$$

Из (5) и (6) видно, что статистический разброс величины $E(T)$ относительно средней E_0 определяется дисперсией σ_0^2 в генеральной совокупности.

Оценим эту величину, зная экспериментальную дисперсию $\sigma^2(T)$. Для этого нам необходимо найти математическое ожидание $\sigma^2(T)$ величины $\sigma^2(T)$ и ее дисперсию $\sigma_\sigma^2(T)$ относительно математического ожидания:

$$\overline{\sigma(T)} = \overline{\frac{1}{T} \int_0^T [E(t) - E(T)]^2\,dt} = \sigma_0^2 - \sigma^2_{E(T)}(T) \tag{7}$$

и

$$\sigma_\sigma^2(T) = [\sigma(T) - \overline{\sigma^2(T)}]^2 = \overline{\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [E(t) - E_0]^2 [E(t') - E_0]^2\,dt\,dt'} -$$

$$- \overline{\frac{2}{T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T [E(t) - E_0]^2 [E(t') - E_0][E(t'') - E_0]\,dt\,dt'\,dt''} + \tag{8}$$

$$+ \overline{\frac{1}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T [E(t) - E_0][E(t') - E_0][E(t'') - E_0][E(t''') - E_0]\,dt\,dt'\,dt''\,dt'''} -$$

$$- [\overline{\sigma^2(T)}]^2.$$

Произведем оценку (8) для случая, когда величины $E(t_i) - E_0 = E_i$ подчиняются многомерному нормальному закону распределения. Используя характеристическую функцию многомерного нормального распределения [1], определяем моменты четвертого порядка, входящие в (8):

* Как показал А. Н. Колмогоров (см. [4], стр. 53), математическое ожидание от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания, т. е.

$$\int_a^b \overline{E(t)}\,dt = \overline{\int_a^b E(t)\,dt},$$

если $|E(t)| < K = \text{const}$ и $E(t)$ интегрируема по Риману. Перемена порядка временного (или пространственного) интегрирования и статистического усреднения широко применяется при исследовании флюктуационных процессов [1,5,6].

$$\overline{\prod_i E_i} = \frac{\partial^4 \Theta}{\prod_i \partial \eta_i}\Bigg|_{\eta_i=0}, \tag{9}$$

где

$$\theta(\eta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum \sigma_i \sigma_h R_{ih} \eta_i \eta_h\right],$$

а индекс i может принимать любые четыре значения из совокупности (1,2,3,4).

Производя подстановку (9) в (8), получим:

$$\sigma_\sigma^2(T) = \frac{\sigma_0^4}{T^2}\int_0^T\int_0^T [1+2R^2(t,t')]dtdt' - \frac{2\sigma_0^4}{T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T [R(t,'t'') + 2R(t,t')R(t',t'')] \times$$
$$\times dt\,dt'\,dt'' + \frac{3\sigma_0^4}{T^4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T R(t,t')R(t'',t''')\,dtdt'dt''dt''' - [\overline{\sigma^2(T)}]^2, \tag{10}$$

где мы использовали условие стационарности процесса, положив

$$\sigma_{01}^2 = \sigma_{02}^2 = \sigma_{03}^2 = \sigma_{04}^2 = \sigma_0^2. \tag{11}$$

Для примера рассмотрим два частных случая, когда автокорреляционная функция задана в виде

$$R_1(t,t') = \exp\left[-\frac{|t-t'|}{a}\right];$$
$$R_2(t,t') = \exp\left[-\frac{(t-t')^2}{a^2}\right]. \tag{12}$$

Тогда из (5), (7) и (10) получим при $R(t,t') = R_1(t,t')$

$$\overline{E(T)} = E_0;$$
$$\sigma_{E(T)}^2(T) = 2\sigma_0^2\frac{a}{T} + 2\sigma_0^2\left(e^{-\frac{T}{a}} - 1\right)\frac{a^2}{T^2};$$
$$\sigma^2(T) = \sigma_0^2\left[1 - 2\frac{a}{T} - 2\left(e^{-\frac{T}{a}} - 1\right)\frac{a^2}{T^2}\right] \tag{13}$$

и при $R(t,t') = R_2(t,t')$

$$\overline{E(t)} = E_0;$$
$$\sigma_{E(T)}^2(T) = 2\frac{\sigma_0^2 a}{T}\int_0^{\frac{T}{a}} e^{-\xi^2}d\xi + \frac{a^2}{T^2}\sigma_0^2\left[e^{-\frac{T^2}{a^2}} - 1\right];$$
$$\overline{\sigma^2(T)} = \sigma_0^2\left[1 - 2\frac{a}{T}\int_0^{\frac{T}{a}} e^{-\xi^2}d\xi - \frac{a^2}{T^2}\left(e^{-\frac{T^2}{a^2}} - 1\right)\right];$$
$$\sigma_\varsigma^2(T) = 4\sigma_0^4\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{T\sqrt{2}}{a}} e^{-\xi^2}d\xi - e^{-\frac{T^2}{4a^2}(1+\theta_1)^2}\int_0^{\frac{T}{2a}} e^{-\xi^2}d\xi\right]\frac{a}{T} + \tag{14}$$
$$+\sigma_0^4\left[-8\int_0^{\frac{T}{2a}(2-\theta)} e^{-\xi^2}d\xi\int_0^{\frac{T}{2a}} e^{-\xi^2}d\xi - 4e^{-\frac{T^2}{4a^2}(1+\theta_1)^2}\left(e^{-\frac{T^2}{4a^2}} - 1\right) +\right.$$

$$+e^{-\frac{2T^2}{a^2}}-1\Bigg]\frac{a^2}{T^2}+\sigma_0^4\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{T\sqrt{2}}{a}}e^{-\xi^2}d\xi\right]\frac{a^3}{T^3}+2\sigma_0^4\left[e^{-\frac{T^2}{a^2}}-1\right]^2\frac{a^4}{T^4} \quad (14)$$

$$(0\leqslant\theta\leqslant 1,\qquad 0\leqslant\theta_1\leqslant 1).$$

Из (13) и (14) видно, что точная оценка статистических характеристик даже для простейшего случая очень громоздка и мало пригодна для практических применений.

Однако при изучении быстрых флюктуаций УКВ радиосигнала корреляционные связи затухают до нуля на интервале в доли и единицы секунд, тогда как время усреднения может быть взято в несколько десятков минут без заметного нарушения условия стационарности процесса. Поэтому в дальнейшем мы положим

$$T/2a\gg 1, \quad (15)$$

что приводит к более простой оценке статистических характеристик процесса. Так, при выполнении (15) из (14) получим:

$$\overline{E(T)}=E_0;\ \sigma^2_{E(T)}(T)\simeq\sqrt{\pi}\,\sigma_0^2\frac{a}{T}-\sigma_0^2\frac{a^2}{T^2};$$

$$\sigma^2(T)\simeq\sigma_0^2\left[1-\sqrt{\pi}\,\frac{a}{T}+\frac{a^2}{T^2}\right]; \quad (16)$$

$$\sigma^2_\sigma(T)\simeq\sqrt{2\pi}\,\sigma_0^4\frac{a}{T}-(2\pi+1)\,\sigma_0^4\frac{a^2}{T^2}.$$

Используя математический аппарат, примененный выше, мы можем оценить выборочный коэффициент корреляции в исследуемом процессе

$$\overline{R_{xy}(T)}\simeq R^0_{xy}\left(\frac{n_{T,a}-1}{n_{T,a}}\right);$$

$$\sigma_R\simeq\left(\sqrt{1+R^{02}_{xy}}-\sqrt{2}\,|R^0_{xy}|\right)/\sqrt{n'_{T,a}}, \quad (17)$$

где

$$R_{xy}(T)=\frac{\int [x(t)-x(T)]\,[y(t)-y(T)]\,dt}{\left\{\int\limits_0^T [x(t)-x(T)]^2dt\int\limits_0^T[y(t)-y(T)]^2dt\right\}^{1/2}};$$

R^0_{xy} — коэффициент корреляции величин x и y в исследуемой генеральной совокупности; $n_{T,a}=\dfrac{T}{\sqrt{\pi a}}$; $n'_{T,a}=\dfrac{\sqrt{2}T}{\sqrt{\pi a}}$; $|R^0_{xy}|$ — абсолютное значение величины R^0_{xy}.

Сравнение статистических характеристик (13) и (14) с характеристиками, полученными для выборок из нормальной совокупности попарно некоррелированных величин [3], показывает, что при достаточно больших N и T/a (где N — число выборочных значений) оценка (13) и (14) эквивалентна оценке теории выборок; при этом $N=\alpha T/a$, где α определяется характером корреляционных связей в исследуемом процессе.

2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДИСКРЕТНО-ВЫБОРОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА

При рассмотрении дискретно-выборочных характеристик процесса возможны два существенно различных подхода. В первом из них дискретные выборки из исследуемого процесса на временном интервале $(0,T)$ берутся таким образом, чтобы полученные при этом характеристики процесса являлись достаточно точным приближением к характеристикам, полученным при непрерывном интегрировании на том же временном интервале $(0,T)$, иными словами, в данном случае дискретно-выборочное суммирование рассматривается как приближенное интегрирование. Подобный подход может показаться на первый взгляд наиболее естественным, однако, он может вести к неоправданно завышенному объему вычислительной работы и пригоден лишь при оценке максимальной статистической точности, которую можно получить на данном временном интервале $(0,T)$. Наиболее целесообразным является второй подход к решению проблемы — вероятностный, который с самого начала учитывает случайную природу исследуемой величины. Именно, считая стационарный случайный процесс бесконечной совокупностью величин E_i, мы из нее делаем бесконечную же выборку, что соответствует непрерывной регистрации (записи) процесса на временном интервале $(0,T)$; из этой выборки, в свою очередь, мы делаем дискретную выборку объема n, где n — некоторое положительное число.

Ясно, что между статистическими характеристиками, полученными из анализа непрерывно распределенной на временном интервале $(0,T)$ величины и из анализа дискретной выборки объема n, существуют вполне определенные связи, ибо как первая, так и вторая представляют некоторую выборку из бесконечной совокупности. Статистическая оценка результатов анализа непрерывно распределенной величины $E(t)$ на временном интервале $(0,T)$ выше точности анализа выборки объема n величин E_i на том же временном интервале $(0,T)$; при этом статистическая точность дискретно-выборочных характеристик с увеличением n асимптотически приближается к статистической точности, полученной при непрерывном интегрировании.

Пусть мы имеем запись случайной величины $E(t)$ на временном интервале $(0,T)$. Разобьем интервал $(0,T)$ на n равных частей через промежутки времени ΔT и возьмем n значений $E(t_i)=E_i$, пронумерованных в порядке их следования во времени. Тогда для выборочных характеристик процесса легко получить выражения

$$\overline{E(T,n)} = E_0;$$

$$\sigma^2_{\overline{E}(T,n)}(T,n) = \sigma_0^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} R_{ij}\right);$$

$$\overline{\sigma^2(T,n)} = \sigma_0^2\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} R_{ij}\right); \qquad (18)$$

$$\sigma^2_{\sigma}(T,n) = \sigma_0^4\left[\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\left(\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} R_{ij}-\frac{4}{n^3}\sum_{i\neq 1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\sum_{k\neq i} R_{ij}R_{ik}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\sum_{k\neq 1}^{n}\sum_{l\neq k}^{n} R_{ij}R_{kl}\right)\right],$$

где R_{ij} — функция корреляции величин E_i и E_j.

Из (18) видно, что только при условии $R_{ij}=0$ и $i \neq j$ статистическая оценка дискретно-выборочных характеристик стационарного случайного процесса эквивалентна оценке, полученной в теории выборок.

Если же $R_{ji} \neq 0$ при $i \neq j$, то оценка (18) может существенно отличаться от оценки теории выборок. Так, если R_{ij} является монотонно убывающей функцией $\tau = t_i - t_j$, то, как видно из структуры выражений (18), при неизменном $n = \frac{T}{\Delta T}$ и возрастающих T и ΔT статистическая точность оценки статистических характеристик процесса монотонно возрастает, приближаясь к оценке теории выборок.

Иными словами, выборка объема n, взятая на большом временном интервале, может дать бóльшую статистическую точность оценки статистических характеристик процесса по сравнению с выборкой бóльшего объема n', взятой на меньшем временном интервале, что имеет первостепенное значение с практической точки зрения.

Исходя из полученных выше результатов и требуемой точности оценки статистических характеристик процесса, мы приходим к условиям, определяющим оптимальные значения T и n:

$$\frac{1}{n_0} = \frac{\Delta T}{T}\,; \quad \text{макс}|R_{ij}| \ll 1, \quad i \neq j, \tag{19}$$

где n_0 определяется требуемой статистической точностью приближения экспериментальных значений статистических характеристик процесса к их точному статистическому значению; ΔT определяется из второго условия (19), ибо $R_{ij} = R[(t_i - t_j)\Delta T]$, при этом T определяется из первого условия.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АМПЛИТУДЫ УКВ РАДИОСИГНАЛА

Оценка статистических характеристик амплитуды УКВ радиосигнала, распространяющегося на приземной трассе, производилась в нескольких направлениях. Методом приближенного интегрирования, т. е. путем разбиения временного интервала T на такие промежутки ΔT, что значения $E(t_i)$ временной записи амплитуды сигнала достаточно точно аппроксимировали данную кривую, оценивалась зависимость статистических характеристик флюктуаций амплитуды сигнала от времени усреднения T. В таблицах 1а и 1б приведены средние значения амплитуды сигнала $E(T,n) = \frac{\Delta T}{T}\sum_{i=1}^{n} E(t_i)$ и ее дисперсии $\sigma^2(T,n)$ как функции времени усреднения. Из таблиц видно, что для статистического установления средних значений необходимо меньшее время усреднения T, чем для установления дисперсий, что вполне согласуется с теоретическими выводами (статистический разброс $E(T,n)$ пропорционален $\sigma_0/T^{1/2}$, в то время как разброс величины $\sigma^2(T,n)$ пропорционален $\sigma_0^2/T^{1/2}$).

При исследовании быстрых флюктуаций амплитуды УКВ радиосигнала время установления статистических характеристик можно принять равным ~ 600 *сек*; при этом разброс средних значений и дисперсий не превышает $5 \div 10\%$.

Результаты оценки зависимости статистических характеристик от числа выборочных значений n на данном временном интервале

Таблица 1а

$\Delta T = 1$ *сек*

$n = T/\Delta T$	$E(T,n)$	$\sigma^2(T,n)$
20	42,9	82
40	44,0	77
60	45,0	77
80	45,2	68
100	45,9	72
120	46,1	79
140	45,8	83
160	46,0	93
180	46,2	93
200	46,0	93
220	46,3	93
240	45,1	92
260	45,9	92
280	45,7	90
300	45,5	91
320	45,4	85
340	45,3	82
360	45,3	81
380	45,1	81
400	45,0	81
420	45,0	78
440	45,1	77
460	45,1	75
480	45,1	74
500	45,1	69
520	45,1	75
540	45,0	74
560	45,1	73
580	45,0	74
600	45,0	73
620	45,1	73
640	45,0	71
660	45,1	71
680	45,1	70
700	45,1	72

Таблица 1б

$\Delta T = 1$ *сек*

$n = T/\Delta T$	$E_1(T,n)$	$E_2(T,n)$	$\sigma_1^2(T,n)$	$\sigma_2^2(T,n)$
10	12,9	35,4	75	55
20	13,4	36,8	140	83
30	13,8	38,2	140	80
40	14,2	38,1	239	83
50	13,1	39,0	204	71
60	14,6	37,4	248	93
70	15,8	37,2	268	85
80	16,3	36,9	229	84
90	16,9	36,7	263	89
120	16,5	34,9	269	107
150	17,4	35,9	286	93
200	18,5	34,4	298	111
250	18,2	34,0	290	112
300	18,0	33,9	295	105
350	18,7	32,8	307	124
400	19,2	32,6	319	121
450	20,0	32,1	351	132
500	19,2	29,4	332	123
550	20,1	29,1	369	127
600	20,1	28,9	375	126
650	20,1	29,1	364	126
700	20,4	29,5	379	122
750	21,5	29,8	412	122
800	21,4	30,9	411	121
850	21,5	29,6	408	124
900	21,7	29,5	410	121

T приведены в таблицах 2 и 3. В таблице 2 даны результаты обработки записи флюктуаций амплитуды УКВ радиосигнала при $T = 900$ *сек* и ΔT, равном соответственно 2, 3, 4, 5 и 10 *сек* при квазичастоте флюктуаций 0,3 *гц*. Результаты для $\Delta T = 1$ *сек* приведены в таблице 1а. Из таблицы видно, что с увеличением ΔT установление статистических характеристик процесса происходит при меньших n, однако, при несколько больших T. При этом различие $E(T,n)$ и $\sigma^2(T,n)$ при $\Delta T_1 = 1$ *сек*, $T = 700$ *сек* и $\Delta T_2 = 10$ *сек*, $T = 900$ *сек* не превышает 5%, тогда как объем вычислительной работы во втором случае уменьшается в 10 раз.

В таблице 3 приведены $E(T,n)$ и $\sigma^2(T,n)$ при $\Delta T = 10$ *сек*, $T = 900$ *сек* для сигнала с квазичастотой 0,1 *гц* (для этого сигнала результаты при $\Delta T = 1$ *сек* приведены в таблице 1б). Разброс значений $E(T,n)$ при $\Delta T_1 = 1$ *сек* и $\Delta T_2 = 10$ *сек* не превышает 5 %, а разброс $\sigma^2(T,n)$ — не более 10%.

Сводные результаты по выяснению зависимости статистических характеристик от T и ΔT (соответственно от T и n) для $\Delta T_1 = 1$ *сек* и $\Delta T_2 = 10$ *сек* приведены в таблице 4. Из таблицы видно, что оценка статистических характеристик при непрерывном интегрировании эквивалентна оценке, полученной из дискретной выборки некоррелированных величин, если только время T достаточно велико. Этот вывод ясен и из чисто статистических соображений. Действительно, при непрерывном интегрировании в вычислении момен-

Таблица 2

ΔT = 2 сек			ΔT = 3 сек			ΔT = 4 сек			ΔT = 5 сек			ΔT = 10 сек		
n	$E(T,n)$	$\sigma^2(T,n)$	n	$E(T,n)$	$\sigma^2(T,n)$	n	$E(T,n)$	$\sigma^2(T,n)$	n	$E(T,n)$	$\sigma^2(T,n)$	n	$E(T,n)$	$\sigma^2(T,n)$
10	42,7	82	10	46,4	55	10	44,0	46	10	45,7	98	10	48,1	125
30	44,0	72	20	47,0	78	20	44,0	58	20	45,8	99	20	47,2	86,3
50	45,7	70	30	46,0	66	30	46,0	68	30	45,6	110	30	47,7	73,8
70	45,8	87	40	47,0	77	40	45,7	81	40	45,6	107	40	46,2	77,0
90	46,8	96	50	46,0	98	50	46,6	80	50	46,6	96	50	45,8	69,0
110	46,8	106	70	46,5	87	60	46,5	78	60	46,6	89	60	45,8	65,0
130	46,2	109	90	46,6	91	70	46,5	81	70	46,3	83	70	45,7	61,3
150	45,9	101	110	46,5	80	80	46,4	73	80	46,1	75	80	46,2	70,0
170	45,7	88	130	45,8	82	90	46,1	70	90	46,3	71	90	46,2	70,0
190	45,7	87	150	46,0	75	100	45,7	71	100	46,1	73	—	—	—
210	45,6	82	170	45,8	77	110	45,8	68	110	46,3	72	—	—	—
230	45,6	76	190	45,8	79	120	45,8	66	120	46,1	73	—	—	—
250	45,5	80	210	45,8	76	130	45,7	71	130	46,0	74	—	—	—
270	45,5	77	230	45,9	74	140	45,9	66	140	45,9	71	—	—	—
290	45,6	79	250	45,7	77	150	45,8	65	150	45,6	75	—	—	—
310	45,7	75	270	45,7	70	160	45,9	65	160	45,7	70	—	—	—
330	45,7	81	—	—	—	170	46,0	65	—	—	—	—	—	—
350	45,7	75	—	—	—	180	44,0	65	—	—	—	—	—	—
370	45,7	77	—	—	—	190	46,0	66	—	—	—	—	—	—
390	45,6	76	—	—	—	200	46,0	65	—	—	—	—	—	—
400	45,6	74	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

тов используются коррелированные величины. По известной величине $E(t)$ в некоторый момент времени $t=t_i$ мы имеем вполне определенное представление о поведении величины $E(t)$ в некоторой окрестности ΔT точки t_i (такой, что $R(\Delta t)\neq 0$). Поэтому множество значений $E(t)$ в окрестности $t_1-\Delta t\leqslant t\leqslant t_i+$ $+\Delta t$ дает тем меньше сведений о статистических свойствах величины $E(t)$, чем больше в этой окрестности $|R(\Delta t)|$.

Таблица 3

$\Delta T = 10 сек$

n	$E_1(T,n)$	$E_2(T,n)$	$\sigma_1^2(T,n)$	$\sigma_2^2(T,n)$
10	15,4	34,9	343	52
20	20,4	32,6	498	114
30	17,9	32,0	360	107
40	19,4	29,8	311	119
50	19,1	29,7	343	119
60	19,6	29,8	368	107
70	20,6	30,3	463	108
80	22,0	31,6	448	102
90	22,2	30,7	415	110

Выбор на временном интервале Δt одного значения $E(t_i)$ из множества $E(t)$ на этом интервале эквивалентен корреляционному учету всего непрерывного спектра и приводит лишь к незначительной потере точности оценки статистических характеристик в исследуемом процессе.

Таблица 4

$E(T,n)$		$\sigma^2(T,n)$		$\sigma(T,n)$		Ошибка $E(T,n)$		Ошибка $\sigma(T,n)$	
E (900,900)	E (900,90)	σ^2 (900;900)	σ^2 (900,90)	σ (900;900)	σ (900;90)	Абсолютная	в %	Абсолютная	в %
45,1	46,2	72,2	69,6	8,5	8,3	1,1	2,4	0,2	2,4
21,7	22,2	410	416	20,3	20,4	0,5	2,3	0,1	0,5
29,5	30,7	122	110	11,0	10,5	1,2	4,1	0,5	4,5
4,27	4,4	28,3	24,4	5,3	4,9	0,2	4,8	0,4	7,5
6,7	6,3	72,4	75	8,5	8,7	0,4	6,0	0,2	2,4
55,8	55,1	158	144	12,4	12,0	0,7	1,3	0,4	3,5
31,2	32,0	770	893	27,8	29,0	0,8	2,5	2,1	7,7

При обработке экспериментальных результатов проверялась справедливость предположения о стационарности исследуемого процесса. При обычных условиях статистические характеристики, полученные на временном интервале в $500 \div 900$ *сек* для различных временных интервалов (в пределах одного сеанса), в пределах статистической точности оценки характеристик процесса совпадают между собой и с характеристиками, полученными на значительно большем временном интервале (порядка 1 часа). Поэтому на временном интервале 900 *сек* процесс приближенно можно считать стационарным.

Таким образом, на основании результатов теоретического и экспериментального анализа зависимости статистических характеристик флюктуаций амплитуды УКВ радиосигнала, распространяющегося на приземных трассах, можно утверждать, что: а) точность оценки статистических характеристик в стационарном случайном процессе при непрерывном интегрировании зависит от времени усреднения и характера корреляционных связей в исследуемом процессе; б) при дискретно-выборочном методе оценки статистических характеристик процесса дискретная выборка объема n некоррелированных величин дает большую статистическую точность оценки, чем выборка того же объема, но на меньшем временном интервале T', таком, что $R_{ij}\neq 0$ при $i\neq j$; при исследовании флюктуаций амплитуды УКВ радиосигнала интервал усреднения $600 \div 900$ *сек* при $\Delta T = 10$ *сек* обеспечивает точность оценки $E(T,n)$ и $\sigma(T,n)$ в $5 \div 10\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
2. И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М.-Л., 1948.
3. В. Романовский, Математическая статистика, ГОНТИ, М.-Л, 1938.
4. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М.-Л., 1936.
5. А М. Обухов, ДАН СССР, 30, 611 (1941).
6. A. G. Booker, W. E. Gordon, Proc. IRE, 38, 401 (1950).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 8 января 1958 г.