РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ*

С. И. Аверков, Л. А. Островский

Рассмотрен случай распространения плоской электромагнитной волны в среде без потерь и без дисперсии величин проницаемостей, которые могут зависеть от одной пространственной координаты и меняться с течением времени по одинаковому закону. Показана возможность параметрического (нерезонансного) явления усиления мощности и изменения частоты колебаний, распространяющихся в такой среде. Обсуждены также некоторые вопросы применимости метода квазистатического приближения при описании процессов в системах с распределенными переменными параметрами.

Вопрос о явлениях, происходящих в колебательных системах с переменными параметрами, давно уже привлекал внимание различных исследователей. При изучении таких систем существенные научные результаты были получены в тридцатых годах в работах Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова и М. А. Леонтовича, Г. С. Горелика, С. М. Рытова [1,2,3,4] и др., рассматривавших в основном квазистационарные системы, размеры которых малы в сравнении с длиной волны возбуждаемых в них колебаний. Распределенные же системы с переменными параметрами до сих пор остаются недостаточно исследованными. Происходящие в них процессы относительно просто описываются лишь в квазистатическом приближении, когда скоростями изменения параметров системы можно пренебречь в сравнении со скоростями изменения векторов полей распространяющейся волны. В этом приближении С. М. Рытовым [5] был рассмотрен общий случай распространения квазимонохроматической квазиплоской электромагнитной волны в неоднородной и переменной во времени анизотропной среде, не обладающей потерями. Однако вопрос о допустимости такого приближения применительно к описанию процессов в различных системах, насколько нам известно, в литературе не обсуждался.

Заметим здесь, что некоторую информацию по этому вопросу можно получить, если воспользоваться теоремой Пойнтинга. Действительно, согласно последней, уже в случае электромагнитного поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ в идеальной недиспергирующей среде, проницаемости которой μ, ε зависят от времени и координат, для величины вектора Умова—Пойнтинга может быть написано выражение

$$\operatorname{div} S = -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \mu}{\partial t} H^2 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} E^2\right\}; \qquad w = \frac{1}{2}(\mu H^2 + \varepsilon E^2). \tag{1}$$

Так как член в фигурных скобках (1) равен отнесенной к единице объема мощности, передаваемой полю за счет совершаемой внешними силами работы при изменении μ и ε среды, то отсюда нетрудно

* Доложено на научной сессии, посвященной Дню радио, Москва, май, 1957 г.

заключить, что временными производными параметров нельзя пренебрегать, если эта работа оказывает существенное влияние на происходящие в системе процессы. Ответ же на вопрос, при каких условиях последнее имеет место, очевидно, может быть получен путем сравнения решений, найденных в квазистатическом приближении, с точными решениями соответствующих электродинамических и других задач.

В связи с этим рассмотрим случай распространения плоской электромагнитной волны в идеальной недиспергирующей среде без потерь, проницаемости которой зависят от времени t и координаты x*.

Предположим, что волна распространяется в направлении оси x. Тогда на основании уравнений Максвелла могут быть написаны равенства**

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial \mu H}{\partial t};\qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial \varepsilon E}{\partial t}, \tag{2}$$

где H и E — не равные нулю компоненты векторов напряженности магнитного и электрического полей волны.

Если в последних равенствах μ и ε являются произвольными функциями переменных x и t, то компоненты E и H в отдельности удовлетворяют дифференциальным уравнениям с частными производными не ниже третьего порядка***, решение которых встречается с большими математическими трудностями. Поэтому представляется целесообразным искать точное решение (2) лишь для некоторых частных законов изменения μ и ε, используя в других случаях приближенные методы решений уравнений Максвелла.

Предположим, что μ и ε изменяются в пространстве и времени по одинаковому закону****.

В этом случае уравнения (2) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial\left\{\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H\right\}}{\partial t}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H}{\partial x} = -\frac{\partial\sqrt{\mu\varepsilon}\,E}{\partial t}. \tag{4}$$

Откуда получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{E+\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H\right\} = -\frac{\partial\left\{\sqrt{\mu\varepsilon}\left(E+\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H\right)\right\}}{\partial t}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{E-\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H\right\} = -\frac{\partial\left\{\sqrt{\mu\varepsilon}\left(E-\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H\right)\right\}}{\partial t}. \tag{6}$$

* Примечание при корректуре. Некоторые вопросы распространения волн в таких средах рассмотрены также Моргенталером [7], о работе которого нам стало известно после направления в печать нашей статьи. В указанной работе, однако, автор не ставил своей целью нахождение строгих решений электродинамических задач с заданными граничными и начальными условиями и, кроме того, ограничивается рассмотрением случая, когда проницаемости среды не зависят от пространственной координаты.

** Заметим здесь, что аналогичными выражениями описывается также распространение электрических колебаний в длинных линиях и плоских акустических волн в неограниченной среде; поэтому приводимые далее выводы полностью применимы и к этим случаям.

*** Отметим, что изменение μ по закону $\mu = \eta(x)\,\xi(t)$, где η и ξ — некоторые произвольные функции, является необходимым и достаточным условием, чтобы E удовлетворяло уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \left(2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\mu + \frac{\partial\mu}{\partial t}\varepsilon\right)\frac{\partial E}{\partial t} + \left(\mu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right) + E\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial x}.$$

**** В подготовляемой к печати статье С. Аверкова и Ю. Хронопуло будет рассмотрен вопрос о поведении диспергирующей системы с одним параметром, зависящим от времени.

Последние уравнения могут быть использованы для нахождения величин $E \pm \sqrt{\mu/\varepsilon} H$. В частности, полагая, что μ и ε зависят только от времени t, находим:

$$E + \sqrt{\mu/\varepsilon}\, H = \frac{2}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Phi_1\left(x - \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right); \tag{7}$$

$$E - \sqrt{\mu/\varepsilon}\, H = \frac{2}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Phi_2\left(x + \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right), \tag{8}$$

где Φ_1 и Φ_2 — некоторые произвольные функции.

Отсюда имеем:

$$E = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\Phi_1\left(x - \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + \Phi_2\left(x + \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)\right]; \tag{9}$$

$$H = \frac{1}{\mu}\left[\Phi_1\left(x - \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) - \Phi_2\left(x + \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)\right]. \tag{10}$$

Последние равенства указывают на возможность существования в среде с переменными параметрами двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях с фазовой скоростью, равной $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Выражения для функций Φ_1 и Φ_2 можно найти из условий решения той или иной конкретной задачи. Найдем $E(x, t)$ и $H(x, t)$ для значений переменных $x \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ в случае линейного закона изменения μ и ε

$$\mu = a(1 - \alpha t); \tag{11}$$

$$\varepsilon = b(1 - \alpha t) \tag{12}$$

(a, b и α — постоянные величины) при граничном и начальных условиях, заданных в виде

$$E(0,t) = A \sin \omega_0 t \tag{13}$$

(где A и ω_0 — постоянные величины),

$$E(x,0) = 0, \tag{14}$$

$$\left\{\frac{\partial E(x,t)}{dt}\right\}_{t=0} = 0. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться, что для удовлетворения начальных условий (14) и (15) функции Φ_1 и Φ_2 при положительных значениях их аргумента должны тождественно равняться нулю. Так как

$x + \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}} > 0$, то, следовательно,

$$\Phi_2\left(x + \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) \equiv 0; \tag{16}$$

если же $x \gg \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, то и

$$\Phi_1\left(x - \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) \equiv 0. \tag{17}$$

Для определения вида функции Φ_1 в случае, если $x < \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, воспользуемся граничным условием (13). Пользуясь им, на основании (9) и (16) находим:

$$A \sin \omega_0 t = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Phi_1\left(-\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right). \tag{а}$$

Обозначая

$$z = -\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\ln(1-\alpha t)}{\alpha\sqrt{ab}} \tag{б}$$

и исключая из этих равенств переменную t, получаем:

$$\Phi_1(z) = A\sqrt{ab}\, e^{\alpha\sqrt{ab}z} \sin \frac{\omega_0}{\alpha}\left\{1 - e^{\alpha\sqrt{ab}z}\right\}, \tag{18}$$

где $z \ll 0$, откуда на основании (9) — (12) находим:

$$E(x,t) = Ae^{\alpha\sqrt{ab}x} \sin \frac{\omega_0}{\alpha}\left\{1 - e^{\alpha\sqrt{ab}x}\left(1 - \alpha t\right)\right\}; \tag{19}$$

$$H(x,t) = \sqrt{a/b}\, E(x, t), \tag{20}$$

где

$$x \ll \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = -\frac{\ln(1-\alpha t)}{\alpha\sqrt{ab}}. \tag{21}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае в среде распространяется лишь одна волна, причем амплитуды и частоты ее векторов E и H увеличиваются по экспоненциальному закону с возрастанием x. Этот результат вполне согласуется с выводом, сделанным раньше при рассмотрении равенства (1). Действительно, как указывалось выше, член в фигурных скобках равенства (1) выражает передаваемую полю мощность за счет работы внешних сил при изменении проницаемостей μ и ε среды. В нашем случае эта работа положительна, так как $d\mu/dt < 0$ и $d\varepsilon/dt < 0$. Последним и объясняется увеличение амплитуд векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ с возрастанием x.

На основании (20) и (19) находим $\overline{S}$ — величину среднего значения вектора Умова—Пойнтинга и ω — частоту распространяющихся колебаний:

$$\overline{S} \simeq \frac{1}{2} A^2 \sqrt{b/a}\, e^{2\alpha\sqrt{ab}x}; \tag{22}$$

$$\omega = \omega_0 e^{\alpha\sqrt{ab}x} *. \tag{23}$$

В этих равенствах величина x является ограниченной, так как в силу (21) $x \ll L_t$, где

$$L_t = \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{24}$$

равно расстоянию, проходимому фронтом волны

* Из (22) и (23) следует, что для данного фронта волны $\tilde{S}\omega^{-2} = \mathrm{const}$. Последнее соотношение остается справедливым и для других законов изменения проницаемостей среды.

$$\varphi \equiv \frac{\omega_0}{\alpha}\left\{1 - e^{\alpha\sqrt{ab}x}\left(1 - \alpha t\right)\right\} = 0$$

за время t.

Будем теперь считать, что при $t=0$ проницаемости среды имеют значения $\mu=\mu_{макс}$ и $\varepsilon=\varepsilon_{макс}$ и что при $t=T$ $\mu=\mu_{мин}$ и $\varepsilon=\varepsilon_{мин}$. В этом случае легко найти:

$$a=\mu_{макс};\ b=\varepsilon_{макс};\ \alpha=\frac{1}{T}\left(1-\frac{\varepsilon_{мин}}{\varepsilon_{макс}}\right),$$

а также

$$L=\int_0^T\frac{dt}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=T\frac{\ln\frac{\varepsilon_{макс}}{\varepsilon_{мин}}}{\left(1-\frac{\varepsilon_{мин}}{\varepsilon_{макс}}\right)\sqrt{\mu_{макс}\varepsilon_{макс}}}. \tag{25}$$

Если $x=L$, то $\bar{S}$ и ω имеют наибольшие значения, равные

$$\bar{S}_{макс}=\bar{S}_0\left(\frac{\varepsilon_{макс}}{\varepsilon_{мин}}\right)^2;\qquad \bar{S}_0=\frac{1}{2}A^2\sqrt{\frac{\varepsilon_{макс}}{\mu_{макс}}} \tag{26}$$

и

$$\omega=\omega_0\frac{\varepsilon_{макс}}{\varepsilon_{мин}}. \tag{27}$$

Так как $S_{макс}$ и L не зависят от частоты ω_0, то отсюда можно сделать вывод, что увеличение мощности колебаний, распространяющихся в среде с переменными величинами μ и ε, представляет собой явление, существенно отличное от „параметрического резонанса", исследованного в работах [1,2,3,4]. Поскольку при ограниченных размерах среды данный эффект увеличения мощности колебаний наиболее сильно выражен (см. (25) и (26)), если

$$T=\tau, \tag{28}$$

где τ — время прохождения колебаний через среду, то нетрудно заключить, что описание в квазистатическом приближении процессов, происходящих в подобных системах, делается непригодным, если T становится сравнимым с τ*.

Для того, чтобы расстояние L, определяемое размерами системы, не было слишком большим, необходимо, очевидно, чтобы параметры среды изменялись достаточно быстро. В настоящее время по имеющимся в литературе данным трудно судить о практически достижимой величине максимальной скорости изменения μ и ε различных веществ. Если ориентировочно положить, что относительная величина параметров среды изменяется в $e\approx 2{,}7$ раза в течение $T=10^{-8}\div 10^{-9}$ *сек***, то в этом случае $\bar{S}_{макс}/\bar{S}_0=7{,}35$; $\omega_{макс}/\omega_0=2{,}72$ и $L=175\div 17{,}5$ *см*. На основании этих данных можно думать о возможности построения (в диапазоне радиоволн) систем

* Если $\tau<T$, то, подставляя в (22) выражение $e^{2\alpha\sqrt{ab}x}$ (справедливое для фронта волны $\varphi=0$, проходящего расстояние x за время τ), находим: $\bar{S}_{макс}/\bar{S}_0=\{1-\alpha\tau\}^{-2}$. Если T велико и, следовательно, α мало, то можно положить

$$\bar{S}_{макс}/\bar{S}_0\approx 1+2\alpha T=1+2(1-\varepsilon_{мин}/\varepsilon_{макс})\tau/T.$$

Так как в квазистатическом случае $\bar{S}_{макс}/\bar{S}_0=1$, то получаемые при использовании квазистатического метода результаты верны поэтому лишь с точностью порядка τ/T.

** Ле-Кро осуществлял импульсное намагничение феррита в течение 10^{-8} *сек* [6].

для обнаружения явления увеличения мощности и изменения частоты распространяющихся колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, Собрание трудов, 2, изд. АН СССР, 1947, стр. 63, 85, 339.
2. А. А. Андронов, Собрание трудов, изд. АН СССР, 14, 1956.
3. Г. С. Горелик, ЖТФ, 4, 1783 (1934); 5, 195 (1935); 5, 489 (1935).
4. С. М. Рытов, Труды Физического института, 2, 1 (1940).
5. С. М. Рытов, ЖТФ, 17, 930 (1947).
6. R. C. LeCraw, J. Appl. Phys., 25, 678 (1954).

Исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 января 1958 г.