ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 4 РАДИОФИЗИКА 1958

К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Б. Н. Гершман

Методом кинетического уравнения рассматривается распространение магнитогидродинамических волн в однородной плазме (в произвольном направлении по отношению к постоянному магнитному полю). Определяется величина затухания, обусловленного влиянием теплового движения частиц.

В большинстве работ по теории распространения магнитогидродинамических волн в плазме используется либо феноменологическое, гидродинамическое приближение [1, 2], либо микроскопическое, квазигидродинамическое приближение [3, 4], основанное на уравнениях для средних скоростей движения частиц. Возможно однако, и более строгое рассмотрение на основе метода кинетического уравнения. Это было сделано в работе автора [5] для частного случая распространения в направлении постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$. В [5] были получены соотношения, уточняющие результаты гидродинамического приближения, так как метод кинетического уравнения позволяет более детально учесть влияние теплового движения частиц в плазме. Однако в большинстве случаев, представляющих, например, интерес для астрофизики, соответствующие поправки к гидродинамическому (или квазигидродинамическому) приближению оказались небольшими, даже в тех условиях, когда фазовые скорости волн были сравнимы со средней тепловой скоростью наиболее медленных частиц в плазме—ионов В то же время нужно иметь в виду, что случай распространения в направлении поля $\boldsymbol{H}_0$ является выделенным, так как здесь обе магнитогидродинамические волны являются чисто поперечными, что не имеет места при неравных нулю значениях угла α между направлениями распространения и поля $\boldsymbol{H}_0$.

Ниже мы рассмотрим распространение магнитогидродинамических волн на основе метода кинетического уравнения при произвольном направлении по отношению к магнитному полю $\boldsymbol{H}_0$. Будет показано, что в сильно нагретой плазме должно иметь место затухание волн, непосредственно не связанное с соударениями между частицами. Это затухание аналогично по своей природе затуханию продольных (плазменных) волн в изотропной плазме [6]. Связанная с указанным затуханием диссипация энергии, переносимой магнитогидродинамическими волнами, по-видимому, должна приниматься во внимание в ряде астрофизических случаев. Подробное обсуждение особенностей распространения магнитогидродинамических волн при учете теплового движения частиц в астрофизических условиях (в атмосферах и внутренних областях звезд и Солнца, в межзвездной среде и др.) будет проведено в другой работе.

1. При исследовании распространения магнитогидродинамических волн мы исходим из системы кинетических уравнений для электронов и ионов и уравнений электродинамики. Рассматриваем распространение малых возмущений, которое описывается системой

линеаризированных уравнений [5]:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}+\boldsymbol{v}_e\Delta_{r_e}f_e-\frac{eE}{m}\Delta_{\boldsymbol{v}_e}F_{0e}-\frac{e}{mc}[\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{H}_0]\Delta_{\boldsymbol{v}_e}f_e=0;$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\boldsymbol{v}_i\Delta_{r_i}f_i+\frac{eE}{M}\Delta_{\boldsymbol{v}_i}F_{0i}+\frac{e}{Mc}[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{H}_0]\Delta_{\boldsymbol{v}_i}f_i=0; \qquad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=-\frac{4\pi e}{c}\int\boldsymbol{v}_e f_e d\tau_{\boldsymbol{v}_e}+\frac{4\pi e}{c}\int\boldsymbol{v}_i f_i d\tau_{\boldsymbol{v}_i}+\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t};\ \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0;$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t};\ \operatorname{div}\boldsymbol{E}=-4\pi e\int f_e d\tau_{\boldsymbol{v}_e}+4\pi e\int f_i d\tau_{\boldsymbol{v}_i}.$$

В системе (1.1) $\boldsymbol{r}_e$ и $\boldsymbol{r}_i$—координаты электронов и ионов, $\boldsymbol{v}_e$ и $\boldsymbol{v}_i$ — их скорости, m и M — массы, $-e$ и $+e$—заряды электрона и иона, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$—самосогласованные электрическое и магнитное поля. Предполагается, что в плазме имеются только электроны и однократно ионизированные положительные ионы одного сорта; соударения между частицами не учитываются. Равновесные функции распределения по скоростям для электронов и ионов F_{0e} и F_{0i} в (1.1) далее считаются максвелловскими с одной и той же температурой у электронов и ионов T:

$$F_{0e}=N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T}\right);\quad F_{0i}=N\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{Mv_i^2}{2\varkappa T}\right), \qquad (1.2)$$

где N — не зависящая от координат концентрация электронов, равная в силу квазинейтральности концентрации ионов, $\varkappa$—постоянная Больцмана. Функции f_e и f_i в (1.1) представляют собой малые отклонения распределений электронов и ионов от равновесных значений F_{0e} и F_{0i} (т. е. $|f_e|\ll F_{0e}$ и $|f_i|\ll F_{0i}$).

При распространении в однородной плазме переменные $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, f_e и f_i можно разложить в интегралы Фурье по координатам (например, $f_e=\int f_{ek}e^{ikr_e}d\tau_k$) и перейти к уравнениям для определенных фурье-составляющих, характеризуемых заданным значением волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Для решения системы уравнений, полученной после указанного перехода, можно применить операционный метод, подобно тому, как это делалось Ландау [6] при исследовании продольных колебаний плазмы и было применено при решении аналогичных задач другими авторами [5, 7–9].

Если в неограниченном объеме плазмы в начальный момент времени $t=0$ задать равновесные распределения электронов и ионов $f_e(\boldsymbol{v}_e, t=0)$ и $f_i(\boldsymbol{v}_i, t=0)$, то асимптотический характер изменения переменных во времени определяется законом e^{pt}, где $p=-i\omega-\gamma$— комплексная величина; при этом ω определяет угловую частоту, а γ — декремент затухания волны (величина p является переменной, сопряженной времени t при преобразовании Лапласа). В результате решения системы уравнений при использовании преобразования Лапласа можно найти дисперсионное уравнение, определяющее связь между величинами p и волновым вектором $\boldsymbol{k}$, из рассмотрения которого можно выяснить свойства волн, распространяющихся в плазме. Нам представляется излишним приводить здесь вывод дисперсионного уравнения с учетом движения как электронов, так и ионов, поскольку это уравнение можно получить путем очевидного обобщения уже полученного ранее [7] дисперсионного уравнения при учете только движения электронов. Это обобщение в конечном счете сводится к тому, что к каждому из членов, входящих в дисперсионное уравнение при учете движения электронов, нужно добавить подобный член, связанный с движением ионов и получающийся из первого путем замены заряда и массы электронов на заряд и массу ионов. Опираясь на результаты вычислений, проведенных в работе [7], и только что сделанные замечания, мы можем записать дисперсионное уравнение в форме

$$\begin{vmatrix} E_1[A_1]-1 & E_1[A_2] & E_1[A_3] \\ E_2[A_1] & E_2[A_2]-1 & E_2[A_3] \\ E_3[A_1] & E_3[A_2] & E_3[A_3]-1 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.3}$$

где элементы детерминанта $E_j[A_k]$ ($j=1, 2, 3$; $k=1, 2, 3$) определяются соотношениями

$$E_1[A_k] = \frac{4\pi e}{p(c^2k^2+p^2)}\{(c^2k^2\sin^2\alpha+p^2)(I_{1e}[A_k]-I_{1i}[A_k])+c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha\,(I_{3e}[A_k]- \\ - I_{3i}[A_k])\};$$

$$E_2[A_k] = \frac{4\pi ep}{c^2k^2+p^2}(I_{2e}[A_k]-I_{2i}[A_k]); \tag{1.4}$$

$$E_3[A_k] = \frac{4\pi e}{p(p^2+c^2k^2)}\{c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha\,(I_{1e}[A_k]-I_{1i}[A_k])+(c^2k^2\cos^2\alpha+p^2)\times \\ \times(I_{3e}[A_k]-I_{3i}[A_k])\}.$$

Выпишем теперь значения величин $I_{je}[A_k]$, соответствующих учету движения электронов (см. формулы (18) из работы [7]):

$$I_{3e}[A_3] = -\frac{2\pi\varkappa T}{m\omega_H}K_e\int_0^{2\pi}\int_C \frac{\exp[\varepsilon_e\varphi-\delta_e(1-\cos\varphi)]}{\exp 2\pi\varepsilon_e-1}v_{ze}^2\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)d\varphi\, dv_{ze};$$

$$I_{3e}[A_2] = -I_{2e}[A_3] = -\frac{\pi i\varkappa^2T^2k\sin\alpha}{m^2\omega_H^2}K_e\int_0^{2\pi}\int_C\frac{\exp[\varepsilon_e\varphi-\delta_e(1-\cos\varphi)]}{\exp 2\pi\varepsilon_e-1}\times \\ \times(1-e^{-i\varphi})(1-e^{i\varphi})v_{ze}\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)d\varphi\, dv_{ze};$$

$$I_{3e}[A_1] = I_{1e}[A_3] = \frac{\pi\varkappa^2T^2k\sin\alpha}{m^2\omega_H^2}K_e\int_0^{2\pi}\int_C\frac{\exp[\varepsilon_e\varphi-\delta_e(1-\cos\varphi)]}{\exp 2\pi\varepsilon_e-1}\times \\ \times(1+e^{i\varphi})(1-e^{-i\varphi})v_{ze}\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)d\varphi\, dv_{ze}; \tag{1.5}$$

$$I_{1e}[A_2] = -I_{2e}[A_1] = -\frac{\pi i\varkappa^2T^2}{m^2\omega_H}K_e\int_0^{2\pi}\int_C\frac{\exp[\varepsilon_e\varphi-\delta_e(1-\cos\varphi)]}{\exp 2\pi\varepsilon_e-1}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})[1- \\ -\delta_e(1-\cos\varphi)]\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)d\varphi\, dv_{ze};$$

$$I_{1e}[A_1] = -\frac{\pi\varkappa^2T^2}{m^2\omega_H}K_e\int_0^{2\pi}\int_C\frac{\exp[\varepsilon_e\varphi-\delta_e(1-\cos\varphi)]}{\exp 2\pi\varepsilon_e-1}\{(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\times \\ \times[1-\delta_e(1-\cos\varphi)]+\delta_e e^{i\varphi}(1-e^{-i\varphi})^2\}\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)d\varphi\, dv_{ze};$$

$$I_{2e}[A_2] = -\frac{\pi\varkappa^2T^2}{m^2\omega_H}K_e\int_0^{2\pi}\int_C \frac{\exp[\varepsilon_e\varphi - \delta_e(1-\cos\varphi)]}{\exp 2\pi\varepsilon_e - 1}\{(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})[1-\delta_e(1-\cos\varphi)] -$$

$$-\delta_e e^{i\varphi}(1-e^{-i\varphi})^2\}\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)d\varphi\, dv_{ze}.$$

В этих соотношениях $\varepsilon_e = -\frac{p+ikv_{ze}\cos\alpha}{\omega_H}$, $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$ — гирочастота электронов $K_e = -\frac{eN}{\varkappa T}\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}$ и

$$\delta_e = \frac{\varkappa T}{m}\frac{k^2}{\omega_H^2}\sin^2\alpha. \tag{1.6}$$

Буква C в интегралах (1.5) означает, что контур интегрирования по v_{ze} проходит от $-\infty$ до $+\infty$ с обходом снизу всех особенностей подынтегральных выражений, лежащих в плоскости комплексного переменного v_{ze}. Замена интегрирования вдоль действительной оси интегрированием по контуру типа контура C является характерной при применении операционного метода [6], когда задача о распространении решается в конкретной постановке с определенными начальными условиями. Можно было бы записать формулы типа $I_{ji}[A_k]$ ($j=1, 2, 3$; $k=1, 2, 3$), которые отражают учет движения ионов. Однако в целях экономии места мы этого делать не будем, так как значения каждого из интегралов можно получить из соответствующих формул (1.5) заменой m на M, $-e$ на $+e$ и гирочастоты электронов ω_H на $-\Omega_H = -eH_0/Mc$ (Ω_H — гирочастота ионов). В формулы для $I_{ji}[A_k]$ войдет аналогичный δ_e (1.6) параметр

$$\delta_i = \frac{\varkappa T}{M}\frac{k^2}{\Omega_H^2}\sin^2\alpha. \tag{1.7}$$

Как и ранее, интегрирование по переменной v_{zi} следует проводить вдоль контура с обходом особенностей подынтегрального выражения снизу.

Дальнейшие упрощения в интегралах $I_{je}[A_k]$ (1.5) и в аналогичных интегралах $I_{ji}[A_k]$ возможны для достаточно сильных магнитных полей, когда

$$\delta_e \ll 1; \quad \delta_i \ll 1. \tag{1.8}$$

Эти неравенства, первое из которых фактически является следствием второго, выполняются в большинстве случаев, для которых возможны приложения данной теории. Последнее из неравенств (1.8) можно написать в форме $\frac{\varkappa Tk^2}{M\Omega_H^2}\sin^2\alpha \ll 1$. Если рассматривать случай не очень малых углов α ($\sin\alpha \sim 1$), то имеем условие $\frac{\varkappa T}{M\omega^2}k^2\frac{\omega^2}{\Omega_H^2} \sim \left(\frac{v_i}{v_ф}\right)^2\frac{\omega^2}{\Omega_H^2} \ll 1$, где $v_i = \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}$ — средняя тепловая скорость ионов, $v_ф = \omega/k$ — фазовая скорость. В то же время из квазигидродинамического рассмотрения распространения волн в плазме при учете движения как электронов, так и ионов следует, что нормальные волны совпадают с магнитогидродинамическими волнами при условии $\omega \ll \Omega_H$ [3, 4]. Таким образом, при немалых значениях угла α неравенства (1.8) могут удовлетворяться, когда фазовая скорость волн сравнима или даже несколько больше средней тепловой скорости ионов, не говоря уже о больших значениях фазовой скорости. Это утверждение еще в большей степени справедливо для малых углов α.

При выполнении неравенств (1.8) подынтегральные выражения в (1.5) можно разложить в ряды по степеням δ_e, а в аналогичных интегралах $I_{ji}[A_k]$ провести разложение по степеням δ_i и выполнить интегрирование по углу φ [7]. Оставляя только основные члены, существенные для дальнейшего, приближенно получаем:

$$
\begin{aligned}
& I_{3e}[A_3] = -\frac{2\pi eN}{m} J_{2e}; \quad I_{3i}[A_3] = \frac{2\pi eN}{M} J_{2i};\\
& I_{3e}[A_2] = -I_{2e}[A_3] = -\frac{ik\sin\alpha\, eN}{m\omega_H} J_{1e};\\
& I_{3i}[A_2] = -I_{2i}[A_3] = -\frac{ik\sin\alpha\, eN}{M\Omega_H} J_{2i};\\
& I_{3e}[A_1] = I_{1e}[A_3] = \frac{k\sin\alpha\, eN}{2m\omega_H}\left(J_{1e}^{(-)} - J_{1e}^{(+)}\right);\\
& I_{3i}[A_1] = I_{1i}[A_3] = \frac{k\sin\alpha\, eN}{M\Omega_H}\left(J_{1i}^{(+)} - J_{1i}^{(-)}\right);\\
& I_{1e}[A_2] = -I_{2e}[A_1] = -\frac{ieN}{2m}\left(J_{0e}^{(-)} - J_{0e}^{(+)}\right);\\
& I_{1i}[A_2] = -I_{2i}[A_1] = \frac{ieN}{2M}\left(J_{0i}^{(+)} - J_{0i}^{(-)}\right);\\
& I_{1e}[A_1] = -\frac{eN}{2m}\left(J_{0e}^{(+)} + J_{0e}^{(-)}\right); \qquad I_{1i}[A_1] = \frac{eN}{2M}\left(J_{0i}^{(+)} + J_{0i}^{(-)}\right);\\
& I_{2e}[A_2] = -\frac{eN}{2m}\left[J_{0e}^{(+)} + J_{0e}^{(-)} + 4\delta_e J_{0e}\right];\\
& I_{2i}[A_2] = \frac{eN}{2M}\left[J_{0i}^{(+)} + J_{0i}^{(-)} + 4\delta_i J_{0i}\right].
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

При получении этих соотношений были учтены неравенства (1.8) и условие

$$|p| \ll \Omega_H, \tag{1.10}$$

которое для слабозатухающих волн ($p \simeq -i\omega$) означает, что частота волны ω много меньше гирочастоты ионов Ω_H (и, разумеется, частоты ω_H). Вычисление величин $I_{ej}[A_k]$ и $I_{ij}[A_k]$ сводится к суммированию значений следующих интегралов:

$$
\begin{aligned}
& J_{0e} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}} \int_C \frac{1}{p + ikv_{ze}\cos\alpha} \exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right) dv_{ze};\\
& J_{0i} = \sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}} \int_C \frac{1}{p + ikv_{zi}\cos\alpha} \exp\left(-\frac{Mv_{zi}^2}{2\varkappa T}\right) dv_{zi};\\
& J_{0e}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}} \int_C \frac{1}{p \pm i\omega_H + ikv_{ze}\cos\alpha} \exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right) dv_{ze};\\
& J_{0i}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}} \int_C \frac{1}{p \pm i\Omega_H + ikv_{zi}\cos\alpha} \exp\left(-\frac{Mv_{zi}^2}{2\varkappa T}\right) dv_{zi};
\end{aligned}
$$

$$J_{1e}=\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}\int\limits_C \frac{v_{ze}}{p+ikv_{ze}\cos\alpha}\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)dv_{ze};$$

$$J_{1i}=\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}\int\limits_C \frac{v_{zi}}{p+ikv_{zi}\cos\alpha}\exp\left(-\frac{Mv_{zi}^2}{2\varkappa T}\right)dv_{zi};$$

$$J_{1e}^{(\pm)}=\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}\int\limits_C \frac{v_{ze}}{p\pm i\omega_H+ikv_{ze}\cos\alpha}\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)dv_{ze};\qquad (1.11)$$

$$J_{1i}^{(\pm)}=\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}\int\limits_C \frac{v_{zi}}{p\pm i\Omega_H+ikv_{zi}\cos\alpha}\exp\left(-\frac{Mv_{zi}^2}{2\varkappa T}\right)dv_{zi};$$

$$J_{2e}=\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\int\limits_C \frac{v_{ze}^2}{p+ikv_{ze}\cos\alpha}\exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T}\right)dv_{ze};$$

$$J_{2i}=\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\int\limits_C \frac{v_{zi}^2}{p+ikv_{zi}\cos\alpha}\exp\left(-\frac{Mv_{zi}^2}{2\varkappa T}\right)dv_{zi}.$$

2. Ниже в разделах 2 и 3 мы рассмотрим два частных случая. Предположим сначала, что выполняется условие

$$|p/k|\gg\sqrt{\varkappa T/m}\cos\alpha. \qquad (2.1)$$

При этом, как будет показано ниже, волны являются слабозатухающими, и для углов, не слишком близких к $\alpha=\pi/2$, из (2.1) следует неравенство $\omega/k\gg\sqrt{\varkappa T/m}$, означающее, что фазовая скорость волн намного превосходит среднюю тепловую скорость электронов и, естественно, скорость ионов.

Каждый из интегралов по контуру C в соотношениях (1.11) можно свести к сумме интеграла вдоль действительной оси и с интегралом вокруг особой точки [6]. При интегрировании вдоль действительной оси можно (в соответствии с условием (2.1)) представить знаменатели в подынтегральных выражениях (1.11) для J_{0e}, J_{1e} и J_{0e} в виде рядов по степеням $kv_{ze}\cos\alpha/p$, а в интегралах J_{2i}, J_{1i} и J_{0i}—в виде рядов по степеням $kv_{zi}\cos\alpha/p$. В других интегралах аналогичные разложения проводятся по степеням $\frac{kv_{ze}\cos\alpha}{p\pm i\omega_H}$ или $\frac{kv_{zi}\cos\alpha}{p\pm i\Omega_H}$.

В результате приближенно получаем:

$$J_{0e}=\frac{1}{p}-\frac{k^2}{p^3}\frac{\varkappa T}{m}\cos^2\alpha+\frac{1}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right);$$

$$J_{0i}=\frac{1}{p}-\frac{k^2}{p^3}\frac{\varkappa T}{M}\cos^2\alpha+\frac{1}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{M\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right);$$

$$J_{0e}^{(\pm)}=\frac{1}{p\pm i\omega_H}-\frac{\varkappa Tk^2}{m(p\pm i\omega_H)^3}\cos^2\alpha+\frac{1}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{m(p\pm i\omega_H)^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right);$$

$$J_{0i}^{(\pm)}=\frac{1}{p\pm i\Omega_H}-\frac{\varkappa Tk^2}{M(p\pm i\Omega_H)^3}\cos^2\alpha+\frac{1}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{M\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{M(p\pm i\Omega_H)^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right);$$

$$J_{1e}=-\frac{i\varkappa Tk\cos\alpha}{mp^2}+\frac{ip}{k^2\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right);\qquad (2.2)$$

$$J_{1i}=-\frac{i\varkappa Tk\cos\alpha}{Mp^2}+\frac{ip}{k^2\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{M\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right);$$

$$J_{1e}^{(\pm)} = -i\frac{\varkappa Tk\cos\alpha}{m(p\pm i\omega_H)^2} + \frac{i\pi(p\pm i\omega_H)}{k^2\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}\exp\left(\frac{m(p\pm i\omega_H)^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right);$$

$$J_{1i}^{(\pm)} = -i\frac{\varkappa Tk\cos\alpha}{M(p\pm i\Omega_H)^2} + \frac{i\pi(p\pm i\Omega_H)}{k^2\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}\exp\left(\frac{M(p\pm i\Omega_H)^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right);$$

$$J_{2e} = \frac{1}{2\pi p} - \frac{3\varkappa T k^2\cos^2\alpha}{2\pi m p^3} - \frac{\pi p^2}{k^3\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right);$$

$$J_{2i} = \frac{1}{2\pi p} - \frac{3\varkappa T k^2\cos^2\alpha}{2\pi M p^3} - \frac{\pi p^2}{k^3\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right).$$

Подставив значения интегралов (2.2) в (1.9), переходим к величинам $E_j[A_k]$ (см. (1.4)), которые входят в дисперсионное уравнение (1.3). При этом сразу же пренебрежем некоторыми малосущественными членами. Так, в соотношениях (2.2) мы опустим члены, содержащие экспоненциальные множители $\exp\left(\frac{m(p\pm i\omega_H)^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)$ и $\exp\left(\frac{M(p\pm i\Omega_H)^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)$, значения которых будут весьма малы (в этом легко убедиться, если помимо (2.1) учесть условие $|p|\ll\Omega_H$; см. (1.10)). Кроме того, можно опустить и слагаемые, содержащие множители $\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)$*, оставив в то же время слагаемые, содержащие $\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)$. Поступая таким образом, мы получаем возможность в первом приближении найти величину затухания, связанного с влиянием хаотического теплового движения частиц на упорядоченное волновое движение.

Расчет величины подобного затухания может быть проведен только методом кинетического уравнения, в то время как характер влияния теплового движения на скорость распространения волн может быть в основных чертах выяснен в рамках более простого квазигидродинамического рассмотрения [3, 10]. Поэтому ниже основное внимание будет сосредоточено на вычислении декремента затухания волн. Заметим, что в случае распространения вдоль направления магнитного поля H_0 ($\alpha=0$) [5] декремент затухания магнитогидродинамических волн оказался пропорциональным фактору $\exp\left(-\frac{M\Omega_H^2}{2\varkappa Tk^2}\right)$. Так как далее пренебрегаем вкладом подобных, как правило, ничтожно малых членов, то из полученных ниже формул должно следовать, что при $\alpha=0$ затухание отсутствует ($\gamma=0$).

Для величин $E_j[A_k]$ (1.4) с учетом только что сделанных замечаний и после некоторых преобразований и пренебрежений малыми членами (при использовании условий (1.8) и (1.10)) получаем:

$$E_1[A_1] = -\frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\frac{c^2k^2\sin^2\alpha+p^2}{c^2k^2+p^2};$$

$$E_1[A_2] = \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\left\{\frac{(c^2k^2\sin^2\alpha+p^2)}{c^2k^2+p^2}\frac{p}{\Omega_H} + \frac{\Omega_H}{p}\frac{c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha}{c^2k^2+p^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[-\frac{\varkappa T}{mp^2}k^2\sin\alpha\cos\alpha + \frac{p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right]\right\};$$

* Напомним, что $p=-i\omega-\gamma$ и при этом $\omega\gg\gamma$. Тогда в соответствующий член будет входить множитель $\exp\left(-\frac{M\omega^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)$, который при выполнении условия (2.1) ничтожно мал.

$$E_1[A_3] = -\frac{\omega_{0e}^2}{c^2k^2+p^2} c^2k^2 \sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{1}{p^2} - \frac{3\varkappa T}{m}\frac{k^2\cos^2\alpha}{p^2} - \right.$$
$$\left.- \frac{2\pi^2 p}{k^3\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}^3 \exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right];$$
$$E_2[A_1] = -\frac{\omega_{0i}^2}{c^2k^2+p^2}\frac{p^3}{\Omega_H^3};$$
$$E_2[A_2] = -\frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\frac{p^2}{c^2k^2+p^2}\left[1+\frac{4\varkappa T k^2}{Mp^2} + \sqrt{\frac{2\pi\varkappa T}{m}}\frac{m}{M}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\frac{k}{p}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right];$$
$$E_2[A_3] = \frac{\omega_{0i}^2}{c^2k^2+p^2}\frac{p}{\Omega_H}\left[\frac{\varkappa T}{mp^2}k^2\cos\alpha\sin\alpha - \frac{p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right]; \tag{2.3}$$
$$E_3[A_1] = -\frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\frac{c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha}{c^2k^2+p^2};$$
$$E_3[A_2] = \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\left\{\frac{c^2k^2\sin\alpha\cos\alpha}{c^2k^2+p^2}\frac{p}{\Omega_H} + \frac{\Omega_H}{p}\frac{c^2k^2\cos^2\alpha+p^2}{c^2k^2+p^2}\left[-\frac{\varkappa T}{mp^2}k^2\cos\alpha\sin\alpha+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right]\right\};$$
$$E_3[A_3] = -\frac{\omega_{0e}^2}{c^2k^2+p^2}(c^2k^2\cos^2\alpha+p^2)\left[\frac{1}{p^2} - \frac{3\varkappa T}{m}\frac{k^2\cos^2\alpha}{p^4} - \frac{2\pi^2 p}{k^3\cos^3\alpha}\times\right.$$
$$\left.\times\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}^3\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right].$$

В этих соотношениях $\omega_{0e} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$ и $\omega_{0i} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{M}}$ — собственные частоты колебаний плазмы для электронов и ионов.

Обозначая $q = \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2} = \frac{4\pi N M c^2}{H_0^2}$, подставим полученные формулы (2.3) в детерминант (1.3). Раскрывая этот детерминант, после некоторых упрощений приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$-\omega_{0e}^2\left[\frac{1}{p^2} - \frac{2\pi^2 p}{k^3\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}^3\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right]\left\{qp^2\left[1+\sqrt{\frac{2\pi\varkappa T}{m}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{m}{M}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\frac{k}{p}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right]+c^2k^2+p^2\right\}\left(c^2k^2\cos^2\alpha+qp^2+p^2\right)-\omega_{0e}^2\times$$
$$\times\frac{q^2p^6}{\Omega_H^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{2\pi^2 p}{k^3\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}^3\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right]-\left\{qp^2\left[1+\sqrt{\frac{2\pi\varkappa T}{m}}\times\right.\right.$$

$$\times \frac{m}{M}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\frac{k}{p}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\Big]\Big(qc^2k^2\sin^2\alpha+qp^2+c^2k^2\Big)+ \tag{2.4}$$

$$+\left(q^2p^2c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha\right)\left[-\frac{\varkappa T}{mp^2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\pi p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]\Bigg\}-q\omega_{0i}^2\left[-\frac{\varkappa T}{mp^2}k^2\sin\alpha\cos\alpha+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}\frac{\pi p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]\left\{\left[-\frac{\varkappa T}{mp^2}k^2\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\pi p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]\left(qp^2+c^2k^2\cos^2\alpha+p^2\right)+\frac{p^2}{\Omega_H^2}c^2k^2\sin\alpha\cos\alpha\right\}=0.$$

Уравнение (2.4) можно решать методом последовательных приближений. Напомним, что $p=-i\omega-\gamma$, где ω—частота, а γ—декремент затухания волны. Это затухание, как будет подтверждено результатом, в случае (2.1) является слабым ($\gamma\ll\omega$); поэтому в первом приближении полагаем $p=-i\omega$. Тогда из (2.4) получаем (пренебрегая слагаемыми, содержащими экспоненту):

$$\frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}(c^2k^2-q\omega^2-\omega^2)(c^2k^2\cos^2\alpha-q\omega^2-\omega^2)-\frac{\omega_{0e}^2q^2\omega^4}{\Omega_H^2}- \tag{2.5}$$

$$-\left[(c^2k^2-q\omega^2-\omega^2)(c^2k^2q\sin^2\alpha-q\omega^2-c^2k^2)-\frac{\varkappa T}{m}k^4q^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right]-q\omega_{0i}^2\times$$

$$\times\frac{\varkappa T}{m\omega^2}k^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\left[-\frac{\varkappa T}{m\omega^2}k^2(c^2k^2\cos^2\alpha-q\omega^2-\omega^2)+\frac{\omega^2}{\Omega_H^2}c^2k^2\right]=0.$$

Это уравнение можно значительно упростить, если учесть, что скорость распространения магнитогидродинамических волн, как правило, много меньше скорости света c, т. е.

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=n^2\gg1, \tag{2.6}$$

где n—показатель преломления волны. Из этого условия, в частности, следует, что $q=\dfrac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}=\dfrac{4\pi c^2NM}{H_0^2}\gg1$, так как параметр q равен квадрату показателя преломления n^2 при распространении в направлении поля H_0 (без учета тепловых поправок) [1–4]. Кроме того, будем считать выполненным условие $\dfrac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}\cos^2\alpha\gg q\sin^2\alpha$, которое можно записать в форме

$$\frac{\omega_H\Omega_H}{\omega^2}\cos^2\alpha\gg\sin^2\alpha. \tag{2.7}$$

Этим условием в силу выполнения неравенств $\omega_H\gg\omega$ и $\Omega_H\gg\omega$ исключается распространение волн в очень узкой области углов α, близких к $\alpha=\pi/2$ (где $\cos\alpha\to0$).

При учете приведенных выше условий легко выделить основную часть в уравнении (2.5). Главную роль будет играть первый член в (2.5), из условия обращения в нуль которого получается дисперсионное уравнение. Имея в виду, что $n^2\gg1$ и $q\gg1$, приходим к выводу, что в плазме возможно распространение двух типов нормальных волн, дисперсионные уравнения которых имеют вид:

$$c^2k^2-q\omega^2=0; \tag{2.8}$$

$$c^2k^2\cos^2\alpha-q\omega^2=0. \tag{2.9}$$

Эти волны, которые мы ниже будем называть соответственно волнами типа „1“ и „2“, распространяются с фазовыми скоростями $v_{\text{ф}1}$ и $v_{\text{ф}2}$, причем

$$v^2_{\text{ф}1} = \frac{c^2}{q} = \frac{H_0^2}{4\pi NM} \simeq \frac{H_0^2}{4\pi\rho}; \tag{2.10}$$

$$v^2_{\text{ф}2} = \frac{c^2}{q}\cos^2\alpha = \frac{H_0^2}{4\pi NM}\cos^2\alpha = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\cos^2\alpha, \tag{2.11}$$

где $\rho = N(M+m) \simeq NM$ — плотность ионизированного газа, приближенно равная плотности ионной компоненты.

Соотношения (2.10) — (2.11) представляют собой известные формулы для скоростей распространения магнитогидродинамических волн в несжимаемой жидкости, которые можно получить и при гидродинамическом рассмотрении [2—4]. Кроме того, в рамках гидродинамического приближения при учете сжимаемости должна существовать третья нормальная волна, фазовая скорость которой сравнима или меньше скорости звука (скорость звука для плазмы — порядка скорости теплового движения ионов, т. е. порядка $\sqrt{\varkappa T/M}$). В рассматриваемом приближении эта волна выпадает из нашего рассмотрения, так как мы заранее предположили, что фазовая скорость волн превышает среднюю скорость теплового движения электронов. В соотношениях (2.8) — (2.11) не учитываются тепловые поправки к величине скорости распространения, так как в условиях, которыми мы задались в этом разделе, эти поправки (зависящие от температуры T) по величине не превышают погрешности, которые имеются в связи с использованием упрощающих предположений (1.10) и (2.6).

Приведенные результаты (2.8)—(2.11), полностью соответствующие результатам гидродинамического приближения, были ограничены условием (2.7), согласно которому их нельзя относить к распространению в очень узкой области углов вблизи $\alpha = \pi/2$. Фактически эта особенность, которую легко выявить на основе квазигидродинамического рассмотрения [10], относится только к волне типа „2“ (см. (2.9)), а для волны „1“ можно по-прежнему пользоваться соотношениями (2.8) и (2.10). При условии, обратном (2.7), когда

$$\frac{\omega_H \Omega_H}{\omega^2}\cos^2\alpha \ll 1, \tag{2.12}$$

для определения дисперсионного уравнения волны „2“ нужно учитывать первый и второй члены в уравнении (2.5). При этом получается приближенное соотношение $c^2k^2 = -\omega_{0e}^2$, откуда для квадрата показателя преломления $n_2^2 = -\omega_{0e}^2/\omega^2$. Таким образом, здесь n_2^2 является большой по модулю отрицательной величиной, в то время как при выполнении условия (2.7) значения n_2^2 ($n_2^2 = q/\cos^2\alpha$) всегда положительны. Еще раз подчеркнем, что указанная особенность в распространении имеет место для волны „2“ в очень узкой (практически ничтожно малой) области углов α вблизи $\alpha = \pi/2$ (в связи с этим см. [10]).

Таким образом, учет теплового движения при условии (2.1) не приводит с существенным поправкам для скоростей распространения магнитогидродинамических волн. Несколько иначе обстоит дело с затуханием волн, которое, несмотря на относительно небольшую величину, является новым эффектом и может проявиться при прохождении волной большого пути в ионизированном газе. Для вычисления декремента затухания подставим в (2.6) $p = -i\omega - \gamma$, предполагая, что $\gamma \ll \omega$. Тогда в первом приближении, как и ранее, получаем уравнение (2 5), а во втором приближении (приравнивая нулю совокупность мнимых членов в (2.4)) после некоторых упрощений с учетом (2.5) приходим к соотношению

$$2\gamma/\omega\left[c^2k^2(c^2k^2\cos^2\alpha - q\omega^2) + q\omega^2(c^2k^2 - q\omega^2)\right] =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(c^2k^2 - q\omega^2)(qc^2k^2\sin^2\alpha - q\omega^2)}{(\beta_e n\cos\alpha)^3} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\beta_e n q\omega_{0i}^2 \times \right. \tag{2.13}$$

$$\left. \times (c^2k^2\cos^2\alpha - q\omega^2)\right]\exp\left(-\frac{1}{2\beta_e^2 n^2\cos^2\alpha}\right),$$

где $\beta_e = \sqrt{\frac{\varkappa T}{mc^2}}$ — отношение средней тепловой скорости электронов к скорости света c.

Для определения величины γ в первом приближении достаточно воспользоваться соотношениями (2.8) и (2.9). Для волны „1" с учетом равенства $c^2k^2 = q\omega^2$ (2.8) получаем:

$$2\gamma_1/\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta_e n\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\frac{m}{M}\exp\left(-\frac{1}{2\beta_e^2 n^2\cos^2\alpha}\right). \tag{2.14}$$

Согласно (2.9), для волны типа „2" $c^2k^2\cos^2\alpha = q\omega^2$ и, следовательно,

$$2\gamma_2/\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha}{(\beta_e n\cos\alpha)^3}\left(\frac{m}{M\cos^2\alpha} - \frac{\omega^2}{\Omega_H^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2\beta_e^2 n^2\cos^2\alpha}\right). \tag{2.15}$$

Мы видим, что даже в случае, когда величина $\beta_e n\cos\alpha$ в (2.14)—(2.15) не очень мала по сравнению с единицей * (иначе γ будет ничтожно малой величиной из-за наличия экспоненциального фактора $\exp\left(-\frac{1}{2\beta_e^2 n^2\cos^2\alpha}\right)$), затухание будет слабым ($\gamma \ll \omega$) в силу наличия в предэкспоненциальных частях множителей m/M для волны „1" и $\frac{m}{M\cos^2\alpha} - \frac{\omega^2}{\Omega_H^2}$ для волны „2". Первый множитель, очевидно, всегда мал; что же касается второго множителя, то условие его малости совпадает с неравенством (2.7). (Последнее неравенство было использовано при переходе от (2.4) к (2.13).)

Таким образом, при указанных ограничениях даже в том случае, когда фазовая скорость становится сравнимой со скоростью теплового движения электронов ($\beta_e n \leqslant 1$), нельзя ожидать сильного затухания ($\gamma \sim \omega$), при котором амплитуда колебаний заметно уменьшается за один период. (В задаче о возбуждении волн, скажем, при возбуждении волн на плоской границе раздела этому утверждению соответствовала бы невозможность сильного поглощения на расстояниях порядка одной длины волны.) В то же время даже в рассмотренном в этом разделе случае затухание вряд ли целесообразно полностью игнорировать, так как по истечении достаточно-

---

* Наше рассмотрение является более точным, когда $\beta_e n\cos\alpha$ очень малая величина. Однако для ориентировочных выводов можно использовать приведенные формулы и для не слишком малых $\beta_e n\cos\alpha$, но при условии $\beta_e n\cos\alpha < 1$.

го промежутка времени (или при прохождении большого пути) этот механизм затухания может дать значительный вклад.

Затухание, определяемое формулами (2.14) — (2.15), исчезает при переходе к случаю продольного распространения ($\alpha = 0$), что находится в соответствии с замечанием на стр. 9. Как уже указывалось, при точном рассмотрении декремент затухания $\gamma \neq 0$ и при $\alpha = 0$; однако соответствующие формулы для γ содержат множители $\exp\left(-\frac{M\Omega_H^2}{2\varkappa T k^2}\right)$, в силу чего для затухания получаются весьма малые значения. Характер убывания γ_1 и γ_2 при малых α определяется, согласно (2.14) — (2.15), фактором $\sin^2\alpha$.

При переходе к поперечному распространению (при $\alpha \to \pi/2$) более простая картина имеет место для волны „1". Для этой волны, согласно (2.8), показатель преломления не зависит от угла α ($n_1^2 = q$), и в соответствии с (2.14)' при $\alpha \to \pi/2$ затухание исчезает ($\gamma \to 0$). Для волны типа „2", как было указано, имеется особенность в очень узкой области углов вблизи $\alpha = \pi/2$. Если не подходить очень близко к углу $\alpha = \pi/2$, так, чтобы условие (2.7) выполнялось, то для n_2^2 имеем соотношение $n_2^2 = \frac{q}{\cos^2\alpha}$ (см. (2.9)). При этом ограничении и была получена формула (2.15), из которой при выполнении соотношений (2.1) и (2.7) следует, что $\gamma \ll \omega$. При этом для волны „2" экспоненциальный множитель в (2.15) $\exp\left(-\frac{1}{2q\beta_e^2}\right)$ не зависит от угла α. Таким образом, при приближении к углу $\alpha = \pi/2$ (не ближе, чем это позволяет условие (2.7)) затухание волны „2" при прочих равных условиях не уменьшается. Более того, оно возрастает по закону $1/\cos^2\alpha$, но остается малым ($\gamma \ll \omega$) при всех α, согласующихся с условием (2.7).

В узкой области углов, непосредственно примыкающих к $\alpha = \pi/2$ и определяемых условием (2.12), $n_2^2 < 0$ и велико по абсолютной величине. В этом случае волна не может проникать в плазму, и поэтому говорить о затухании за счет влияния теплового движения частиц не имеет смысла (в связи с этим см. [11]).

3. Рассмотрим другой по сравнению с разделом 2 частный случай. Предположим, что выполняются следующие неравенства:

$$|p/k| \ll \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \cos\alpha, \tag{3.1}$$

$$|p/k| \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}} \cos\alpha. \tag{3.2}$$

Для слабозатухающих волн и для углов, не слишком близких к $\alpha = \pi/2$, эти условия означают, что фазовая скорость волн намного превосходит среднюю тепловую скорость ионов и в то же время много меньше средней тепловой скорости электронов. При этом по-прежнему предполагаются выполненными условия (1.8), справедливые в достаточно сильном поле.

Следуя по тому же пути, что и в предыдущем разделе, мы при получении дисперсионного уравнения сначала вычислим величины $I_j[A_k]$ (1.5), (1.9). Входящие в (1.9) интегралы J_{0i}, J_{1i}, $J_{1i}^{(\pm)}$ $J_{0i}^{(\pm)}$ и J_{2i} (см. также (1.11)), а также интегралы $J_{0e}^{(\pm)}$ и $J_{1e}^{(\pm)}$ вычислять заново не нужно. Здесь в соответствии с условиями (3.1), (1.8) и (1.10) можно использовать старые формулы из (2.2). Сказанное, однако, не относится к интегралам J_{0e}, J_{1e}, и J_{2e}, для вычисления которых используем формулу (см. [9,12])

$$\int\limits_C \frac{e^{-y^2}}{z-y}\,dy = -\pi i + 2\sqrt{\pi}\,z + 0(z^2) \quad \text{при } |z| \ll 1. \tag{3.3}$$

В этой формуле интегрирование проводится по контуру, проходящему от $-\infty$ до $+\infty$ с обходом в плоскости комплексного переменного y особенности $y = z$ снизу. Заметим, что интеграл (3.3) по контуру можно разбить на интеграл вдоль действительной оси (при этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{z-y}\,dy \simeq \pi i\ \ 2\sqrt{\pi}\,z$, если $|z| \ll 1$; соответствующие вычисления приведены в [12]) и на интеграл по окружности, стянутой к окрестности полюса при $z = y$ (для последнего при $|z| \ll 1$ получаем значение $-2\pi i$). Суммирование значений обоих интегралов и приводит к формуле (3.3). Нетрудно показать, что каждый из интегралов J_{0e}, J_{1e}, J_{2e} после несложных преобразований может быть приведен к интегралу (3.3). При этом для параметра z имеем $z = -\frac{ip}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m}{2\varkappa T}}$. В результате получаем:

$$\begin{aligned}
J_{0e} &= \frac{1}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}\left(1 - \frac{2p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}\right);\\
J_{1e} &= \frac{1}{ik\cos\alpha}\left(1 - \frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\right);\\
J_{2e} &= \frac{mp}{2k^2\cos^2\alpha\pi\varkappa T}\left(1 - \frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Подстановка в (1.9) значений интегралов для J_{0i}, J_{1i}, J_{2i}, $J^{(\pm)}_{0e,i}$ и $J^{(\pm)}_{1e,i}$ из (2.2) и значений интегралов J_{0e}, J_{1e}, и J_{2e}, согласно формулам (3.4), приводит к соотношениям для $I_j[A_k]$ (1.5):

$$\begin{aligned}
I_{3e}[A_3] &= -\frac{eN}{\varkappa T}\,\frac{p}{k^2\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\right);\\
I_{3i}[A_3] &= \frac{2\pi eN}{M}\left[\frac{1}{2\pi p} - \frac{3\varkappa T k^2\cos^2\alpha}{2\pi p^3 M} - \frac{\pi p^2}{k^3\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\exp\left(-\frac{Mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right];\\
I_{3e}[A_2] &= -I_{2e}[A_3] = -\frac{eN}{m\omega_H}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(1 - \frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}\right);\\
I_{3i}[A_2] &= -I_{2i}[A_3] = \frac{eNk\sin\alpha}{M\Omega_H}\left[-\frac{\varkappa T}{Mp^2}\,k\cos\alpha + \frac{\pi p}{k^2\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}\times\right.\\
&\qquad\left.\times\exp\left(-\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right];\\
I_{3e}[A_1] &= I_{1e}[A_3] = \frac{2k^2\cos\alpha\sin\alpha\, eN\varkappa Tp}{m^2(\omega_H^2 + p^2)^2};\\
I_{3i}[A_1] &= I_{1i}[A_3] = -\frac{2k^2\cos\alpha\sin\alpha\, eN\varkappa Tp}{M^2(\Omega_H^2 + p^2)^2};\\
I_{1e}[A_2] &= -I_{2e}[A_1] = \frac{eN\omega_H}{m(p^2 + \omega_H^2)};
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$I_{1i}[A_2] = -I_{2i}[A_1] = \frac{eN\Omega_H}{M(p^2+\Omega_H^2)};$$

$$I_{1e}[A_1] = -\frac{eN}{m}\frac{p}{p^2+\omega_H^2};\quad I_{1i}[A_1] = \frac{eN}{M}\frac{p}{p^2+\Omega_H^2};$$

$$I_{2e}[A_2] = \frac{eN}{m}\left(-\frac{p}{p^2+\omega_H^2} - \frac{2\delta_e}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\right);$$

$$I_{2i}[A_2] = \frac{eN}{M}\left\{\frac{p}{p^2+\Omega_H^2} + 2\delta_i\left[\frac{1}{p} + \frac{\pi}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa T k^2\cos^2\alpha}\right)\right]\right\}.$$

Как и в предыдущем разделе, мы опускаем все слагаемые, содержащие экспоненциальные множители типа $\exp\left(\frac{M(p\pm i\Omega_H)^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)$ и $\exp\left(\frac{m(p\pm i\omega_H)^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)$, но теперь мы уже не пренебрегаем членами, содержащими множители $\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)$. Что касается множителей $\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)$, то они не содержатся в (3.5), так как в силу условия (3.1) было положено, что $\exp\left(\frac{mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\simeq 1$.

После подстановки полученных выражений для $I_j[A_k]$ (3.5) в формулы (1.4) и некоторых упрощений получаем:

$$E_1[A_1] = -\frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\frac{c^2k^2\sin^2\alpha+p^2}{c^2k^2+p^2};$$

$$E_1[A_2] = \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\left\{\frac{c^2k^2\sin^2\alpha+p^2}{c^2k^2+p^2}\frac{p}{\Omega_H} + \frac{\Omega_H}{p}\frac{c^2k^2\sin\alpha\cos\alpha}{c^2k^2+p^2}\left[-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\right.\right.$$
$$\times\left(1-\frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\right) + \frac{\varkappa T}{Mp^2}k^2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{M\pi}{2\varkappa T}}\times$$
$$\left.\left.\times\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]\right\};$$

$$E_1[A_3] = \frac{\omega_{0i}^2c^2k^2\sin\alpha\cos\alpha}{c^2k^2+p^2}\left[-\frac{M}{\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\left(1-\frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\right) - \frac{1}{p^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi^2p}{k^3\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right];$$

$$E_2[A_1] = -\frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\frac{p^3}{(c^2k^2+p^2)\Omega_H};$$

$$E_2[A_2] = -\frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\frac{p^2}{(c^2k^2+p^2)}\left[1+\frac{2\varkappa T}{M}\frac{k}{p}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}} + \frac{2\varkappa T}{Mp^2}\times\right.$$
$$\left.\times k^2\sin^2\alpha + \frac{2\varkappa Tk\sin^2\alpha}{Mp\cos\alpha}\sqrt{\frac{M\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right];$$

$$
\begin{aligned}
E_2[A_3] = {} & \frac{\omega_{0i}^2}{c^2k^2+p^2}\frac{p}{\Omega_H}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(1-\frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\right)-\frac{\varkappa T}{Mp^2}k^2\cos\alpha\sin\alpha+\right.\\
& \left.+\frac{p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{M\pi}{2\varkappa T}}\exp\left(-\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right];\\
E_3[A_1] = {} & -\frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\frac{c^2k^2\sin\alpha\cos\alpha}{c^2k^2+p^2};\\
E_3[A_2] = {} & \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_H^2}\left(\frac{c^2k^2\sin\alpha\cos\alpha}{c^2k^2+p^2}\frac{p}{\Omega_H}+\frac{\Omega_H}{p}\frac{c^2k^2\cos^2\alpha+p^2}{c^2k^2+p^2}\right)\left[-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\right.\\
& \times\left(1-\frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}\right)+\frac{\varkappa T}{Mp^2}k^2\cos\alpha\sin\alpha-\frac{p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{M\pi}{2\varkappa T}}\times\\
& \left.\times\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right];\\
E_3[A_3] = {} & \frac{\omega_{0i}^2}{c^2k^2+p^2}(c^2k^2\cos^2\alpha+p^2)\left[-\frac{M}{\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\left(1-\frac{p}{k\cos\alpha}\times\right.\right.\\
& \left.\left.\times\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T}}\right)+\frac{2\pi^2p}{k^3\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Подставляя значения $E_j\,[A_k]$ (3.6) в детерминант (1.3) и раскрывая последний, приходим к дисперсионному уравнению

$$
\begin{aligned}
& \left\{qp^2\left[1+\frac{2\varkappa T}{M}\frac{k^2}{p^2}\sin^2\alpha+\frac{2\varkappa Tk\sin^2\alpha}{Mp\cos\alpha}\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}+\frac{2\varkappa Tk\sin^2\alpha}{Mp\cos\alpha}\times\right.\right.\\
& \left.\left.\times\sqrt{\frac{\pi M}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]+c^2k^2+p^2\right\}\left\{-\omega_{0i}^2(c^2k^2+p^2)(c^2k^2\cos^2\alpha+\right.\\
& +qp^2+p^2)\left[\frac{M}{\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\left(1-\frac{p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}\right)+\frac{1}{p^2}-\frac{2\pi^2p}{k^3\cos^3\alpha}\times\right.\\
& \left.\left.\times\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]-qc^4k^4\sin^2\alpha\right\}-q\omega_{0i}^2\,(c^2k^2\cos^2\alpha+qp^2+\\
& +p^2)^2\left[\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}\left(1-\frac{2p}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}\right)+\frac{2p\sin^2\alpha}{k\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{\pi M}{2\varkappa T}}\times\right.\\
& \left.\times\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]+2q^2p^2c^4k^4\sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(1-\frac{T}{k\cos\alpha}\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}\right)+\right.\\
& \left.+\frac{p\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{\pi M}{2\varkappa T}}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]-q^3p^4c^2k^2\left[\frac{Mp^2}{k^2\varkappa T\cos^2\alpha}\left(1-\frac{p}{k\cos\alpha}\times\right.\right.\\
& \left.\left.\times\sqrt{\frac{\pi m}{2\varkappa T}}\right)-\frac{2\pi^2p^3}{k^3\cos^3\alpha}\sqrt{\frac{M}{2\pi\varkappa T}}^{\,3}\exp\left(\frac{Mp^2}{2\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}\right)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Это уравнение мы также решаем методом последовательных приближений. Имея в виду, что $p=-i\omega-\gamma$, и предполагая затухание слабым, в первом приближении получаем:

$$\left[-q\omega^2\left(1-\frac{2\varkappa Tk^2}{M\omega^2}\sin^2\alpha\right)+c^2k^2-\omega^2\right](c^2k^2+p^2)\left[\omega_{0i}^2(c^2k^2\cos^2\alpha-q\omega^2-\omega^2)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{M}{\varkappa Tk^2\cos^2\alpha}+qc^2k^2\sin^2\alpha\right]+q\omega_{0i}^2(c^2k^2\cos^2\alpha-q\omega^2-\omega^2)(c^2k^2+p^2)\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+$$
$$+2q^2\omega^2c^4k^4\sin^2\alpha-q^3\omega^6\frac{Mc^2}{\cos^2\alpha\varkappa T}=0. \tag{3.9}$$

При выполнении условий (2.6) и (3.2) можно выделить в уравнении (3.9) наиболее существенную часть. Для магнитогидродинамических волн двух типов получаем следующие дисперсионные уравнения:

$$c^2k^2-q\omega^2\left(1-\frac{3\varkappa T}{M}\frac{k^2}{\omega^2}\sin^2\alpha\right)=0; \tag{3.10}$$

$$c^2k^2\cos^2\alpha-q\omega^2=0. \tag{3.11}$$

Первая из волн (волна „1“) распространяется со скоростью, определяемой из отношения

$$v_{\text{ф}1}^2=\frac{H_0^2}{4\pi\rho}+\frac{3\varkappa T}{M}\sin^2\alpha. \tag{3.12}$$

Этот результат качественно соответствует гидродинамическому приближению, хотя количественно с ним полностью не совпадает. В связи с этой формулой заметим, что если плазму рассматривать как идеальный газ, то давление равно $p=2N\varkappa T$, а скорость звука в изотермическом случае $u_0=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T}=\sqrt{\frac{2\varkappa T}{M}}$. Таким образом, фазовую скорость волны $v_{\text{ф}1}$ можно найти из формулы $v_{\text{ф}1}=\sqrt{v_{\text{м}}^2+\frac{3}{2}u_0^2\sin^2\alpha}$, где $v_{\text{м}}$ — скорость магнитогидродинамической волны в направлении магнитного поля. Такая же формула, но без множителя 3/2 [2,4], получается из гидродинамического рассмотрения при учете сжимаемости, если учесть условие $v_{\text{м}}^2\gg u_0^2$ (нами же фактически было предположено, что $v_{\text{м}}^2\gg u_0^2\sin^2\alpha$; см. (3.2)).

Для волны „2“, как и ранее, получаем, что $v_{\text{ф}2}^2=\frac{H_0^2}{4\pi\rho}\cos^2\alpha$.

Отыскание тепловых поправок для этой волны не представляет существенного интереса. В силу условия (3.1) из нашего рассмотрения исключается область в непосредственной близости от угла $\alpha=\pi/2$. Для углов, близких к $\alpha=\pi/2$, но таких, что условие (3.1) еще не нарушается, не возникает особенностей, подобных рассмотренной в предыдущем разделе (см. неравенство (2.7)).

Изучение третьей нормальной волны, которая получается в гидродинамическом приближении при учете сжимаемости (для этой волны при $v_{\text{м}}^2\gg u_0^2$ фазовая скорость равна $v_{\text{ф}3}\simeq u_0\cos\alpha$), выходит за пределы применимости нашего рассмотрения, так как условие (3.2) несовместно с соотношением $v_{\text{ф}3}=\omega/k=u_0\cos\alpha$.

Вычисление декремента затухания проводится, исходя из (3.8), тем же методом, что и в предыдущем разделе (в предположении, что $\gamma \ll \omega$). Для волн „1“ и „2“ (см. (3.10) — (3.11)) получаем формулы

$$\frac{2\gamma_1}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin^2\alpha\left[\frac{\beta_i^2 n^2}{\beta_e n\cos\alpha} + \frac{5\beta_i n}{\cos\alpha}\exp\left(-\frac{1}{2\beta_i^2 n^2\cos^2\alpha}\right)\right]; \quad (3.13)$$

$$\frac{2\gamma_2}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^2}{\Omega_H^2}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + 3\omega^2/\Omega_H^2\cos^2\alpha}\left[\frac{\beta_i^2 n^2}{\beta_e n\cos\alpha} + \frac{\beta_i n(\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\exp\left(-\frac{1}{2\beta_i^2 n^2\cos^2\alpha}\right)\right]. \quad (3.14)$$

Рассмотрим формулу (3.13). Мы видим, что затухание определяется двумя членами. Первый из них, как правило, должен быть небольшим, так как, согласно (3.1), $\beta_e n\cos\alpha \gg 1$, и для углов, не слишком близких к $\alpha \simeq \pi/2$, в соответствии с (3.2), $\beta_i^2 n^2 \ll 1$. Величина второго слагаемого в силу наличия фактора $\exp\left(-\frac{1}{2\beta_i^2 n^2\cos^2\alpha}\right)$ очень сильно зависит от того, насколько малыми берутся значения $\beta_i n\cos\alpha$. Хотя наше рассмотрение и не применимо при $\beta_i n\cos\alpha \sim 1$, но все-таки качественно можно заключить, что затухание волны „1“ в этом случае будет значительным ($\gamma \sim \omega$). Затухание волны при немалых углах $\alpha(\sin^2\alpha \gg \omega^2/\Omega_H^2)$ будет менее значительно, так как в этом случае в (3.14) имеется дополнительный множитель ω^2/Ω_H^2, который в силу (1.10) мал по сравнению с единицей. При малых углах α ($\alpha \leqslant \omega/\Omega_H$) γ_1 и γ_2 сравнимы по величине; однако в этом случае оба декремента затухания будут малы (из за множителя $\sin^2\alpha$), и при переходе к продольному распространению затухание вообще исчезает.

Как было оговорено, строго при $\alpha=0$ $\gamma_{1,2} \neq 0$, однако при выполнении условий (1.8) затухание здесь крайне незначительно. Полный переход к случаю $\alpha = \pi/2$ в условиях, принятых в этом разделе, невозможен, так как это противоречит (3.1). Если же значения угла α приближаются к $\alpha = \pi/2$ (в пределах применимости неравенства (3.1)), то это наиболее эффективно может отразиться на величине второго слагаемого в (3.13). Первое слагаемое в (3.13) при приближении к $\alpha = \pi/2$ несколько возрастает, но этот рост ограничен условием $\beta_e n\cos\alpha \gg 1$.

Таким образом, проведенное в разделах 2 и 3 рассмотрение двух частных случаев, определяемых соответственно условиями (2.1) и (3.1) — (3.2), показывает, что соотношения для фазовой скорости магнитогидродинамических волн или совпадают с результатами гидродинамического приближения, или весьма близки к последним (см. формулы (2.10) — (2.11) и (3.12)). В то же время кинетическое рассмотрение дает возможность найти величину не связанного с соударениями специфического затухания, характеризуемого декрементом γ. При выполнении неравенства (2.1) это затухание, отнесенное к одному периоду колебаний, невелико. Для волны „1“ $\gamma_1/\omega \ll m/M$ (см. (2.14)). Для волны „2“ при углах α, не слишком близких к $\alpha = \pi/2$, затухание будет еще менее значительным. Затухание может быть более существенным при выполнении условий (3.1) — (3.2), когда для волны „1“ получаем сравнительно слабое ограничение на величину затухания $\gamma_1/\omega \ll 1$. Однако для волны „2“ и в этом случае затухание должно быть весьма малым (последнее определяется степенью малости отношения ω^2/Ω_H^2). При переходе к продольному распространению затухание, при учете условий (1.8), которые, как правило, хорошо выполняются, становится весьма малым во всех случаях.

В заключение автор выражает благодарность В. Л. Гинзбургу за просмотр рукописи и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Альфвен, Космическая электродинамика, ИЛ, М., 1952.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
3. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **21**, 789 (1951).
4. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
5. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 453 (1953).
6. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).
7. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
8. А. И. Ахиезер, Л. Э. Паргаманик, Уч. зап. ХГУ, **27**, 75 (1948).
9. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **31**, 642 (1956).
10. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Н. Г. Денисов, УФН, **61**, 561 (1957).
11. Б. Н. Гершман, М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, 3, 19 (1958).
12. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, **21**, 1262 (1951).

Исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 17 февраля 1958 г.

Примечание при корректуре. В последнее время в печати появились две работы, посвященные тому же вопросу:

1. К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **34**, 1292 (1958).
2. С. И. Брагинский, А. П. Казанцев, Физика плазмы и проблема управления термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 24, 1958.