

## К ТЕОРИИ ФЕРРОРЕЗОНАНСНОГО ТРИГГЕРА

К. К. Седова

Исследуется динамика феррорезонансного триггера, представляющего собой нелинейную неавтономную систему с двумя степенями свободы. В предположении близости рассматриваемой системы к соответствующей линейной консервативной методом Ван-дер-Поля решена задача о существовании и устойчивости гармонических (в нулевом приближении) колебаний системы с частотой внешней силы. В результате установлено, что в системе возможны устойчивые гармонические колебания с частотой внешней силы с различными амплитудами. Показано, что при определенных значениях параметров в системе возможен только триггерный режим.

В быстродействующих вычислительных машинах вместо обычно используемых ламповых схем можно применять феррорезонансные устройства, отличающиеся высокой степенью надежности—большим сроком службы, нечувствительностью к вибрациям и т. п. Мощность на выходе отдельного каскада достаточна для воздействия без промежуточных усилителей на следующие каскады. Феррорезонансные реле [6] могут применяться для осуществления счетных цепочек, запоминающих элементов, линий задержки и т. д. Два феррорезонансных реле, объединенные в двухтактной схеме, образуют феррорезонансный триггер [4]. Обычный ламповый триггер представляет собой кольцевую схему, состоящую из двух каскадов. С помощью феррорезонансных устройств можно осуществить кольцевую схему, состоящую из нескольких десятков каскадов [5].

Все ферромагнитные элементы содержат нелинейное звено—катушку с ферромагнитным сердечником. Резонансные кривые колебательного контура, содержащего вместо линейной индуктивности такую катушку с ферромагнитным сердечником, существенно образом отличаются от резонансных кривых линейного колебательного контура. На рис. 1 изображена резонансная кривая нелинейного колебательного контура, где  $\rho$ —квадрат амплитуды колебаний заряда в контуре,  $h$ —расстройка, т. е. относительная величина, показывающая насколько частота внешней силы отличается от собственной частоты контура

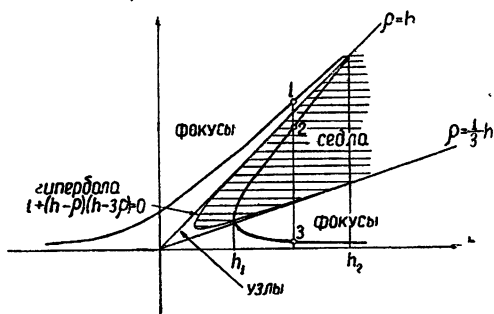


Рис. 1.

при малых колебаниях. В некотором интервале изменения  $h$  стационарная амплитуда колебаний в контуре имеет три значения, из которых два устойчивы и одно неустойчиво. Таким образом, в зависимости от начальных условий в контуре может существовать режим вынужденных колебаний с амплитудой, соответствующей либо верхней, либо нижней ветви кривой (феррорезонансное реле).

Это свойство нелинейного контура используется в феррорезонансном триггере, принципиальная схема которого изображена на рис. 2.

Индуктивности с последовательно включенными емкостями образуют две цепи, в которых возможен резонанс напряжений. Величина общей емкости  $C_0$  подбирается так, чтобы только одна из двух цепей была в резонансе. При этом в одной цепи происходят колебания с амплитудой, соответствующей точке 1 (рис. 1), а в другой с амплитудой, соответствующей точке 3. Такой режим работы системы будем называть триггерным.

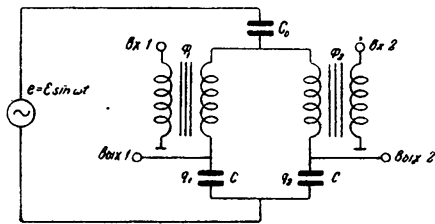


Рис. 2.

В настоящей работе исследуется динамика феррорезонансного триггера, представляющего собой нелинейную неавтономную систему с двумя степенями свободы. В статье не ставится задача дать полную картину поведения системы под действием внешней силы; рассмотрение ограничивается вопросом о существовании и устойчивости гармонических (в нулевом приближении) колебаний системы с частотой внешней силы. Для решения задачи используется приближенный метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений — метод Ван-дер-Поля (при условии, что рассматривается система, мало отличающаяся от соответствующей линейной консервативной системы).

Основные уравнения исследуемой схемы составляются в предположении, что зависимость магнитного потока в сердечнике из ферромагнитного материала от тока может быть представлена кубической параболой. Получающаяся укороченная система уравнений Ван-дер-Поля представляет собой нелинейную, но уже автономную систему с двумя степенями свободы, которая исследуется общими методами Пуанкаре.

## 1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для схемы феррорезонансного триггера (рис. 2) уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} + R\dot{q}_1 + \frac{1}{c} q_1 + \frac{1}{c_0} (q_1 + q_2) = E \sin \omega t; \quad (1)$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} + R\dot{q}_2 + \frac{1}{c} q_2 + \frac{1}{c_0} (q_1 + q_2) = E \sin \omega t,$$

где  $R$  — омическое сопротивление катушки индуктивности.

Пренебрегая гистерезисом кривой намагничивания и считая обе индуктивности одинаковыми, аппроксимируем кубической параболой зависимость магнитного потока  $\Phi$  от тока  $q$  в катушке:

$$\Phi_{1,2} = a\dot{q}_{1,2} - b\dot{q}_{1,2}^3, \quad (2)$$

где  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

Вводя безразмерные переменные

$$x = \frac{q_1}{q_0}; \quad y = \frac{q_2}{q_0}; \quad \tau = \omega t$$

и безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{1}{a \omega^2 C}; \quad \beta = \frac{1}{a \omega^2 C_0}; \quad E = \frac{E}{a \omega^2 q_0};$$

$$\delta = \frac{R}{a \omega}; \quad \gamma = \frac{3b}{a} \omega^2 q_0^2,$$

приведем уравнения (1) к следующему виду:

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta)x + \beta y = E \sin \tau - \delta \dot{x} + \frac{1}{3} \gamma \frac{d}{dt} \dot{x}^3; \quad (3)$$

$$\ddot{y} + (\alpha + \beta)y + \beta x = E \sin \tau - \delta \dot{y} + \frac{1}{3} \gamma \frac{d}{dt} \dot{y}^3$$

(точками обозначено дифференцирование по  $\tau$ ).

Система уравнений (3) в нормальных координатах  $\xi = x + y$ ,  $\eta = x - y$  запишется в форме

$$\dot{\xi} + \dot{\xi} = 2E \sin \tau - \delta \dot{\xi} + \frac{1}{3} \gamma \frac{d}{dt} (\dot{x}^3 + \dot{y}^3) + [1 - (\alpha + 2\beta)] \xi = \mu F(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \tau); \quad (3')$$

$$\ddot{\eta} + \eta = -\delta \dot{\eta} + \frac{1}{3} \gamma \frac{d}{dt} (\dot{x}^3 - \dot{y}^3) + (1 - \alpha) \eta = \mu F_1(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \tau).$$

Далее предполагаем, что система близка к линейной консервативной, и в ней возможен почти гармонический процесс с частотой внешней силы. Для этого необходимо, чтобы правые части уравнений (3') были малы по сравнению с консервативными членами уравнений, т. е.  $\mu \ll 1$  или  $E \ll 1$ ,  $\delta \ll 1$ ,  $\gamma \ll 1$ ,  $|1 - \alpha| \ll 1$ ,  $|1 - (\alpha + 2\beta)| \ll 1$ .

## 2. „УКОРОЧЕННЫЕ“ УРАВНЕНИЯ

Будем искать решение системы (3) в виде

$$x = a_1 \sin \tau + b_1 \cos \tau; \quad y = a_2 \sin \tau + b_2 \cos \tau, \quad (4)$$

где  $a_1, b_1, a_2, b_2$  — медленно меняющиеся функции времени (т. е. при малом  $\mu$  их первые производные порядка  $\mu$ , вторые — порядка  $\mu^2$  и т. д.).

Внося (4) в уравнения (3), отбрасывая члены порядка  $\mu^2$  и сравнивая коэффициенты при  $\sin \tau$  и  $\cos \tau$ , получим следующие уравнения:

$$2\dot{a}_1 = (1 - \alpha)b_1 - \beta b_1 - \beta b_2 - \delta a_1 - \frac{\gamma}{4} b_1 (a_1^2 + b_1^2);$$

$$2\dot{b}_1 = -(1 - \alpha)a_1 + \beta a_1 + \beta a_2 - \delta b_1 + \frac{\gamma}{4} a_1 (a_1^2 + b_1^2) - E; \quad (5)$$

$$2\dot{a}_2 = (1 - \alpha)b_2 - \beta b_2 - \beta b_1 - \delta a_2 - \frac{\gamma}{4} b_2 (a_2^2 + b_2^2);$$

$$2\dot{b}_2 = -(1 - \alpha)a_2 + \beta a_2 + \beta a_1 - \delta b_2 + \frac{\gamma}{4} a_2 (a_2^2 + b_2^2) - E,$$

которые несколько упрощаются после введения новых переменных

$$x = \sqrt{\frac{\gamma}{4\delta}} a_1; \quad y = \sqrt{\frac{\gamma}{4\delta}} b_1; \quad x_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{4\delta}} a_2; \quad y_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{4\delta}} b_2$$

и нового времени  $t_{\text{нов}} = \delta \tau$ :

$$x = -x + (h - \lambda)y - \lambda y_1 - y(x^2 + y^2) = P(x, y, x_1, y_1);$$

$$\dot{y} = -(h - \lambda)x - y + \lambda x_1 + x(x^2 + y^2) - V = Q(x, y, x_1, y_1); \quad (6)$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + (h - \lambda)y_1 - \lambda y - y_1(x_1^2 + y_1^2) = P_1(x, y, x_1, y_1);$$

$$\dot{y}_1 = -(h - \lambda)x_1 - y_1 + \lambda x + x_1(x_1^2 + y_1^2) - V = Q_1(x, y, x_1, y_1).$$

Здесь и в дальнейшем точками обозначается дифференцирование по  $t_{\text{нов}}$ ; в системе (6)  $h = \frac{1 - \alpha}{\delta}$ ,  $\lambda = \frac{\beta}{\delta} > 0$ ,  $V = \frac{E}{\delta} \sqrt{\frac{\gamma}{4\delta}} > 0$ .

### 3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $\lambda = 0$

Перепишем систему уравнений (6) следующим образом:

$$\dot{x} = \bar{P}(x, y) + \lambda p(x_1, y_1); \quad \dot{x}_1 = \bar{P}_1(x_1, y_1) + \lambda p_1(x, y); \quad (7)$$

$$\dot{y} = \bar{Q}(x, y) + \lambda q(x_1, y_1); \quad \dot{y}_1 = \bar{Q}_1(x_1, y_1) + \lambda q_1(x, y)$$

( $\lambda$  — переменный параметр).

При  $\lambda = 0$  система (7) распадается на две одинаковые независимые подсистемы\*:

$$\dot{x} = -x + hy - y(x^2 + y^2); \quad (8)$$

$$y = -hx - y + x(x^2 + y^2) - V;$$

$$x_1 = -x_1 + hy_1 - y_1(x_1^2 + y_1^2); \quad (8')$$

$$\dot{y}_1 = -hx_1 - y_1 + x_1(x_1^2 + y_1^2) - V.$$

Исследование возможных видов движения системы (8) в зависимости от параметров схемы, амплитуды и частоты внешней силы дано в статьях [2,3] и ряде других работ. Эта задача сводится к исследованию возможных видов разбиения фазовой плоскости  $x, y$  на фазовые траектории, что, в свою очередь, сводится к отысканию и исследованию состояний равновесия, предельных циклов и сепаратрис уравнений (8).

Координаты состояния равновесия  $x_0 = \frac{\rho(\rho - h)}{V}$ ,  $y_0 = -\frac{\rho}{V}$  определяются уравнением  $\rho[1 + (h - \rho)^2] = V^2$  ( $\rho = x_0^2 + y_0^2$ ). Резонансная кривая для фиксированного  $V$  изображена на рис. 1.

Характер состояний равновесия зависит от корней характеристического уравнения\*\*  $\sigma^2 + 2\sigma + 1 + (h - \rho)(h - 3\rho) = 0$ .

При помощи этого уравнения в плоскости  $\rho, h$  выделяем области, соответствующие различным типам состояний равновесия.

Внутри гиперболы  $1 + (h - \rho)(h - 3\rho) = 0$  лежит область неустойчивых состояний равновесия — седел, вне гиперболы — область устойчивых состояний равновесия. Прямые  $h = \rho$ ,  $h = 3\rho$  являются границами фокусов и узлов.

Для значений  $h$  из интервала  $h_1 < h < h_2$  картина на фазовой плоскости имеет вид, изображенный на рис. 3.

Аналогичную картину получим и для системы уравнений (8').

\* Параметр  $\lambda$  равен нулю, если  $\beta = 0$  т. е.  $c_0 = \infty$ . Это означает, что вместо одной сложной системы (рис. 2) имеем два не связанных между собой контура.

\*\* Согласно критерию Бендиксона в рассматриваемой системе нет предельных циклов; бесконечность абсолютно неустойчива.

Рассматривая обе системы (8) и (8') как одну систему (7) при частном значении  $\lambda = 0$ , заключаем, что в четырехмерном фазовом пространстве  $x, x_1, y, y_1$  она может иметь устойчивые состояния равновесия типа сложного фокуса  $11', 33', 13', 31'$  (рис. 3), когда обе системы (8) и (8') находятся в устойчивых состояниях 1 или 3 (рис. 1), неустойчивое состояние равновесия типа сложного седла  $22'$ , когда обе системы (8) и (8') находятся в неустойчивом состоянии 2 (рис. 1), и неустойчивые состояния равновесия типа седло-фокуса  $12', 21', 23', 32'$ , когда одна из систем (8), (8') находится в состоянии 2.

В пространстве  $\rho, h$  резонансная кривая симметрична относительно плоскости  $\rho - \rho_1 = 0$  (см. рис. 4). Сплошным линиям на рис. 4 соответствуют устойчивые состояния равновесия, линиям с кружками — неустойчивые (типа седло-фокуса) и линии, помеченной крестиками, — тоже неустойчивые (типа седла).

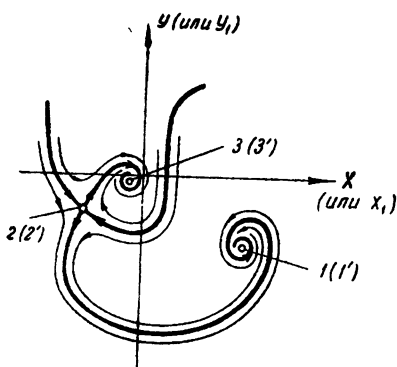


Рис. 3.

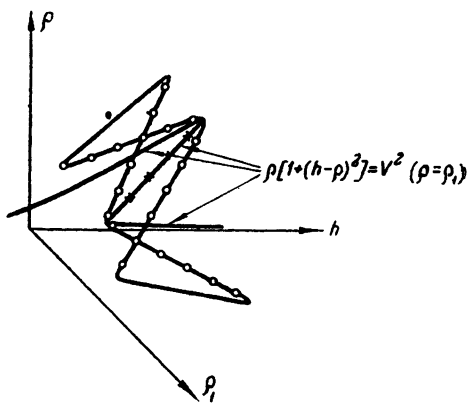


Рис. 4.

#### 4. СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ $\lambda \neq 0$

В общем случае (при  $\lambda \neq 0$ ) состояния равновесия системы уравнений (6) определяются уравнениями

$$-x - (\rho - x)y - \lambda y_1 = 0; \quad -\lambda y - x_1 - (\rho_1 - x)y_1 = 0; \quad (9)$$

$$(\rho - x)x - y + \lambda x_1 = V; \quad \lambda x + (\rho_1 - x)x_1 - y_1 = V,$$

где  $\rho = x^2 + y^2$ ;  $\rho_1 = x_1^2 + y_1^2$ ,  $x = h - \lambda$ .

Из системы (9) находим:

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D}; \quad x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}; \quad y_1 = \frac{D_{y_1}}{D},$$

где

$$\begin{aligned} D &= [(\rho - x) + (\rho_1 - x)]^2 + [1 + \lambda^2 - (\rho - x)(\rho_1 - x)]^2; \\ D_x &= V [(\rho - x) - \lambda^2(\rho_1 - x) + (\rho - x)(\rho_1 - x)^2 - \lambda(\rho - x)(\rho_1 - x) + \lambda + \lambda^3]; \\ D_y &= V [-1 - \lambda^2 - (\rho_1 - x)^2 + \lambda(\rho_1 - x) + \lambda(\rho - x)]; \\ D_{x_1} &= V [(\rho_1 - x) - \lambda^2(\rho - x) + (\rho_1 - x)(\rho - x)^2 - \lambda(\rho - x)(\rho_1 - x) + \lambda + \lambda^3]; \\ D_{y_1} &= V [-1 - \lambda^2 - (\rho - x)^2 + \lambda(\rho - x) + \lambda(\rho_1 - x)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что  $\frac{D_x^2 + D_y^2}{D^2} = \rho$  и  $\frac{D_{x_1}^2 + D_{y_1}^2}{D^2} = \rho_1$ , после сокращения

на  $D \neq 0$  получим следующие уравнения резонансных кривых:

$$\begin{aligned} \rho \{[(\rho - x) + (\rho_1 - x)]^2 + [1 + \lambda^2 - (\rho - x)(\rho_1 - x)]^2\} &= \\ &= V^2 \{1 + [\lambda - (\rho_1 - x)]^2\}; \\ \rho_1 \{[(\rho - x) - (\rho_1 - x)]^2 + [1 + \lambda^2 - (\rho - x)(\rho_1 - x)]^2\} &= \\ &= V^2 \{1 + [\lambda - (\rho - x)]^2\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Покажем прежде всего, что порядок системы уравнений (11) равен девяти. Для этого в (11) вычтем одно уравнение из другого, получив новое уравнение пятой степени. Далее, умножим первое уравнение системы (11) на  $\rho_1$ , второе — на  $\rho$  и вычтем одно из другого. Получим второе уравнение (третьей степени). При  $\rho \neq \rho_1$  уравнения пятой и третьей степени можно сократить на  $\rho - \rho_1 \neq 0$ . Полученная система уравнений оказывается 8-го порядка. Однако при умножении уравнений системы (11) на  $\rho$  и  $\rho_1$  добавляются два лишних корня  $(\rho_0, 0)$  и  $(0, \rho_{10})$ , которые не удовлетворяют исходной системе (11). Следовательно, порядок системы при  $\rho \neq \rho_1$  равен  $8 - 2 = 6$ . В то же время при  $\rho = \rho_1$  получаем одно уравнение 3-й степени. Таким образом, исходная система уравнений (11) может иметь не более девяти корней.

Резонансная кривая (11) состоит из двух частей: кривой, лежащей в плоскости  $\rho = \rho_1$  и описываемой уравнением

$$\rho \{1 + [\rho - (h - 2\lambda)]^2\} = V^2, \quad (12)$$

и пространственной кривой, описываемой параметрическими уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \lambda - u \pm \frac{\sqrt{V^2(2\lambda - u) - u^2}}{2\lambda - u}; \\ \rho &= h - \lambda + \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1 - \lambda^2 + (2\lambda - u)(h - \lambda + u)}; \\ \rho_1 &= h - \lambda + \frac{u}{2} \mp \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1 - \lambda^2 + (2\lambda - u)(h - \lambda + u)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение плоской кривой (12) получается из (11) при условии  $\rho = \rho_1$  после сокращения на  $1 + [\lambda - (\rho - x)]^2 \neq 0$ .

Проекции кривых (12) на плоскости  $\rho h$  (или  $\rho_1 h$ ) при разных значениях  $V$  и  $\lambda$  показаны на рис. 5.

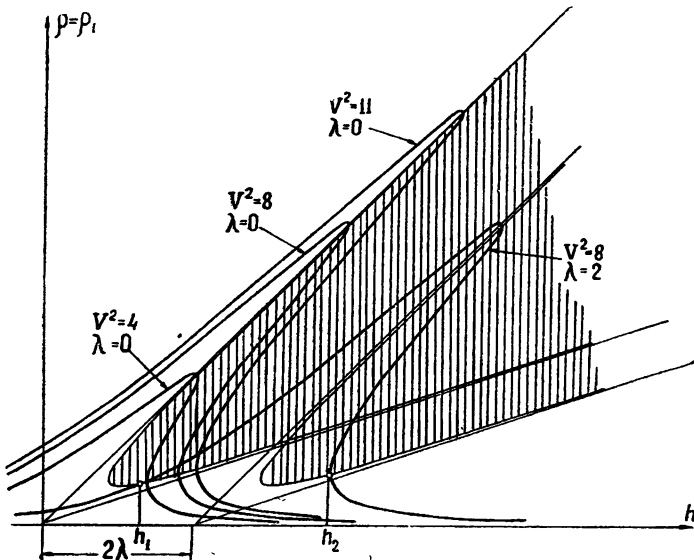


Рис. 5.

Заметим, что уравнения (13) нетрудно получить из уравнений (11), полагая:

$$u = \rho + \rho_1 - 2x, \quad v = 1 + \lambda^2 - (\rho - x)(\rho_1 - x).$$

После некоторых преобразований и сокращения на  $\rho - \rho_1 \neq 0$  уравнения (11) приводятся к виду

$$u^2 + v^2 = V^2(2\lambda - u), \quad v = (2\lambda - u)(h - \lambda + u). \quad (14)$$

Разрешая (14) относительно  $h$ ,  $\rho$ ,  $\rho_1$ , получим уравнения (13).

Можно показать, что пространственная кривая (13) представляет собой замкнутую кривую, симметричную относительно плоскости  $\rho - \rho_1 = 0$ . Проекции кривых (13) на плоскости  $\rho h$ ,  $\rho\rho_1$  при разных значениях  $\lambda$  изображены на рис. 6.

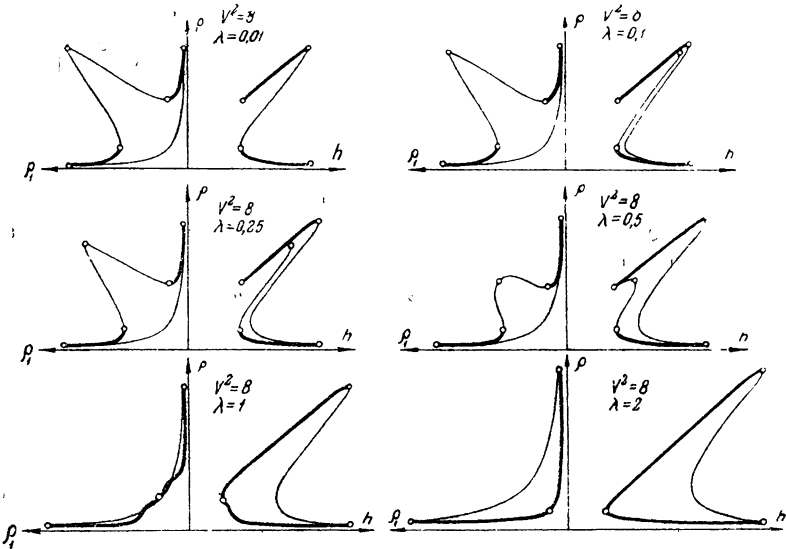


Рис. 6.

#### 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Для определения устойчивости состояний равновесия системы (6) составляем характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} - \sigma & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial x_1} & \frac{\partial P}{\partial y_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} - \sigma & \frac{\partial Q}{\partial x_1} & \frac{\partial Q}{\partial y_1} \\ \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial x_1} - \sigma & \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} & \frac{\partial Q_1}{\partial y} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial y_1} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (15)$$

$x = x_0, y = y_0, x_1 = x_{10}, y_1 = y_{10}$

где  $x_0, y_0, x_{10}, y_{10}$  — координаты состояния равновесия.

В дальнейшем нулевой индекс опускаем, имея в виду, что всюду речь идет только о тех значениях  $x, y, x_1, y_1$  (или  $\rho, \rho_1$ ), которые удовлетворяют уравнениям (9) или (11).

Это уравнение имеет вид:

$$(1 + \sigma)^4 + (1 + \sigma)^2 [2\lambda^2 + (x - \rho)(x - 3\rho) + (x - \rho_1)(x - 3\rho_1)] + (x - \rho)(x - 3\rho)(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) - 2x^2\lambda^2 + 4x\lambda^2(\rho + \rho_1) - 6\lambda^2\rho\rho_1 + \lambda^4 - 4\lambda^2(xx_1 + yy_1)^2 = 0. \quad (16)$$

Обозначим

$$p = 2\lambda^2 + (x - \rho)(x - 3\rho) + (x - \rho_1)(x - 3\rho_1);$$

$$q = (x - \rho)(x - 3\rho)(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) - 2x^2\lambda^2 + 4x\lambda^2(\rho + \rho_1) - 6\lambda^2\rho\rho_1 + \lambda^4 - 4\lambda^2(xx_1 + yy_1)^2$$

и перепишем характеристическое уравнение (16) следующим образом:

$$\sigma^4 + 4\sigma^3 + (6 + p)\sigma^2 + (4 + 2p)\sigma + 1 + p + q = 0. \quad (17)$$

Условия Раута—Гурвица сводятся к неравенствам

$$p + 2 > 0, \quad 1 + p + q > 0, \quad (4 + p)^2 - 4q > 0 \quad (18)$$

или в развернутой форме

$$[(x - \rho)(x - 3\rho) + \lambda^2 + 1] + [(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) + \lambda^2 + 1] > 0;$$

$$[(x - \rho)(x - 3\rho) + \lambda^2 + 1][(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) + \lambda^2 + 1] - M > 0; \quad (19)$$

$$8[(x - \rho)(x - 3\rho) + \lambda^2 + 1] + 8[(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) + \lambda^2 + 1] +$$

где

$$M = \lambda^2 [(x - \rho)(x - 3\rho) + (x - \rho_1)(x - 3\rho_1)]^2 + 4M > 0,$$

$$M = \lambda^2 [(x - \rho)(x - 3\rho) + (x - \rho_1)(x - 3\rho_1) + 2x^2 - 4x(\rho + \rho_1) + 6\rho\rho_1 + 4(xx_1 + yy_1)^2];$$

$$(xx_1 + yy_1)^2 = \rho\rho_1 \frac{[(x - \rho) - (x - \rho_1)]^2}{\{1 + [\lambda + (x - \rho_1)]^2\}^2} \rho^2 =$$

$$= \rho\rho_1 \left\{ 1 - \frac{[(x - \rho) - (x - \rho_1)]^2}{\{1 + [\lambda + (x - \rho)]^2\} \{1 + [\lambda + (x - \rho_1)]^2\}} \right\}.$$

Рассмотрим случай малого  $\lambda$  (порядка  $\mu$ ). Пренебрегая членами порядка  $\mu^2$  и выше, получим следующие выражения для условий Раута—Гурвица:

$$[(x - \rho)(x - 3\rho) + 1] + [(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) + 1] > 0;$$

$$[(x - \rho)(x - 3\rho) + 1][(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) + 1] > 0; \quad (20)$$

$$8[(x - \rho)(x - 3\rho) + 1] + 8[(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) + 1] +$$

$$+ [(x - \rho)(x - 3\rho) - (x - \rho_1)(x - 3\rho_1)]^2 > 0.$$

Эти условия равносильны двум следующим:

$$(x - \rho)(x - 3\rho) + 1 > 0, \quad (21)$$

$$(x - \rho_1)(x - 3\rho_1) + 1 > 0$$

Границами области устойчивости в пространстве  $\rho\rho_1x$  являются две цилиндрические поверхности; направляющие цилиндрических поверхностей — гиперболы с асимптотами  $\rho = x$ ,  $\rho = x/3$  и  $\rho_1 = x$ ,  $\rho_1 = x/3$  (рис. 7). Область устойчивости лежит вне этих цилиндрических поверхностей.

В общем случае при любом  $\lambda$  в пространстве  $\rho\rho_1x$  отделить область устойчивости от области неустойчивости не удается. Можно

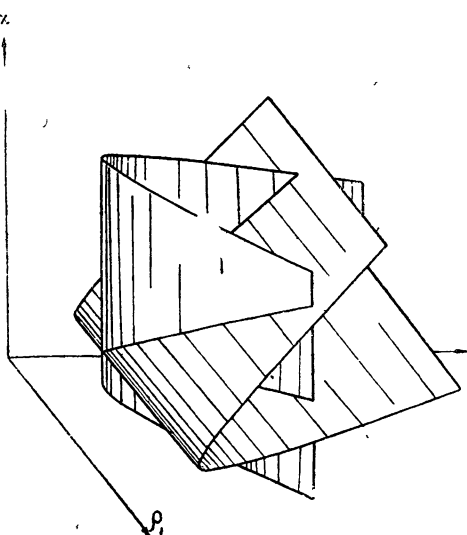


Рис. 7.



определить только точки пересечения границы областей устойчивости и неустойчивости с резонансной кривой и выделить на резонансной кривой устойчивые и неустойчивые ветви.

Так как резонансная кривая (11) состоит из двух кривых (12) и (13), то и исследование устойчивости состояний равновесия легче провести отдельно для случая плоской кривой ( $\rho = \rho_1$ ) и для случая пространственной кривой ( $\rho \neq \rho_1$ ).

Для состояний равновесия в плоскости  $\rho = \rho_1$  условия Раута—Гурвица записываются в виде

$$3\rho^2 - 4x\rho + x^2 + \lambda^2 + 1 > 0; \quad (22)$$

$$[(3\rho^2 - 4x\rho + x^2 + \lambda^2 + 1) + 2\lambda(x - 2\rho)][(3\rho^2 - 4x\rho + x^2 + \lambda^2 + 1) - 2\lambda(x - 2\rho)] > 0; \quad (23)$$

$$3\rho^2 - 4x\rho + x^2 + \lambda^2 + 1 + \lambda^2(x - 2\rho)^2 > 0. \quad (24)$$

Если выполняется условие (22), то автоматически выполняется и (24). Неравенство (23) имеет место при условии, если оба сомножителя больше нуля:

$$3\rho^2 - 4x\rho + x^2 + \lambda^2 + 1 + 2\lambda(x - 2\rho) > 0; \quad (25)$$

$$3\rho^2 - 4x\rho + x^2 + \lambda^2 + 1 - 2\lambda(x - 2\rho) > 0$$

или оба сомножителя меньше нуля:

$$3\rho^2 - 4x\rho + x^2 + \lambda^2 + 1 + 2\lambda(x - 2\rho) < 0; \quad (26)$$

$$3\rho^2 - 4x\rho + x^2 + \lambda^2 + 1 - 2\lambda(x - 2\rho) < 0.$$

Однако удовлетворить одновременно условиям (22) и (26) нельзя. Следовательно, условия Раута—Гурвица сводятся к двум неравенствам (25). Из выполнения условия (25) следует выполнение (22).

Подставляя в (25)  $x = h - \lambda$ , получим следующие условия устойчивости состояний равновесия в плоскости  $\rho = \rho_1$ :

$$3\rho^2 - 4h\rho + h^2 + 1 > 0; \quad (27)$$

$$3\rho^2 - 4(h - 2\lambda)\rho + (h - 2\lambda)^2 + 1 > 0.$$

Две гиперболы с асимптотами  $\rho = h$ ,  $\rho = h/3$  и  $\rho = h - 2\lambda$ ,  $\rho = (h - 2\lambda)/3$  делят плоскую кривую (12) на устойчивые и неустойчивые ветви. Вторая гипербола смещена относительно первой по оси  $h$  на  $2\lambda$  (рис. 5). Область неустойчивости, расположенная внутри гиперболы, заштрихована на рис. 5.

Таким образом, при определенных значениях параметров (на рис. 5  $V^2 = 8$ ,  $\lambda = 2$ ) существует интервал расстройек  $h_1 < h < h_2$ , в котором колебания с одинаковыми амплитудами в обеих цепях схемы неустойчивы. При  $\lambda = \lambda_{\min}$  и  $\lambda = \lambda_{\max}$  этот интервал исчезает. Значения  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$  определяются уравнениями:

$$27V^4 - 4V^2x^3 - 36V^2x + 4(x^2 + 1)^2 = 0; \quad (28)$$

$$\rho^3 - 2x\rho^2 + (x^2 + 1)\rho - V^2 = 0; \quad (29)$$

$$h^2 - 4h\rho + 3\rho^2 + 1 = 0; \quad (30)$$

$$x = h - 2\lambda. \quad (31)$$

Перейдем к выяснению вопроса об устойчивости состояний равновесия на пространственной кривой (13). Из уравнений (13)

и (19) находим точки пересечения границы областей устойчивости и неустойчивости с пространственной кривой (13). На рис. 6 даны проекции кривых (13) на плоскости  $\rho, \rho_1$  при разных значениях  $\lambda$ . Кружочки означают точки пересечения границы с кривой (13); жирные линии соответствуют устойчивым ветвям кривой, тонкие — неустойчивым.

## 6. ТРИГГЕРНЫЙ РЕЖИМ

Таким образом, система уравнений (6) может иметь максимум девять состояний равновесия, причем четыре из них — устойчивы и пять — неустойчивы.

Устойчивые состояния равновесия следующие:

- 1)  $\rho = A, \rho_1 = B, A > B$ ;    2)  $\rho = B, \rho_1 = A$ ;
- 3)  $\rho = \rho_1 = C$ ;                    4)  $\rho = \rho_1 = D, C > D$ .

Можно выбрать параметры схемы таким образом, чтобы состояние равновесия 4 отсутствовало, а состояние равновесия 3 было неустойчиво. Тогда состояниями равновесия системы (6) будут состояния 1 и 2, которые соответствуют триггерному режиму схемы (рис. 2).

На рис. 8 изображены проекции резонансных кривых на плоскость  $\rho, h$  при  $V^2 = 8, \lambda = 1$ ;  $V^2 = 20, \lambda = 1$ . Тонкие линии изобра-

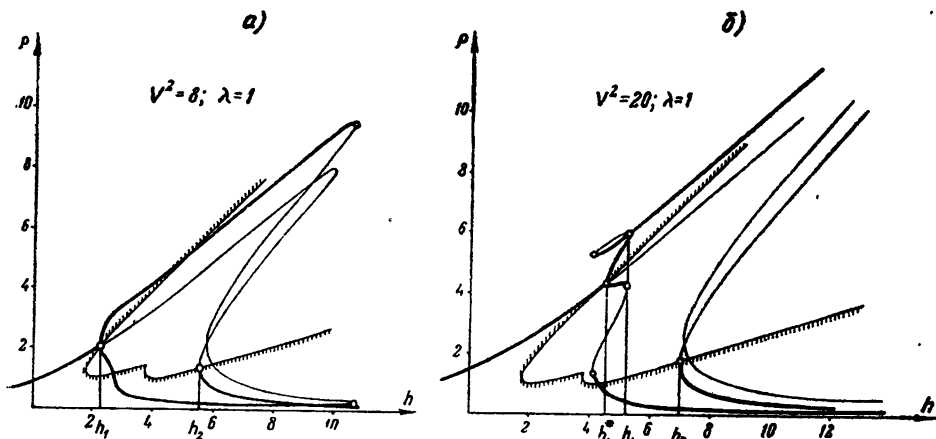


Рис. 8.

жают неустойчивые ветви резонансной кривой, жирные — устойчивые. Внутри гипербол лежит область неустойчивых состояний равновесия 3. На рис. 8 видно, что при  $h_1 < h < h_2$  в исследуемой системе существует только триггерный режим.

Для частного случая  $V^2 = 8, \lambda = 1$  имеем следующую картину (рис. 8а):

1) При  $h < h_1 = 2,27$  в системе (3) происходят колебания с одинаковыми амплитудами.

2) При  $h_1 < h < h_2 = 5,57$  — триггерный режим. Таблица 1 показывает, во сколько раз амплитуда колебаний в одной цепи больше амплитуды в другой при разных значениях расстройки  $h$ .

3) При  $h_2 < h < 10,66$  могут быть колебания как с одинаковыми малыми амплитудами, так и с разными.

4) При  $h > 10,66$  в системе существуют колебания с одинаковыми очень малыми амплитудами.

Таблица 1

$h$	3	4,32	5,11	5,5
$\sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}$	2,41	4,18	4,99	5,3

Несколько сложнее картина при  $V^2=20$ ,  $\lambda=1$ , поскольку в интервале расстроек  $h_1^* < h < h_1$  кроме триггерного режима могут существовать колебания с разными, но мало отличными друг от друга амплитудами (см. рис. 86).

Таким образом, рассмотрение динамики упрощенной модели феррорезонансного триггера свидетельствует о том, что в некоторых областях значений параметров в системе возможен триггерный режим; амплитуды гармонических колебаний при этом определяются по формулам (13).

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ОНТИ, М.—Л., 1937
2. А. Е. Соломонович, УФН, 34, 415 (1948).
3. А. М. Кац, Труды ЛИИ, 3, 102, 1939.
4. C. Isborn, Electronics, 25, 121 (1952).
5. R. W. Rutishauser, Electronics, 27, 152 (1954).
6. М. А. Розенблат, Магнитные усилители, изд. Сов. радио, М., 1956.

Исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
8 апреля 1958 г.