

О ПРИМЕНЕНИИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА К РАСЧЕТУ «СКАЧКООБРАЗНЫХ» НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ВОЛНОВОДЕ

В. С. Ильин

В статье вариационным методом рассматривается эквивалентная проводимость неоднородности, вызванной сочленением двух прямоугольных волноводов, имеющих разную высоту. На основании полученных формул проведен расчет конкретной неоднородности—сдвига фланцевого сочленения двух волноводов. Результаты экспериментального изучения этой неоднородности находятся в удовлетворительном соответствии с расчетными данными.

Многие волноводные неоднородности так называемого „скачкообразного“ типа (имеющие осевые размеры, малые по сравнению с длиной волны) весьма эффективно рассчитываются вариационным методом, одна из модификаций которого в ряде работ [1, 9, 10] получила название метода Швингера. В работах [1, 2] указанным методом рассчитаны параметры эквивалентных схем для большого числа различных неоднородностей (для диафрагм, ступенчатых сочленений и т. д.). В статье [7] вариационная методика применена к расчету сочленения двух одинаковых прямоугольных волноводов, один из которых частично заполнен диэлектриком. Существенное обобщение этого метода произведено в [8], где рассмотрен скачкообразный переход между двумя цилиндрическими волноводами произвольных поперечных сечений. При этом в плоскость сочленения волноводов может быть помещена диафрагма произвольной геометрии. Однако выражение для проводимости сочленения, полученное в этой работе, может быть написано в явном виде лишь после весьма сложных расчетов и при условии, если известны собственные функции поперечных сечений сопрягаемых волноводов. Вследствие большого разнообразия встречающихся в волноводной технике неоднородностей представляет интерес получение в явном виде общих формул для проводимости скачкообразной неоднородности в прямоугольных волноводах, получивших, как известно, наиболее широкое практическое применение.

В настоящей работе указанные формулы получены для H_{0m} волн в прямоугольном волноводе при наличии одиночной скачкообразной неоднородности общего вида, лежащей в „Е“—плоскости волновода. Предполагается, как обычно, что стенки волновода выполнены из идеально проводящего металла, а волновод заполнен диэлектриком, свободным от потерь.

Найденные формулы содержат в качестве частных случаев результаты работ [1, 2] по расчету емкостных диафрагм в прямоугольных волноводах, ступенчатых сочленений двух волноводов разных высот и др. Использование полученных формул проиллюстрировано расчетом важной в практическом отношении неоднородности—сдвига фланцевого соединения. При этом было достигнуто удовлетворительное соответствие между теорией и экспериментом.

1. РАСЧЕТ ОТРАЖЕНИЯ ОТ ОДИНОЧНОЙ „СКАЧКООБРАЗНОЙ“ НЕОДНОРОДНОСТИ В ВОЛНОВОДЕ

Расчет производится для случая отсутствия потерь на стенках волновода и в диэлектрике, заполняющем волновод. Неоднородность изображена на рис. 1. По оси y , перпендикулярной плоскости рисунка, волновод ограничен двумя идеально проводящими поверхностями $y=0$ и $y=a$. Таким образом, по координате y волновод, изображенный на рис. 1, будет регулярным [3, 4].

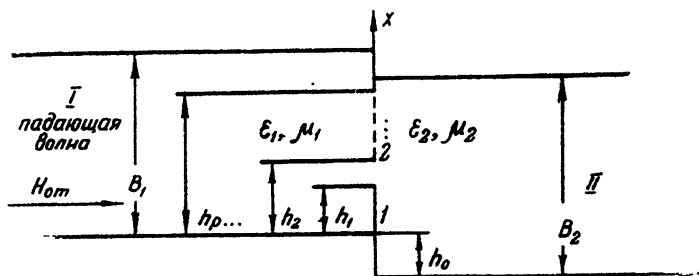


Рис. 1.

Предполагается, что размеры b_1 и b_2 по отношению к длине волны таковы, что в волноводах I и II распространяются только доминантные волны типа H_{0m} .

Если электромагнитное поле гармонически зависит от времени, то, как известно [3, 4], распространение волн в волноводе будет описываться уравнением:

$$\Delta E(x, y, z) + k^2 \epsilon_i \mu_i E(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

($i=1$ для области I; $i=2$ для области II), где k —постоянная распространения в свободном пространстве, ϵ_i и μ_i —диэлектрическая и магнитная проницаемости, отнесенные соответственно к диэлектрической и магнитной проницаемостям вакуума.

Будем считать, что плоскость рис. 1 совпадает с „Е“—плоскостью волновода. Тогда в силу регулярности волновода по координате y можно положить

$$E_y(x, y, z) \equiv 0 \quad (2)$$

во всех точках волновода. Применяя известный метод разделения переменных и учитывая граничные условия на плоскостях $y=0$, $y=a$, получим:

$$E(x, y, z) = E(x, z) \sin \frac{\pi m}{a} y. \quad (3)$$

Функция $E(x, z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\Delta E(x, z) + i k_b^2 E(x, z) = 0, \quad (4)$$

где

$$i k_b = \sqrt{k^2 \epsilon_i \mu_i - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}.$$

Таким образом, задача свелась к двумерному волновому уравнению (4). Из уравнений Максвелла, записанных для данного случая, следует, что

$$H_x = +j \frac{1}{300k} \frac{1}{\mu} \kappa E_z(x, z) \frac{\pi m}{a} \cos \frac{\pi m}{a} y, \quad (5)$$

$$H_y = -j \frac{i k_b^2}{300k} \frac{1}{\mu} \left(\int E_x(x, z) dz \right) \sin \frac{\pi m}{a} y, \quad (6)$$

$$H_z = -j \frac{1}{300} \frac{1}{k} \frac{1}{\mu} E_x(x, z) \frac{\pi m}{a} \cos \frac{\pi m}{a} y, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(x, z) = \frac{\partial E_x(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial z}. \quad (8)$$

Из (5) ÷ (8) видно, что для непрерывности вектора $\mathbf{E}(x, y, z)$ в областях I и II (на плоскости раздела $z=0$ нормальная компонента $\mathbf{E}(x, y, z)$ терпит разрыв) достаточно обеспечить непрерывность двух компонент $E_x(x, z)$ и $H_y(x, z)$ во всех точках системы. Из выражения (4) следует:

$$\Delta E_x(x, z) + {}_i k_b^2 E_x(x, z) = 0. \quad (9)$$

Поле, удовлетворяющее уравнению (9), условию доминантности для H_{0m} , граничному условию $\partial H_y / \partial x = 0$ на стенках $x = h_0$, $x = h_0 + b_1$ и граничному условию при $z \rightarrow -\infty$, может быть записано для области I в виде ряда:

$${}_I E_x(x, z) = e^{-j_1 k_b z} + \operatorname{Re} e^{+j_1 k_b z} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\Gamma_n^I z} \cos \frac{\pi n}{b_1} (x - h_0), \quad (10)$$

где $\Gamma_n^I = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{b_1}\right)^2 - {}_1 k_b^2}$. Первый член этого ряда представляет падающую слева волну типа H_{0m} (если учесть (3) с амплитудой, равной единице. Второй член представляет отраженную волну того же типа с амплитудой R , численно равной коэффициенту отражения. В силу того, что Γ_n^I — действительная величина, высшие виды волн, описываемые членами $n = 1, 2, \dots$, быстро уменьшаются по мере удаления от неоднородности.

Совершенно аналогично для области II:

$${}_{II} E_x(x, z) = T e^{-j_2 k_b z} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\Gamma_n^{II} z} \cos \frac{\pi n}{b_2} x, \quad (11)$$

где $\Gamma_n^{II} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{b_2}\right)^2 - {}_2 k_b^2}$ и T — амплитуда проходящей волны, численно равная коэффициенту прохождения, определяемого как отношение амплитуды падающей волны в области I к амплитуде проходящей волны в области II. Высшие виды колебаний, описываемые членами $n = 1, 2, 3, \dots$, исчезают при $z \rightarrow +\infty$.

Учитывая (6), получаем для магнитных компонент:

$${}_I H_y = \frac{1}{300} \frac{{}_1 k_b}{k} \frac{1}{\mu_1} \left[e^{-j_1 k_b z} - \operatorname{Re} e^{+j_1 k_b z} - j_1 k_b \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{\Gamma_n^I} e^{\Gamma_n^I z} \cos \frac{\pi n}{b_1} (x - h_0) \right], \quad (12)$$

$${}_{II} H_y = \frac{1}{300} \frac{{}_2 k_b}{k} \frac{1}{\mu_2} \left[T e^{-j_2 k_b z} + j_2 k_b \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{\Gamma_n^{II}} e^{-\Gamma_n^{II} z} \cos \frac{\pi n}{b_2} x \right]. \quad (13)$$

Легко видеть, что (12) и (13) удовлетворяют граничному условию $\partial H_y / \partial x = 0$ на верхней и нижней стенках волновода. Соотношения (10) и (13) описывают точное поле в волноводе.

Ряды (10), (12) непрерывны во всех точках при $z \leq 0$, а ряды (11), (13) в точках $z \geq 0$. Остается обеспечить непрерывность функций $E_x(x, z)$ и $H_y(x, z)$ в точках $z = 0$ ($h_0 + h_1 \leq x \leq h_0 + h_2$). Для

этого произведем „сшивание“ решений при $z=0$. Из непосредственного приравнивания (10) и (11) и из теории рядов Фурье следует:

$$1+R = \frac{1}{b_1} \int_0^{b_2} E_{0x}(x) dx, \quad (14)$$

$$A_n = \frac{2}{b_1} \int_0^{b_2} E_{0x}(x) \cos \frac{\pi n}{b_1} (x - h_0) dx, \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{b_2} \int_0^{b_2} E_{0x}(x) dx, \quad (16)$$

$$R_n = \frac{2}{b_2} \int_0^{b_2} E_{0x}(x) \cos \frac{\pi n}{b_2} x dx. \quad (17)$$

Откуда получаем важный результат

$$1 + R = \frac{b_2}{b_1} T. \quad (18)$$

Функция $E_{0x}(x)$, представляющая поле $E_x(x, z)$ при $z=0$, в силу граничных условий на металле отличается от нуля только в интервалах: $(h_0 + h_1) \leq x \leq (h_0 + h_2)$; $(h_0 + h_3) \leq x \leq (h_0 + h_4)$; ...; $(h_0 + h_{p-1}) \leq x \leq (h_0 + h_p)$. На пластинках 1, 2, ..., вне этих интервалов, $E_{0x}(x) = 0$ (с обеих сторон пластинок).

Произведем „сшивание“ компонент ${}_I H_y(x, z)$ и ${}_II H_y(x, z)$, пользуясь условием непрерывности компонент H_y на плоскости $z=0$. Приравнивая (12) и (13), получим:

$$\begin{aligned} (1-R) - j_1 k_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b_1} \left[\int_0^{b_2} E_{0x}(x) \cos \frac{\pi n}{b_1} (x - h_0) dx \right] \cos \frac{\pi n}{b_1} (x - h_0) \frac{1}{\Gamma_n^I} = \\ = \frac{j_2 k_b}{j_1 k_b} \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(T + j_2 k_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b_2} \left[\int_0^{b_2} E_{0x}(x) \cos \frac{\pi n}{b_2} x dx \right] \cos \frac{\pi n}{b_2} \frac{1}{\Gamma_n^{II}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Умножая правую и левую части интегрального уравнения (19) на E_{0x} и интегрируя в пределах от 0 до b_2 , получим, разделив результат на (14):

$$\begin{aligned} \frac{1-R}{1+R} = \frac{b_1}{b_2} \frac{j_2 k_b}{j_1 k_b} \frac{\mu_1}{\mu_2} + j_1 k_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\Gamma_n^I} \left[\int_0^{b_2} E_{0x}(x) \cos \frac{\pi n}{b_1} (x - h_0) dx \right]^2 \left[\int_0^{b_2} E_{0x}(x) dx \right]^{-2} + \\ + j \frac{j_2 k_b^2}{j_1 k_b} \frac{b_1}{b_2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\Gamma_n^{II}} \left[\int_0^{b_2} E_{0x}(x) \cos \frac{\pi n}{b_2} x dx \right]^2 \left[\int_0^{b_2} E_{0x}(x) dx \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение (20) представляет собой квадратичный функционал. Можно показать, что этот функционал будет стационарен относи-

тельно малых вариаций поля $E_{0x}(x)$ вокруг точного значения*. Тогда для приближенного нахождения значения функционала $F[E_{0x}(x)] = \frac{1-R}{1+R} = G + jB$ (т. е. эквивалентной проводимости,

отнесенной к обратной величине волнового сопротивления волновода I) можно воспользоваться известным вариационным методом Ритца [5,6], задав искомое поле $E_{0x}(x)$ в виде отрезка ряда, например, в виде полинома:

$$E_{0x}(x) \approx a_1 x^q + a_2 x^{q-1} + \dots + a_q x + 1, \quad (21)$$

где a_1, a_2, \dots, a_q находятся из условий стационарности:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1-R}{1+R} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{1-R}{1+R} \right) = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial}{\partial a_q} \left(\frac{1-R}{1+R} \right) = 0. \quad (22)$$

Чем выше степень полинома q (q — целое и положительное), тем точнее определится $E_{0x}(x)$. Таким образом, принципиально можно определить $E_{0x}(x)$ с любой степенью точности. В ряде случаев оказывается достаточным приближение

$$E_{0x} \approx \text{const}, \quad (23)$$

что соответствует распределению поля в падающей волне типа H_{0m} . Для приближения (23) можно написать выражение проводимости в явной форме:

$$\begin{aligned} \frac{1-R}{1+R} = & \frac{b_1}{b_2} \frac{2k_b}{1k_b} \frac{\mu_1}{\mu_2} + \\ & + j_1 k_b \frac{\sum_{n=1}^{\infty} 2/\Gamma_n^1 b_1^2/n^2 \pi^2 \left[\sin \frac{\pi n}{b_1} h_2 - \sin \frac{\pi n}{b_1} h_1 + \dots + \sin \frac{\pi n}{b_1} h_p - \sin \frac{\pi n}{b_1} h_{p-1} \right]^2}{[h_2 - h_1 + h_4 - h_3 + \dots + h_p - h_{p-1}]^2} + \\ & - j \frac{b_2 k_b^2}{b_2 k_b} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} 2}{\Gamma_n^{11} n^2 \pi^2} \frac{b_2^2}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi n}{b_2} (h_0 + h_2) - \sin \frac{\pi n}{b_2} (h_0 + h_1) + \dots + \sin \frac{\pi n}{b_2} (h_0 + h_p) - \right. \\ & \left. \dots - \sin \frac{\pi n}{b_2} (h_0 - h_{p-1}) \right]^2}{[h_2 - h_1 + h_4 - h_3 + \dots + h_p - h_{p-1}]^2}. \quad (24) \end{aligned}$$

Так как волновод рассматривался в плоскости E , то реактивная часть проводимости B есть существенно положительная величина, что указывает на емкостный характер реактивности. Формула (24) включает в себя, как частные случаи, задачи, приведенные в работах [1,2,4] (емкостная диафрагма, емкостная полоска, сочленение двух волноводов с различными высотами). Аналогичным образом можно произвести расчет для плоскости H ; при этом шунтирующая проводимость B имеет индуктивный характер.

* Подробное доказательство ввиду его громоздкости здесь не приводится. Однако для функционалов, подобных (20), можно такое доказательство найти в работах [1,7].

2. РАСЧЕТ ОТРАЖЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ СДВИГОМ ФЛАНЦЕВОГО СОЧЛЕНЕНИЯ

Рассмотрим фланцевое сочленение волноводов, имеющее сдвиг h в плоскости E (см. рис. 2). Применяя формулу (24), можно получить для шунтирующей проводимости B следующее выражение:

$$B = \pm 4k_b \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \frac{b^2}{n^2 \pi^2} \sin^2 \frac{n\pi}{b} h}{(b-h)^2} \quad (25)$$

Легко видеть, что данное фланцевое соединение по своим электрическим свойствам совершенно аналогично свойствам соответствующей емкостной диафрагмы. Напротив, сдвиг фланцев в плоскости H аналогичен индуктивной диафрагме. Таким образом, фланцевое сочленение можно с успехом использовать для целей согласования, заменяя им соответствующие согласующие диафрагмы. Практически это легче осуществить, ибо фланцевые сочленения всегда имеются в любом волноводном тракте.

Полученная выше формула (25) подвергалась экспериментальной проверке в 3-х см диапазоне волн на волноводном стандарте 10×23 мм.

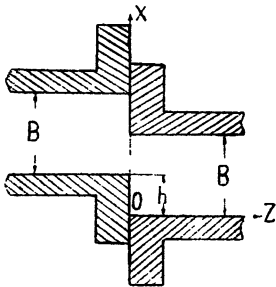


Рис. 2.

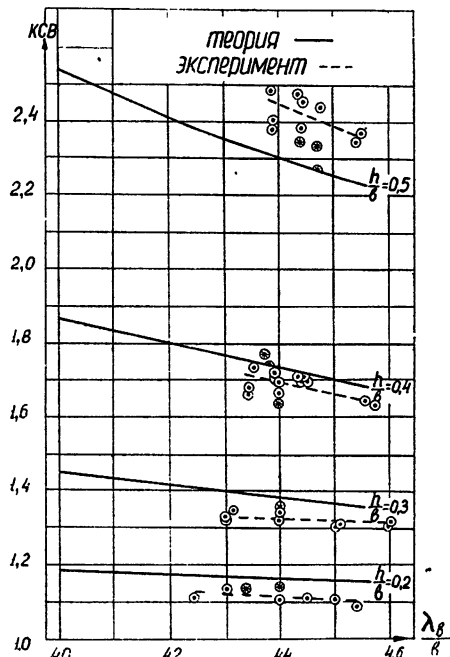


Рис. 3.

Результаты расчетов зависимости коэффициента стоячей волны (КСВ) от длины волны в волноводе $\lambda_g = 2\pi/k_b$, проведенные на основе (25), а также соответствующие экспериментальные данные приведены на рис. 3. Из графика видно, что приближение (23), используемое для построения (25), даже при больших параметрах перекрытия h/b (вплоть до $h/b = 0,5$, когда поле $E_{0x}(x)$ сильно отличается от поля падающей волны), обеспечивает все же совпадение результатов теории и эксперимента в пределах ошибки последнего. Погрешность измерений составляет 5–6%. Относительно небольшая величина погрешности эксперимента была достигнута, главным образом, за счет тщательной градуировки детекторной головки измерительной линии типа ЗЗИ. Соответствие между теорией и экспериментом нарушается при параметрах перекрытия $h/b \geq 0,6$, что указывает на недостаточность приближения (23). Однако практиче-

ски оказывается возможным использовать формулу (25) даже для случаев $h/b > 0,5 \div 0,6$, когда расхождение между теорией и экспериментом составляет $10 \div 20\%$. При уточнении $E_{0x}(x)$ по методу Ритца эти ошибки быстро уменьшаются с увеличением степени полинома q , аппроксимирующего $E_{0x}(x)$.

В заключение приношу благодарность В. Л. Патрушеву и В. И. Калинину за руководство и обсуждение результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
2. Справочник по волноводам, изд. Сов. радио, М., 1952.
3. Л. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, изд. Сов. радио, М., 1952.
4. Л. Д. Гольдштейн и Н. В. Зернов, Электромагнитные поля и волны, изд. Сов. радио, М., 1956.
5. С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
6. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
7. R. E. Collin, I. Brown, Proc. IEE, **103c**, 121 (1956).
8. E. D. Farmer, Proc. IEE, **103c**, 145 (1956).
9. E. L. Chu, W. W. Hansen, J. Appl. **20**, 280 Phys. (1949).
10. R. S. Elliott, Trans. IRE, **AP-2**, 71 (1954).

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
10 ноября 1957 г.