ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 3 РАДИОФИЗИКА 1958

# О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА УСТУПЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА В ВОЛНОВОДЕ

*В. И. Таланов*

Получено строгое решение задачи о дифракции электромагнитных волн на уступе поверхностного импеданса в волноводе, образованном двумя параллельными плоскостями—импедансной и идеально проводящей. Приведены выражения для полей, коэффициентов отражения и трансформации. Рассмотрен предельный случай открытой системы со скачкообразным изменением поверхностного импеданса направляющей плоскости, а также проведено обобщение на случай трехмерных полей.

В настоящей работе исследовано влияние скачкообразного изменения поверхностного импеданса одной из стенок волновода на распространение в нем электромагнитных волн. Ввиду большой сложности решения подобной задачи в общей постановке, мы ограничились рассмотрением простейшей системы, состоящей из двух параллельных плоскостей (рис. 1), одна из которых ($x=d$) идеально проводящая, а на другой ($x=0$) заданы граничные условия вида [1]-

$$E_z = ZH_y|_{x=0}; \qquad E_y = 0|_{x=0}. \tag{I. 1}$$

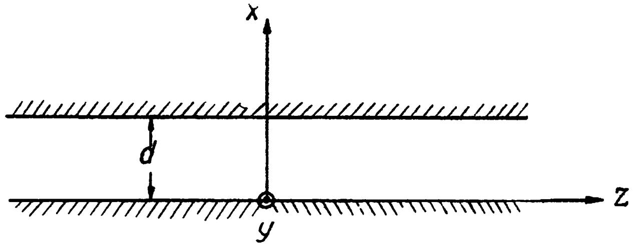


Рис. 1.

Предполагается, что поглощение в плоскости $x=0$ отсутствует: $\mathrm{Re}\,Z=0$. Поверхностный импеданс $Z$ претерпевает скачок в сечении $z=0$*:

$$Z=\begin{cases} Z^{(1)}=\mathrm{const}^{(1)}, & z<0 \\ Z^{(2)}=\mathrm{const}^{(2)}, & z>0 \end{cases}. \tag{I. 2}$$

Подобная идеализация оказывается приемлемой при изучении ребристых замедляющих систем, если период структуры мал по сравнению с расстояниями, на которых поле в волноводе существенно изменяется [2]. При этом некоторые искажения квазистатического поля вблизи сечения $z=0$ не выходят за пределы точности исходных условий (I. 1).

Изучение дифракции электромагнитных волн на неоднородности поверхностного импеданса типа (I. 2) представляет интерес как

* В статье используется практическая рационализированная система единиц.

для электроники сверхвысоких частот, где ребристые замедляющие системы находят применение в ряде электронных приборов, так и для антенной техники, где они применяются в качестве излучателей типа антенн с поверхностными волнами. Поэтому после получения в 1., 2. строгого решения задачи о дифракции двухмерных волн в волноводе 3. был выполнен предельный переход к случаю открытой направляющей плоскости. В 4. проведено обобщение на трехмерные волны с фиксированной структурой поля в поперечном направлении $y$.

## 1. ВЫВОД И РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Произвольное двухмерное (не зависящее от координаты $y$) поле в рассматриваемой системе всегда может быть представлено в виде суперпозиции ТЕ и ТМ полей по отношению к $y$ — направлению. Но, поскольку для набегающих волн типа ТМ при любых значениях импеданса $Z$ направляющая система ведет себя как регулярная, то интерес, очевидно, представляет только отыскание дифракционного поля для ТЕ — волн. Все компоненты этого поля выражаются через $y$ — составляющую напряженности магнитного поля $H_y(x, z) \equiv H(x, z)$, удовлетворяющую уравнению *

$$\Delta H + k^2 H = 0 \tag{1.1}$$

при граничных условиях:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0\,|_{x=d}\,; \qquad \frac{\partial H}{\partial x} + kQH = 0\,|_{x=0}, \tag{1.2}$$

где
$$Q = \begin{cases} Q^{(1)} = -iZ^{(1)}/Z_0, & z < 0, \\ Q^{(2)} = -iZ^{(2)}/Z_0, & z > 0 \end{cases} \quad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon};\ Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon} \tag{1.3}$$

($\varepsilon$, $\mu$ — проницаемости однородной среды, заполняющей волновод).

Для определенности будем считать, что слева набегает волна вида:

$$H_n^{(1)} = A_n^{(1)} \frac{\cos \varkappa_n^{(1)}(x-d)}{\cos \varkappa_n^{(1)} d}\, e^{-ih_n^{(1)} z}, \tag{1.4}$$

где $A_n^{(1)}$ — амплитуда поля на плоскости $x=0$, а $\varkappa_n^{(1)}$ и $h_n^{(1)} = \sqrt{k^2 - \varkappa_n^{(1)2}}$ — волновые числа номера $n$, определяемые условиями (1.2) для регулярного волновода слева от уступа ($z<0$).

Решение уравнения (1.1) для дифракционного поля, удовлетворяющее первому из условий (1.2), можно представить в виде:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} F(h) \cos \varkappa (x-d)\, e^{-ihz}\, dh, \tag{1.5}$$

где
$$\varkappa = \sqrt{k^2 - h^2}.$$

Уравнение для определения функции $F(h)$ получим, подставляя $H + H_n^{(1)}$ во второе из условий (1.2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varkappa\, e^{i\varkappa d} F(h)\, \Psi(h, Q^{(1)}) e^{-ihz}\, dh = 0, \qquad z < 0,$$

---

* Фактор временной зависимости $e^{i\omega t}$ всюду опускается

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varkappa e^{i\varkappa d} F(h) \Psi(h, Q^{(2)}) e^{-ihz} dh = -2iA_n^{(1)} k (Q^{(2)} - Q^{(1)}) e^{-ih_n^{(1)}z}, \quad z > 0, \quad (1.6)$$

где

$$\Psi(h, Q^{(p)}) = 1 + \frac{ikQ^{(p)}}{\varkappa} - \left(1 - \frac{ikQ^{(p)}}{\varkappa}\right) e^{-2i\varkappa d} \quad (p = 1,2). \quad (1.7)$$

Система функциональных уравнений (1.6) может быть решена методом Винера-Хопфа [3,4]. Необходимое для применения этого метода разложение

$$\Psi(h, Q^{(p)}) = \Psi_1(h, Q^{(p)}) \Psi_2(h, Q^{(p)}) \quad (1.8)$$

было получено в работе автора [5]. В (1.8) $\Psi_1(h, Q^{(p)})$ и $\Psi_2(h, Q^{(p)})$ — функции, голоморфные и не имеющие нулей соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, причем обе функции стремятся к единице при $|h| \to \infty$ в тех полуплоскостях, где они голоморфны. Выражения для вспомогательных функций $\Psi_1(h, Q^{(p)})$ и $\Psi_2(h, Q^{(p)})$, а также для $|\Psi_1(h, Q^{(p)})|^2$ и $|\Psi_2(h, Q^{(p)})|^2$, приведены в приложении. С помощью леммы Жордана и теоремы вычетов нетрудно убедиться, что решением уравнений (1.6) является функция

$$F(h) = A_n^{(1)} \frac{k(Q^{(2)} - Q^{(1)}) \Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(1)})}{\pi \Psi_2(h_h^{(1)}, Q^{(2)})} \frac{e^{-i\varkappa d}}{\varkappa \Psi_2(h, Q^{(1)}) \Psi_1(h, Q^{(2)})} \frac{1}{h - h_n^{(1)}}. \quad (1.9)$$

## 2. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ ТРАНСФОРМИРОВАННЫХ И ОТРАЖЕННЫХ ВОЛН

Подставляя (1.9) в (1.5), получим выражение для поля в волноводе, которое, используя (1.8), удобно представить в виде:

$$H^{(1)} = \frac{A_n^{(1)}}{2\pi i} \frac{k(Q^{(2)} - Q^{(1)}) \Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(1)})}{\Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(2)})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1(h, Q^{(1)})}{\Psi_1(h, Q^{(2)})} \frac{\cos\varkappa(x-d)}{\Delta(h, Q^{(1)})} \frac{e^{-ihz}}{h - h_n^{(1)}} dh + H_n^{(1)} \quad (z \leqslant 0), \quad (2.1)$$

$$H^{(2)} = \frac{A_n^{(1)}}{2\pi i} \frac{k(Q^{(2)} - Q^{(1)}) \Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(1)})}{\Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(2)})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_2(h, Q^{(2)})}{\Psi_2(h, Q^{(1)})} \frac{\cos\varkappa(x-d)}{\Delta(h, Q^{(2)})} \frac{e^{-ihz}}{h - h_n^{(1)}} dh + H_n^{(1)} \quad (z \geqslant 0), \quad (2.2)$$

где

$$\Delta(h, Q^{(p)}) = \varkappa \sin\varkappa d + kQ^{(p)} \cos\varkappa d \quad (p = 1,2). \quad (2.3)$$

Подынтегральные выражения в (2.1) и (2.2) голоморфны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, за исключением точек $h = -h_m^{(1)}$ для (2.1) и $h = h_m^{(2)}$, $h = h_n^{(1)}$ * для (2.2), являющихся корнями уравнений:

$$\varkappa_m^{(p)} \operatorname{tg} \varkappa_m^{(p)} d = -kQ^{(p)}; \quad \varkappa_m^{(p)2} + h_m^{(p)2} = k^2 \quad (m = 0,1,2\ldots), \quad (2.4)$$

определяющих волновые числа $h_m^{(p)}$ собственных типов волн $H_m^{(p)}$ в регулярных волноводах слева ($p = 1$) и справа ($p = 2$) от уступа. Индексом $m$ условимся обозначать волну, „поперечное" волно-

* Мы предполагаем, что среда, заполняющая волновод, обладает сколь угодно малым, но конечным поглощением ($Im k = -k_1 \neq 0$, $k_1 > 0$), так что $Im h_m^{(p)} < 0$. В окончательных результатах можно положить $k_1 = 0$.

вое число которой $\varkappa_m^{(p)}$ стремится к $m\pi/d$ при $Q^{(p)} \to 0$. При этом волна нулевого порядка $H_0^{(p)}$ будет „медленной“ ($h_0^{(p)} > k$) при $Q^{(p)} > 0$ и „быстрой“ ($h_0^{(p)} < k$) при $Q^{(p)} < 0$. При $Q^{(p)} \to 0$, $h_0^{(p)} \to k$ эта волна переходит в ТЕМ волну между двумя идеально проводящими плоскостями.

Вычисляя интегралы в (2.1) и (2.2) по теореме вычетов, получим

$$H^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} R_{nm} H_{-m}^{(1)} + H_{+n}^{(1)} \qquad (z \leqslant 0), \tag{2.5}$$

$$H^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm} H_{+n}^{(2)} \qquad (z > 0), \tag{2.6}$$

где знак (+) соответствует волнам, бегущим в $+z$, а знак (—) — в $-z$-направлении. Будем считать, что нормировка полей выбрана такой, что парциальные потоки энергии собственных типов волн не зависят ни от номера волны $m$, ни от номера волновода $p$. Это относится и к падающей волне $H_{+n}^{(1)}$. При этом коэффициенты $R_{nm}$ и $T_{nm}$ в (2.5) и (2.6) будут равны:

$$R_{nm} = -\frac{k\,(Q^{(2)} - Q^{(1)})\,\Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(1)})\,\Psi_2(h_m^{(1)}, Q^{(1)})}{\Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(2)})\,\Psi_2(h_m^{(1)}, Q^{(2)})}\,\frac{\varkappa_n^{(1)}\,\varkappa_m^{(1)}}{\sqrt{h_n^{(1)} h_m^{(1)} \delta_n^{(1)} \delta_m^{(1)} (h_m^{(1)} + h_n^{(1)})}}, \tag{2.7}$$

$$T_{nm} = \frac{k\,(Q^{(2)} - Q^{(1)})\Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(1)})\,\Psi_2(h_m^{(2)}, Q^{(2)})}{\Psi_2(h_n^{(1)}, Q^{(2)})\,\Psi_2(h_m^{(2)}, Q^{(1)})}\,\frac{\varkappa_n^{(1)}\,\varkappa_m^{(2)}}{\sqrt{h_n^{(1)} h_m^{(2)} \delta_n^{(1)} \delta_m^{(2)} (h_m^{(2)} - h_n^{(1)})}}, \tag{2.8}$$

где $\delta_m^{(p)} = \left[(\varkappa_m^{(p)2} + k^2 Q^{(p)2})\,d - kQ^{(p)}\right]^{1/2} \qquad (p = 1,2).$

Как видно из (2.7) и (2.8),

$$R_{nm}(Q^{(1)}, Q^{(2)}) = R_{mn}(Q^{(1)}, Q^{(2)}); \quad T_{nm}(Q^{(1)}, Q^{(2)}) = T_{mn}(Q^{(2)}, Q^{(1)}),$$

что является следствием теоремы взаимности.

С помощью формулы (А.3), приведенной в приложении, могут быть получены в замкнутом виде выражения для $|R_{nm}|^2$ и $|T_{nm}|^2$ в случае $Im h_m^{(p)} = Im h_n^{(p)} = 0$ (распространяющиеся волны в регулярном волноводе без потерь):

$$|R_{nm}|^2 = \left|\frac{4h_n^{(1)} h_m^{(1)}}{(h_n^{(1)} + h_m^{(1)})^2} \prod_{k=0}^{l_1}{}' \frac{h_k^{(1)} + h_n^{(1)}}{h_k^{(1)} - h_n^{(1)}}\,\frac{h_k^{(1)} + h_m^{(1)}}{h_k^{(1)} - h_m^{(1)}} \prod_{k=0}^{2} \frac{h_k^{(2)} - h_n^{(1)}}{h_k^{(2)} + h_n^{(1)}}\,\frac{h_k^{(2)} - h_m^{(1)}}{h_k^{(2)} + h_m^{(1)}}\right|, \tag{2.9}$$

$$|T_{nm}|^2 = \left|\frac{4h_n^{(1)} h_m^{(2)}}{(h_n^{(1)} - h_m^{(2)})^2} \prod_{k=0}^{1}{}' \frac{h_k^{(1)} + h_n^{(1)}}{h_k^{(1)} - h_n^{(1)}} \prod_{k=0}^{l_1} \frac{h_k^{(1)} - h_m^{(2)}}{h_k^{(1)} + h_m^{(2)}} \prod_{k=0}^{l_2} \frac{h_k^{(2)} - h_n^{(1)}}{h_k^{(2)} + h_n^{(1)}} \prod_{k=0}^{l_2}{}' \frac{h_k^{(2)} + h_m^{(2)}}{h_k^{(2)} - h_m^{(2)}}\right|, \tag{2.10}$$

где $l_1 + 1$ — число типов волн, распространяющихся в первом, а $l_2 + 1$ — во втором волноводе.

Штрих у $\prod$ означает, что сомножитель номера $k = m$ (или $n$) должен быть опущен.

На рис. 2 в качестве примера приведены кривые для $|R_{00}|^2$, $|T_{00}|^2$, $|R_{01}|^2$ и $|T_{01}|^2$ при $Q_1 = 1$, $Q_2 = 0$ и изменении параметра $kd$ от 0 до 5,0. Характерным является наличие изломов кривых при переходе через критические значения параметра $kd$, соответствующие возникновению новых распространяющихся волн в одном из волноводов. В простейшем случае, когда

$$\operatorname{Re} \varkappa_0^{(1,2)} \leqslant k \leqslant \varkappa_1^{(1,2)}, \tag{2.11}$$

выражения для модулей коэффициентов отражения ($R_{00}$) и трансформации ($T_{00}$) могут быть представлены в виде:

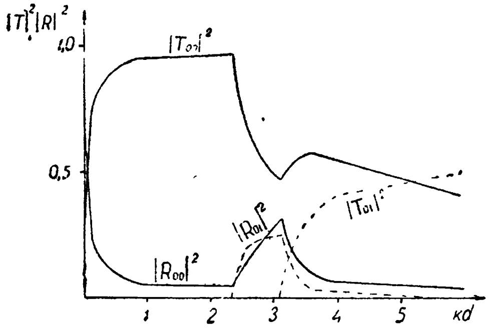


Рис. 2.

$$|R_{00}| = \frac{|Z_{tr_0} - Z_{tr_0}^{(1)}|}{Z_{tr_0}^{(1)} + Z_{tr_0}^{(2)}};$$

$$|T_{00}| = \frac{2\sqrt{Z_{tr_0}^{(1)} Z_{tr_0}^{(2)}}}{Z_{tr_0}^{(1)} + Z_{tr_0}^{(2)}}, \tag{2.12}$$

где $Z_{tr_0}^{(p)} = h_0^{(p)} k / Z_0 = E_{x_0}^{(p)} / H_{y_0}^{(p)}$ — характеристический импеданс волны нулевого порядка. Интересно отметить, что формулы (2.12) совпадают с соответствующими выражениями в теории длинных линий.

Общие выражения для фаз коэффициентов $R_{nm}$ и $T_{nm}$ могут быть получены из (2.7) и (2.8), если воспользоваться формулой (А.1) приложения.

В частном случае (2.11) для фаз коэффициентов отражения $R_{00} = |R_{00}| e^{-i\theta_r}$ и трансформации $T_{00} = |T_{00}| e^{-i\theta_t}$ волны нулевого порядка имеем:

$$\theta_r = -[\arg(Q^{(1)} - Q^{(2)}) + 2\sum]; \quad Q_t = -[\sum^{(1)} - \sum^{(2)}], \tag{2.13}$$

$$\sum^{(q)} = \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{h_0^{(q)} (\tilde{h}_m^{(2)} - \tilde{h}_m^{(1)})}{h_0^{(q)2} + \tilde{h}_m^{(1)} \tilde{h}_m^{(2)}} \quad (q = 1,2), \tag{2.14}$$

$$\tilde{h}_m^{(p)} = \sqrt{\varkappa_m^{(p)2} - k^2} \quad (p = 1,2). \tag{2.14}$$

Сопоставление формул (2.13) с (2.12) показывает, что при выполнении условий (2.11) уступ поверхностного импеданса может быть представлен на эквивалентной схеме в виде сочленения двух волноводов, электрические длины которых отличаются от действительных на величины $\sum^{(1)}$ для первого и $\sum^{(2)}$ для второго волновода.

Чтобы найти приближенное выражение для суммы ряда $\sum^{(q)}$, представим его в виде $\sum^{(q)} = \sum^{N(q)} + R_N^{(q)}$, где $\sum^{N(q)}$ — сумма $N$ первых членов.

Исходя из (2.4), нетрудно показать, что в случае, когда $N$ удовлетворяет условию

$$N \gg \frac{2}{\pi^2} \text{макс} \{kdQ^{(1,2)}\},$$

для собственных чисел $\varkappa_m^{(p)}$ при $m \geqslant N$ может быть получено асимптотическое выражение:

$$\varkappa_m^{(p)} \sim \frac{m\pi}{d} - \frac{kQ^{(p)}}{m\pi}.$$

Подставляя эти значения $\varkappa_m^{(p)}$ в остаточный член $R_N^{(q)}$ и предполагая, что $k^2 \ll \varkappa_{N+1}^{(p)2}$, будем иметь следующую приближенную формулу:

$$R_N^{(q)} \simeq \frac{h_0^{(q)} k d^2 \left(Q^{(2)} - Q^{(1)}\right)}{\pi^3} \left[1{,}202 - \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^3}\right]. \tag{2.15}$$

Остаточный член $R_N^{(q)}$ дает вклад экспоненциально спадающих полей высших порядков. Практически при $h_0^{(q)} k d^2 \left(Q^{(2)} - Q^{(1)}\right) \leqslant 1$ в (2.14) достаточно учитывать лишь несколько первых членов, так как при этом наибольший вклад в энергию, запасенную в реактивном поле вблизи уступа, обусловлен экспоненциально спадающими полями низших порядков.

## 3. ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА УСТУПЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА В ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЕ

Как уже говорилось выше, для теории антенн поверхностных волн представляет большой интерес предельный случай рассмотренной задачи, когда верхняя стенка $x = d$ удаляется в бесконечность $(d \to \infty)$. При этом мы приходим к задаче о дифракции плоской волны на уступе поверхностного импеданса (1.2)*, решение которой позволяет, в частности, рассматривать явления, происходящие на свободном конце плоской антенны с поверхностной волной.

Для выполнения предельного перехода достаточно считать, что $Im k = -k_1 \neq 0$ $(k_1 > 0)$, $k_1 \ll |k|$ и $Im \varkappa < 0$, а в окончательных результатах положить $k_1 = 0$.

Поле набегающей волны (1.4), используя (2.4), представим в виде

$$H_n^{(1)} \equiv \tilde{H} = \tilde{A}\left(e^{i\tilde{\varkappa}x} + \frac{\tilde{\varkappa} - ikQ^{(1)}}{\tilde{\varkappa} + ikQ^{(1)}} e^{-i\tilde{\varkappa}x}\right) e^{-i\tilde{h}z}, \tag{3.1}$$

где обозначено:

$$\tilde{\varkappa} = \varkappa_n^{(1)}; \quad \tilde{h} = h_n^{(1)}; \quad \tilde{A} = A_n^{(1)} \frac{\varkappa_n^{(1)} + ikQ^{(1)}}{2\varkappa_n^{(1)}}.$$

Волновые числа $\tilde{\varkappa}$ и $\tilde{h}$ теперь следует рассматривать как постоянные распространения, а $\tilde{A}$ — как амплитуду падающей волны:

$$H = \tilde{A} e^{i\tilde{\varkappa}x - i\tilde{h}z}. \tag{3.2}$$

Предельное значение $\Psi(h, Q^{(p)})$ равно

$$\Psi_\infty(h, Q^{(p)}) = 1 + \frac{ikQ^{(p)}}{\varkappa}, \tag{3.3}$$

* Частные случаи этой задачи были рассмотрены ранее в работе [6] (явление так называемой „береговой рефракции“) и работах [7,8] (дифракция набегающей поверхностной волны). Пользуюсь случаем поблагодарить Н. Г. Тренева, любезно предоставившего автору возможность ознакомиться с его результатами до опубликования их в печати.

предельные значения вспомогательных функций $\Psi_{1\infty}$ и $\Psi_{2\infty}$, а также $|\Psi_{1\infty}|^2$ и $|\Psi_{2\infty}|^2$ приведены в приложении*.

Выполняя предельный переход в решении (2.1) и (2.2), получим:

$$H^{(1)} = \widetilde{H} + \\ + \frac{\widetilde{A}\widetilde{\varkappa}\, k(Q^{(2)} - Q^{(1)})\Psi_{2\infty}(\widetilde{h}, Q^{(1)})}{\pi(\widetilde{\varkappa} + ikQ^{(1)})\Psi_{2\infty}(\widetilde{h}, Q^{(2)})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_{1\infty}(h, Q^{(1)})}{\Psi_{1\infty}(h, Q^{(2)})} \frac{e^{-i\varkappa x - ihz}}{(\varkappa + ikQ^{(1)})(h - \widetilde{h})} dh \quad (z \leqslant 0),$$

$$H^{(2)} = \widetilde{H} + \\ + \frac{\widetilde{A}\widetilde{\varkappa}\, k(Q^{(2)} - Q^{(1)})\Psi_{2\infty}(\widetilde{h}, Q^{(1)})}{\pi(\widetilde{\varkappa} + ikQ^{(1)})\Psi_{2\infty}(\widetilde{h}, Q^{(2)})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_{2\infty}(h, Q^{(2)})}{\Psi_{2\infty}(h, Q^{(1)})} \frac{e^{-i\varkappa x - ihz}}{(\varkappa + ikQ^{(2)})(h - \widetilde{h})} dh \quad (z \geqslant 0). \tag{3.4}$$

В частном случае при $\widetilde{\varkappa} = ikQ^{(1)}$ $(Q^{(1)} > 0)$ формулы (3.4) дают решение упомянутой выше задачи о дифракции на уступе (1.2) набегающей слева поверхностной волны

$$H_s = \widetilde{A}_s e^{-kQ^{(1)}x - ih_s^{(1)}z}, \quad h_s^{(1)} = k\sqrt{1 + Q^{(1)2}}.$$

Из (3.4) с помощью (A.5 — A.8) легко могут быть найдены выражения для полей поверхностной и пространственной волн, коэффициентов отражения и трансформации поверхностной волны и т. п.

---

Полученное решение нетрудно обобщить на случай дифракции трехмерных ТЕ-волн при фиксированной, например, синусоидальной зависимости поля от координаты $y$. Такая зависимость имеет место, в частности, в волноводе с идеально проводящими стенками. Полагая

$$H_y = u(x, z)\begin{pmatrix} \cos\beta y \\ \sin\beta y \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

получим, что функция $u(x, z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta u + \alpha^2 u = 0 \tag{4.2}$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0\Big|_{x=d}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha^2 Q}{k} u = 0\Big|_{x=0}, \tag{4.3}$$

где $\alpha^2 = k^2 - \beta^2$, а $Q$ определяется формулой (1.3). Для отыскания функции $u(x, z)$ достаточно в полученных ранее формулах произвести замену

$$H \to u; \; k \to \alpha; \; Q^{(1.2)} \to \frac{\alpha Q^{(1.2)}}{k}.$$

Очевидно также, что в силу принципа двойственности путем замены $E \to H$; $H \to -E$; $Z \to \frac{1}{Z}\left(Q \to -\frac{1}{Q}\right)$ решение задачи о дифракции ТЕ-волн переводится в решение задачи о дифракции ТМ-волн в волноводе, образованном двумя плоскостями $x = 0$ и $x = d$, на которых $H_y = 0|_{x=d}$; $E_y = -ZH_z|_{x=0}$. В предельном случае $d \to \infty$ получается решение для поля ТМ-волн в открытой системе.

---

* Разложение функции $1 + ikQ^{(p)}/\varkappa$ на множители $\Psi_{1\infty}$ и $\Psi_{2\infty}$ было получено в [6].

Наконец, следует отметить, что с помощью метода изображений на основе результатов настоящей работы может быть решена задача о дифракции волн на импедансной полуплоскости внутри волновода, а также рассмотрен предельный случай дифракции плоских волн на импедансной полуплоскости в свободном пространстве*.

В заключение считаю приятным долгом поблагодарить М. А. Миллера за обсуждение результатов работы и просмотр рукописи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем выражения для вспомогательных функций $\Psi_1(h, Q^{(p)})$, $\Psi_2(h, Q^{(p)})$ и квадратов их модулей [5]:

$$\Psi_2(h, Q^{(p)}) = N^{(p)}(k+h)^{-1/2} e^{-\frac{ikd}{\pi}M(\tau)} \prod_{m=0}^{\infty} (1+h/h_m^{(p)}) e^{\frac{d}{\pi}(\tau_m - \tau_{m-1})h}, \tag{A.1}$$

$$\Psi_1(h, Q^{(p)}) = \Psi_2(-h, Q^{(p)}.) \tag{A.2}$$

$$|\Psi_2(h, Q^{(p)})|^2 = \left|\Psi(h, Q^{(p)}) \left(\frac{k-h}{k+h}\right)^{1/2} \prod_{m=0}^{l_p} \frac{1+h/h_m^{(p)}}{1-h/h_m^{(p)}} e^{-hd-\Phi(h)d}\right|, \tag{A.3}$$

$$|\Psi_1(h, Q^{(p)})|^2 = |\Psi_2(-h, Q^{(p)})|^2. \tag{A.4}$$

Формулы (A.1.3) и (A.1.4) относятся к случаю, когда $Imh = 0$. Здесь введены обозначения:

$$M(\tau) = \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)\cos\tau + \sin\tau; \quad N^{(p)} = \sqrt{2ik(\sin kd + Q^{(p)}\cos kd)};$$

$$\sin\tau = h/k; \quad \cos\tau = \varkappa/k; \quad \sin\tau_m^{(p)} = h_m^{(p)}/k; \quad \cos\tau_m^{(p)} = \varkappa_m^{(p)}/k;$$

$h_m^{(p)}$ — корни уравнения (2.4);

$$\Phi(h) = \begin{cases} -\tilde{\varkappa} & h \geqslant k \\ 0 & |h| \leqslant k; \\ \tilde{\varkappa} & h < -k \end{cases} \qquad \tilde{\varkappa} = \sqrt{h^2 - k^2},$$

$l_p + 1$ — число типов распространяющихся волн в волноводе номера $p$. Соответствующие выражения для $\Psi_{1\infty}(h, Q^{(p)})$; $\Psi_{2\infty}(h, Q^{(p)})$; $|\Psi_{1\infty}(h, Q^{(p)})|^2$; $|\Psi_{2\infty}(h, Q^{(p)})|^2$ в предельном случае $d \to \infty$ следующие [5,6]:

$$\Psi_{2\infty}(h, Q^{(p)}) = \sqrt{\frac{h_s^{(p)} + h}{k+h}} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\tau+\pi/2+i\sigma^{(p)}}^{-\tau+\pi/2-i\sigma^{(p)}} \frac{u}{\sin u} du\right\}, \tag{A.5}$$

$$\Psi_{1\infty}(h, Q^{(p)}) = \Psi_{2\infty}(-h, Q^{(p)}), \tag{A.6}$$

$$|\Psi_{2\infty}(h, Q^{(p)})|^2 = \frac{h_s^{(p)} + h}{k+h} \begin{cases} 1 & h \geqslant -k \\ \dfrac{\tilde{\varkappa} - kQ^{(p)}}{\tilde{\varkappa} + kQ^{(p)}} & h \leqslant k, \end{cases} \tag{A.7}$$

$$|\Psi_{1\infty}(h, Q^{(p)})|^2 = \Psi_{2\infty}(-h, Q^{(p)})|^2, \tag{A.8}$$

где $\operatorname{sh}\sigma^{(p)} = Q^{(p)}$; $\operatorname{ch}\sigma^{(p)} = h_s^{(p)}/k = \sqrt{1 + Q^{(p)2}}$.

Формулы (A.7) и (A.8), как и (A.3), (A.4), справедливы при $Imh = 0$.

---

* Решение этой последней задачи было доложено автором на Научной сессии НТОРЭ им. А. С. Попова в мае в 1957 г. в Москве.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Миллер, ДАН СССР, **87**, 4, 571 (1952).
2. М. А. Миллер, ЖТФ, **25**, 11, 1972 (1955).
3. Е. Титчмарщ, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 429—432, 1948.
4. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, изд. Сов. радио, М., 1953.
5. В. И. Таланов, ЖТФ, **28**, 6, 1275 (1958).
6. Г. А. Гринберг, В. А. Фок, Исследования по распространению радиоволн. II, изд. АН СССР, М.—Л., 69—97, 1948.
7. G. Weill, Ann. Radioelectr., **10**, 41, 228 (1955).
8. Н. Г. Тренев, Радиотехника и электроника, **3**, 1, 27 (1958).

Исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 января 1958 г.