

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ТОМОГРАФИИ

Б. И. Коренблюм, С. И. Тетельбаум, А. А. Тютин

Рассматривается новый способ получения послойных рентгеновских изображений, основанный на переработке информации, содержащейся в рентгеношифрограмме, снятой при переменном ракурсе объекта.

Приводится вывод соответствующего интегрального уравнения и его решение, а также описывается функциональная схема счетно-решающего телевизионного устройства, позволяющего получить рентгеновское изображение выбранного слоя объекта.

Особенностью применяемых до настоящего времени методов томографии является то, что на теневое изображение исследуемого слоя объекта накладываются изображения всех остальных его слоев, „размазанные“ в тем большей степени, чем дальше расположены эти слои от слоя, подлежащего исследованию. Это обстоятельство существенно ограничивает возможности рентгенотехнического изучения достаточно тонких слоев объекта и получения четких послойных изображений. Тем не менее, томография и томофлюорография находят ряд важных практических применений [1].

Основываясь на представлениях о возможности компенсации искажений изображений [2], были предложены методы рентгенотехники, позволяющие определять значение локального коэффициента ослабления рентгеновского излучения в каждом элементе трехмерного объекта и получать объемное изображение последнего [3,4]. С помощью этих методов могут быть осуществлены также схемы рентгенографического исследования практически сколь угодно тонких слоев, причем получаемое изображение не будет зависеть от характеристик каких-либо других слоев объекта.

В настоящей статье рассматривается одна из таких схем. Исследуется практически наиболее важный случай относительно близкого расположения источника излучения, когда объект облучается узким веерообразным пучком. При равномерном вращении объекта вокруг оси, перпендикулярной исследуемому слою, на фотопленке, перемещающейся параллельно вдоль этой оси, получается рентгеношифрограмма, заключающая в себе данные, необходимые для получения изображения слоя. Счетно-решающее телевизионное устройство, осуществляющее аппаратное решение соответствующего интегрального уравнения, преобразует информацию, заключенную в рентгеношифрограмме, в изображение исследуемого слоя объекта.

В статье приводится интегральное уравнение задачи и его решение, а также описывается функциональная схема соответствующего счетно-решающего устройства.

I. ПОЛУЧЕНИЕ РЕНТГЕНОШИФРОГРАММЫ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть объект А (рис. 1) облучается достаточно узким веерообразным пучком рентгеновского излучения, образуемого монохроматическим (ненáправленным в плоскости исследуемого сечения)

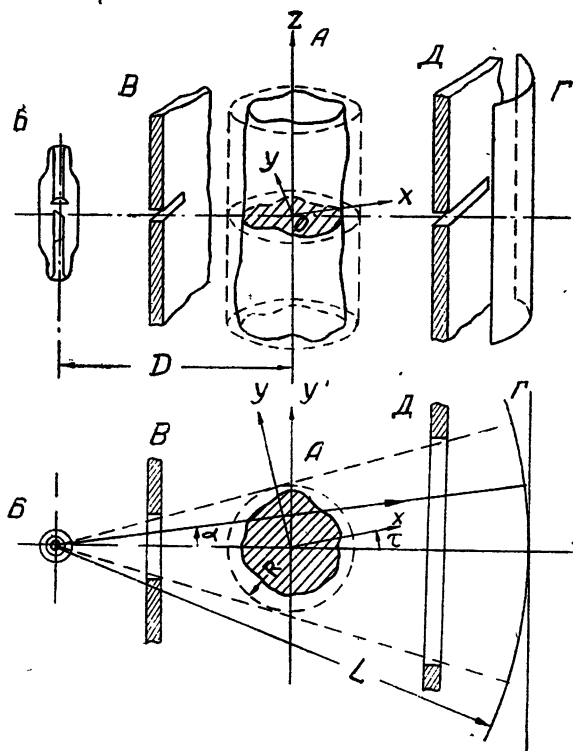


Рис. 1. Схема расположения аппаратуры и объекта для получения рентгеношифrogramмы.

источником Б и щелевым коллиматором В*. Для получения рентгеношифrogramмы слоя необходимо определить величину локального коэффициента ослабления рентгеновского излучения $F(x, y)$, являющегося функцией жестко связанных с объектом геометрических координат, расположенных в плоскости xu слоя (обозначения см. на рис. 1). Дополним объект в пределах цилиндра радиуса R , с осью z , перпендикулярной плоскости xu , положив внутри этого цилиндра (вне объекта) $F(x, y)$ равной нулю. Определим интенсивность излучения $F(\alpha, \tau)$, проходящего через объект и падающего на рентгенофотопленку Г, расположенную на цилиндрической поверхности радиуса L , ось которой параллельна z и проходит через источник А. Искомая интенсивность будет обратно пропорциональна L^2 и тем меньше, чем больше результирующее ослабление излучения, вызываемое всеми элементами объекта, находящимися на практически прямом пути каждого пучка излучения. С точностью до постоянного множителя K

$$F(\alpha, \tau) = \frac{K}{L^2} \exp \left[-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \int_{x'_1}^{x'_2} F(x, y) dx' \right], \quad (1)$$

где

$$x = x' \cos \tau + (D + x') \operatorname{tg} \alpha \sin \tau; \quad y = -x' \sin \tau + (D + x') \operatorname{tg} \alpha \cos \tau;$$

$$x'_{1,2} = \frac{-D \operatorname{tg}^2 \alpha \pm \sqrt{R^2 + (R^2 - D^2) \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

После проявления экспонированной пленки на ней будет получено изображение в виде узкой полоски, характеризующее функцию $F(\alpha, \tau)$ для фиксированного τ .

* В схеме рис. 1 предусмотрен второй щелевой коллиматор Д, экранирующий пленку от рассеянного рентгеновского излучения.

Будем равномерно вращать объект вокруг оси z , одновременно перемещая пленку со скоростью v вдоль оси z . В этом случае на пленке будет записана функция $F(\alpha, \tau)$ при плавном изменяющемся ракурсе τ — рентгеношифрограмма, содержащая информацию, необходимую и достаточную для получения рентгеноснимка слоя. Зависимость плотности почернения пленки от экспозиции также может быть учтена.

Возможность получения рентгеновского изображения слоя, т. е. определения неизвестной функции $F(x, y)$, характеризующей распределение локального коэффициента ослабления излучения по сечению объекта на основании найденной из опыта функции $F(\alpha, \tau)$, вытекает из факта единственности непрерывного решения интегрального уравнения (1).

2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Будем предполагать, что функция $F(x, y)$ трижды непрерывно дифференцируема. Уравнение (1) после логарифмирования может быть записано так:

$$\int_l F(x, y) dl = \Phi(\eta, \sigma), \quad (2)$$

где интегрирование ведется по прямой l , имеющей уравнение

$$x \sin \sigma + y \cos \sigma = \eta,$$

причем

$$\sigma = \tau - \alpha; \quad \eta = D \sin \alpha; \quad (3)$$

$$\Phi(\eta, \sigma) = \begin{cases} -\ln F(\alpha, \tau) + \ln \frac{K}{L^2} & (|\eta| \leq R) \\ 0 & (|\eta| > R) \end{cases} \quad (4)$$

Итак, наша задача свелась к следующему: зная интегралы от функции $F(x, y)$ по всевозможным прямым l , найти саму функцию $F(x, y)$. Аналогичные задачи рассматривались в ряде работ (см., например, [5, 6]). Ниже приводится решение этой задачи, основанное на теории интеграла Фурье.

Найдем преобразование Фурье неизвестной функции $F(x, y)$:

$$g(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) e^{-ir, r} dx dy, \quad (5)$$

где обозначено: $r_1 = (u, v)$; $r = (x, y)$. Интеграл (5) можно преобразовать следующим образом:

$$g(u, v) = \frac{1}{|r_1|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it} dt \int_{r_1 r=t} F(x, y) dl. \quad (6)$$

Полагая

$$u = \rho \cos \theta; \quad v = \rho \sin \theta \quad (7)$$

и используя (2), (4), перепишем (6) так:

$$g(u, v) = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it} \Phi\left(\frac{t}{\rho}, \frac{\pi}{2} - \theta\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho\eta} \Phi\left(\eta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) d\eta. \quad (8)$$

Как известно из теории интеграла Фурье, при сделанных предположениях $g(u, v)$ убывает при $\rho \rightarrow \infty$ по крайней мере как ρ^{-3} . Поэтому можно применить формулу обращения интеграла Фурье

$$F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ir_1 r} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho\eta} \Phi\left(\eta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) d\eta \right] dudv, \quad (9)$$

причем внешний двойной интеграл сходится абсолютно. Однако переменить порядок интегрирования не представляется здесь возможным, так как тройной интеграл не является абсолютно сходящимся. Поэтому мы вводим фактор сходимости $e^{-\delta|r_1|}$ и переходим к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Переходя к полярным координатам и обозначая

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi, \quad (10)$$

получим из (9):

$$F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho\eta} \Phi\left(\eta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) d\eta \right] e^{-\delta\rho} e^{i r \cos(\theta - \varphi)} \rho d\rho d\theta = \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi\left(\eta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) d\eta d\theta}{[r \cos(\theta - \varphi) - \eta + \delta i]^2}.$$

Так как функции $F(x, y)$ и $\Phi(\eta, \sigma)$ действительны, то можно отбросить мнимую часть в подынтегральном выражении (11):

$$F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[r \cos(\theta - \varphi) - \eta]^2 - \delta^2}{\{[r \cos(\theta - \varphi) - \eta]^2 + \delta^2\}^2} \Phi\left(\eta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) d\eta d\theta = \quad (12)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[r \sin(\varphi + \sigma) - \eta]^2 - \delta^2}{\{[r \sin(\varphi + \sigma) - \eta]^2 + \delta^2\}^2} \Phi(\eta, \sigma) d\eta d\sigma.$$

Чтобы перейти здесь к пределу, воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Если $f(x)$ дважды дифференцируема и ограничена на $(-\infty, +\infty)$, $f'(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ убывает быстрее, чем некоторая степень $|x|^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$), то:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + \delta^2}{(x^2 + \delta^2)^2} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(x)}{x} dx,$$

где интеграл правой части понимается в смысле главного значения по Коши:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{f'(x)}{x} dx \right] = \int_0^{\infty} \frac{f'(x) - f'(-x)}{x} dx.$$

Доказательство этой леммы опускаем.

Применяя эту лемму, преобразуем (12) к виду

$$F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi(\eta, \sigma) d\eta, \quad (13)$$

$$\eta - r \sin(\varphi + \sigma)$$

где интеграл берется в смысле главного значения относительно точки $\eta = r \sin(\varphi + \sigma)$.

$$\begin{aligned} \text{Пусть, например, } \Phi(\eta, \sigma) &= 1 \text{ при } |\eta| < R, \\ \Phi(\eta, \sigma) &= 0 \text{ при } |\eta| \geq R. \end{aligned}$$

В этом случае производная $\frac{\partial}{\partial \eta} \Phi(\eta, \sigma) = \delta(\eta + R) - \delta(\eta - R)$ есть разность двух функций Дирака. Формула (13) дает

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{R - r \sin(\varphi + \sigma)} + \frac{1}{R + r \sin(\varphi + \sigma)} \right] d\sigma = \frac{1}{\pi \sqrt{R^2 - r^2}} \quad (|r| < R).$$

Заметим, что для $|r| > R$ формулой (13) нельзя непосредственно пользоваться, так как при тех значениях σ , при которых $r \sin(\varphi + \sigma) = \pm R$, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} \Phi(\eta, \sigma)}{\eta - r \sin(\varphi + \sigma)} d\eta$$

теряет смысл. Однако формула (12) применима и при $|r| > R$. Вообще, формула (12) не предполагает непрерывности, а тем более дифференцируемости функции $\Phi(\eta, \sigma)$.

Теперь легко получить решение уравнения (1). Для этого нужно в (13) подставить вместо $\Phi(\eta, \sigma)$ функцию (4) и перейти к переменным α, τ по формулам (3). Получим

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\tau \int_{-\arcsin \frac{R}{D}}^{+\arcsin \frac{R}{D}} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \ln F(\alpha, \tau)}{(x' + D) \sin \alpha - y' \cos \alpha} d\alpha \quad (14)$$

или после замены переменных α, τ на $\alpha, \alpha + \sigma$:

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma \int_{-\arcsin \frac{R}{D}}^{+\arcsin \frac{R}{D}} \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F(\alpha, \alpha + \sigma)}{D \sin \alpha - (x \sin \sigma + y \cos \sigma)} d\alpha, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \tau - y \sin \tau, \\ y' &= x \sin \tau + y \cos \tau \end{aligned}$$

(внутренние интегралы в (14) и (15) берутся в смысле главного значения по Коши соответственно относительно точек $\alpha = \arctg \frac{y'}{x' + D}$ и $\alpha = \arcsin \left[\frac{1}{D} (x \sin \sigma + y \cos \sigma) \right]$). При этом функцию $F(\alpha, \tau)$ нужно считать периодически продолженной по второму аргументу за пределы основного интервала $0 \leq \tau \leq 2\pi$.

3: ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА ТЕЛЕВИЗИОННОГО СЧЕТНО-РЕШАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

При построении блок-схемы (рис. 2) учтено, что подынтегральная функция имеет простой полюс внутри интервала изменения переменной α .

Рентгеношифрограмма „прочитывается“ в датчике, состоящем из передающей телевизионной трубки (А), фотоэлектронного умножителя (Б) и механической системы движения шифрограммы, укрепленной на вращающемся барабане (В). С выхода датчика электрический сигнал (видеосигнал), амплитуда которого в момент времени t соответствует плотности почернения шифрограммы $F(\alpha, \alpha + \sigma)$ в точке с координатами α, σ ,

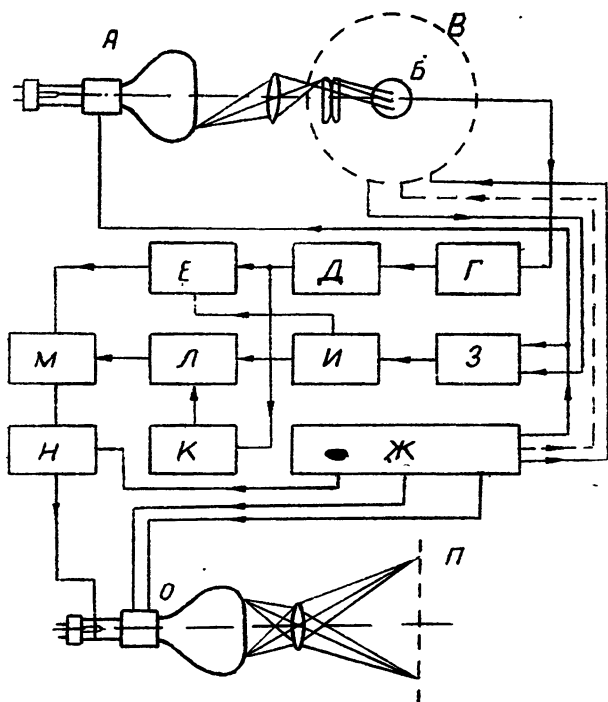


Рис. 2. Функциональная схема счетно-решающего телевизионного устройства.

поступает в логарифмирующий каскад (Г), затем дифференцируется (каскад Д) и подается в умножитель Е. Одновременно из блока разверток (Ж) через связанные с механической системой вращения барабана (В) потенциометрические датчики, вырабатывающие напряжения, пропорциональные $\sin \sigma$ и $\cos \sigma$, через суммирующий каскад (З) и генератор обратной функции (И) в умножитель поступает напряжение, соответствующее функции, обратной знаменателю подынтегрального выражения.

Для моделирования функции, имеющей полюс, используется следующий прием. Выделяется интеграл с пределами интегрирования, расположенными по обе стороны от полюса ($\alpha_i \pm \epsilon$), а затем последний заменяется приближенным выражением:

$$\int_{\alpha_i - \epsilon}^{\alpha_i + \epsilon} \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F(\alpha, \alpha + \sigma)}{D \sin \alpha - (x \sin \sigma + y \cos \sigma)} d\alpha \approx 2\epsilon \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln F(\alpha, \alpha + \sigma) \right|_{\alpha = \alpha_i},$$

где

$$\alpha_i = \arcsin \left[\frac{1}{D} (x \sin \sigma + y \cos \sigma) \right].$$

Для получения этого слагаемого используется второй дифференцирующий каскад (К) и „ключ“ (Л), „вырезающий“ из напряжения на выходе этого дифференцирующего каскада ту часть, которая соответствует интервалу 2ϵ . Управление ключом осуществляется со стороны генератора обратной функции, так что интервал 2ϵ обеспечивается автоматически.

Напряжение на выходе умножителя (Е) суммируется с напряжением, поступающим с выхода ключа (Л), интегрируется в интеграторе (М) и поступает на ключ (Н). Определение значения искомой функции $F(x, y)$ для каждого элемента объекта представляет собой единичный цикл вычисления счетно-решающего устройства. Ключ (Н), управляемый из блока разверток (Ж), устанавливает одинаковые начальные условия для каждого цикла вычисления. С ключа (Н) напряжение, соответствующее искомой функции $F(x, y)$, подводится к управляющей сетке приемной телевизионной трубки (О), снабженной системой развертки.

В результате на экране приемной трубки для выбранной точки с координатами x, y получается отметка, яркость которой пропорциональна коэффициенту ослабления рентгеновских лучей $F(x, y)$ в соответствующем элементе сечения объекта. Изображение с экрана приемной телевизионной трубки проектируется на фотопленку (П).

Логарифмирующий, дифференцирующий и другие каскады счетно-решающей части устройства строятся по известным принципам математического моделирования [7].

Следует отметить, что для получения изображения слоя необходимо переработать значительное количество информации. Поэтому при скорости работы, которая выбирается, исходя из времени после свечения современных телевизионных трубок, предназначенных для установок с бегающим лучом (0,3 мксек), и допустимой скорости вращения барабана (3000 об/мин), изображение слоя с четкостью 10^4 элементов может быть получено за время порядка 5 мин. При этом тракт счетно-решающего устройства должен быть рассчитан на полосу частот до 1,0 мгц.

Соображения о возможности исследования в сплошном спектре частот рентгеновского излучения и использования условного цветового контрастирования изложены в [3], [4].

В настоящее время в Киевском политехническом институте строится первая экспериментальная установка для получения рентгеновских изображений тонких слоев по описанной в этой статье схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Феоктистов, Метрические свойства рентгеновского изображения и их применение в рентгенодиагностике, Медгиз, М., 1954.
2. С. И. Тетельбаум, Изв. Киевского политехнич. ин-та, 21, 222 (1956).
3. С. И. Тетельбаум, Изв. Киевского политехнич. ин-та, 22, 154 (1957).
4. С. И. Тетельбаум, Доповиди, АН УССР, 5, 453 (1957).
5. П. О. Костелянец, Ю. Г. Решетняк, Усп. математич. наук, 9, 3, 135 (1954).
6. А. А. Хачатуров, Усп. математич. наук, 9, 3, 205 (1954).
7. Библиография литературы по вопросам математического моделирования, Автоматика и телемеханика, 17, 279—288 (1956).

Киевский политехнический
институт

Поступила в редакцию
7 января 1958 г.