

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

М. А. Миллер

Рассматривается движение одиночной заряженной частицы в неоднородном электромагнитном поле высокой частоты. Показано, что в среднем по времени это движение при определенных условиях можно считать потенциальным. Проведено обобщение усредненных уравнений движения на случай одновременного действия постоянного магнитного и высокочастотного электромагнитного полей. Получены решения некоторых частных задач: 1) отражение частицы от высокочастотного потенциального барьера, 2) фокусировка прямолинейного пучка заряженных частиц полями бегущих и стоящих электромагнитных волн, 3) локализация частиц в ограниченной области пространства.

Большинство принципов использования электромагнитных полей для целей управления движением заряженных частиц основывается на зависимости скоростей и траекторий этих частиц от фазы электромагнитного поля, т. е. включает в себя в том или ином виде фазовую „рассортировку“ частиц. Только в двух очевидных предельных случаях фазовая „рассортировка“ отсутствует: при движении частиц в постоянных полях и при движении в быстро переменных полях достаточно высокой частоты, когда за период внешнего поля частица не успевает существенно продвинуться по своей средней траектории. Первый случай хорошо изучен. Что же касается второго, то здесь существует ряд интересных особенностей и возможностей, которым до настоящего времени еще не было уделено достаточного внимания. Цель работы состоит в попытке частичного восполнения этого пробела.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать нерелятивистское движение заряженной частицы во внешнем высокочастотном электромагнитном поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (1.1)$$

Частота ω выбирается достаточно большой, но ограниченной сверху условием

$$\omega \ll \frac{mc^3}{e^2}, \quad (1.2)$$

где m — масса, e — заряд частицы, c — скорость света в вакууме*. При этом, как известно [1], можно пренебречь силами торможения, обусловленными собственным излучением частицы, и записать уравнение ее движения в виде **

$$\ddot{\mathbf{r}} = \eta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \eta/c [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)], \quad (1.3)$$

где $\eta = e/m$.

* Используется гауссова система единиц.

** Всюду далее речь будет идти о движении частицы в вакууме.

Конечно, при изучении движения плотных сгустков или пучков частиц даже в односкоростном приближении в уравнении (1.3) должны фигурировать действующие поля, которые сами определяются видом решения уравнения (1.3). Но и для таких задач информация о характере движения одиночной частицы в заданном внешнем поле может оказаться полезной—облегчающей процедуру отыскания самосогласованного решения.

2. ВЫВОД УСРЕДНЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Если интересоваться только движением в среднем за период высокочастотного поля и считать это движение достаточно медленным, уравнение (1.3) можно существенно упростить. Представим его решение в виде суммы медленно меняющейся функции $R(t)$ и быстро (с периодом внешнего поля) осциллирующей функции $\rho(t)$. Под медленным движением подразумевается такое, при котором среднее время пролета частицы через участок длины L (характеризующий расстояние, на котором внешнее поле претерпевает заметные изменения) значительно превышает период высокочастотного поля, т. е.

$$|\dot{R}| \ll L\omega. \quad (2.1)$$

Считая функцию $\rho(t)$ также величиной малой по сравнению с этим расстоянием

$$|\dot{\rho}| \ll L \quad (2.2)$$

и удерживая в разложении полей (1.1) по степеням $|\rho|/L$ только члены первого порядка малости, получим вместо (1.3) следующее приближенное уравнение

$$\ddot{R} + \ddot{\rho} = \eta \vec{E}(R, t) + \eta(\vec{\rho} \nabla) \vec{E}(R, t) + \eta/c [\dot{R}H(R, t)] + \\ + \eta/c [\rho H(R, t)] + \eta/c [\dot{R}(\vec{\rho} \nabla) H(R, t)] + \eta/c [\dot{\rho}(\vec{\rho} \nabla) H(R, t)]. \quad (2.3)$$

Возможность дальнейших упрощений зависит от соотношения между напряженностями электрического и магнитного полей. Если исключить из рассмотрения случай квазимагнитостатического поля ($|H| \gg |E|$)*, т. е. считать, что $|E| \gg |H|$ (квазиэлектростатическое поле) или $|E| \sim |H|$ (поле электромагнитной волны), то в пределах нерелятивистского приближения для функции $\rho(t)$ будем иметь

$$\ddot{\rho} = \eta \vec{E}(R, t). \quad (2.4)$$

Приближенное решение этого уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям частицы **, запишется в виде

$$\ddot{\rho} = \frac{\eta}{i\omega} \vec{E}(R) e^{i\omega t}; \quad \dot{\rho} = -\frac{\eta}{\omega^2} \vec{E}(R) e^{i\omega t}. \quad (2.5)$$

* По поводу решения задачи о движении частицы в медленно изменяющемся магнитном поле см. работы [2,3,4]. Заметим, что и в высокочастотных электромагнитных полях существуют области, в которых $|H| \gg |E|$. Однако при скоростях, отличных от нуля, заряженная частица не может в них задерживаться и с неизбежностью попадает в области поля $|H| \sim |E|$, где ее движение происходит в соответствии с уравнением (2.6).

** Решение однородного уравнения (2.4) можно отнести в нулевое приближение, т. е. в функцию $R(t)$.

Подставляя (2.4) и (2.5) в (2.3) и проводя усреднение по периоду высокочастотного поля, после ряда упрощающих преобразований приходим к усредненному уравнению для функции $R(t)$

$$\ddot{R} = -\nabla \Phi, \quad (2.6)$$

где

$$\Phi = (\eta/2\omega)^2 |E|^2. \quad (2.7)$$

Функцию $\Phi(R)$ мы будем называть высокочастотным потенциалом. Нетрудно убедиться в том, что градиент этого потенциала дает силу (отнесенную к массе m), действующую на осциллятор (2.5) в среднем за период. Важным обстоятельством является независимость потенциала Φ , а следовательно, и усредненных траекторий частиц от знака их зарядов.

Уравнение (2.6) не утрачивает смысла и в случае одновременного воздействия полей различных частот: $E(r, t) = \sum E_n(R) e^{i\omega_n t}$

$H(r, t) = \sum H_n(R) e^{i\omega_n t}$. Однако выражение для Φ будет несколько другим:

$$\Phi = (\eta/2)^2 \sum |E_n/\omega_n|^2. \quad (2.8)$$

При этом ограничения (2.1) и (2.2) относятся не только к частотам ω_n , но также и ко всем разностным частотам $\omega_n - \omega_m$.

3. УЧЕТ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Обобщим уравнение (2.6) на тот случай, когда наряду с высокочастотным полем имеется также постоянное однородное магнитное поле $H_c = H_c z_0$ (z_0 — единичный вектор). Для этого представим поле (1.1) в виде

$$\begin{aligned} E(r, t) &= E_{||}(R) e^{i\omega t} + E_{\perp}(R) e^{i\omega t}, \\ H(r, t) &= H_{||}(R) e^{i\omega t} + H_{\perp}(R) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где значком „||“ отмечены z -составляющие векторов, а значком „ \perp “ — поперечные составляющие, т. е. проекции на плоскость $z = \text{const}$. Последние в свою очередь могут быть разложены на векторы с правой ($E_{\perp}^{(+)}, H_{\perp}^{(+)}$) и левой ($E_{\perp}^{(-)}, H_{\perp}^{(-)}$) круговой поляризацией.

Тогда вместо (2.5) будем иметь следующие выражения для функции $\rho(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{||} &= -\eta/\omega^2 E_{||}(R) e^{i\omega t}, \\ \dot{\rho}_{\perp}(t) &= -\frac{\eta}{\omega^2 - \omega_H^2} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_H}{\omega} \right) E_{\perp}^{(+)}(R) e^{i\omega t} + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{\omega_H}{\omega} \right) E_{\perp}^{(-)}(R) e^{i\omega t} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Входящая в (3.2) циклотронная частота $\omega_H = \eta/c H_c$, а также гармоники этой частоты $n\omega_H$, в силу ограничений (2.1) и (2.2), должны отличаться от частоты внешнего поля ω^* .

* Вблизи значений $\omega = n\omega_H$ решения (3.2) утрачивают смысл, так как не учитывают резонансного взаимодействия частиц с полем; последнее играет существенную роль в случае заметных изменений амплитуды E на расстояниях порядка размеров ларморовой окружности.

Подстановка (3.1) и (3.2) в (2.3) и проведение усреднения по времени приводят к усредненному уравнению для $\vec{R}(t)$ *.

$$\ddot{\vec{R}} - \omega_H [\vec{R} z_0] = -\nabla \Phi, \quad (3.3)$$

где $\Phi = (\eta/2\omega)^2 \left\{ |E_{\parallel}|^2 + \frac{\omega}{\omega + \omega_H} |E_{\perp}^{(+)}|^2 + \frac{\omega}{\omega - \omega_H} |E_{\perp}^{(-)}|^2 \right\}$. (3.4)

В частном случае линейно поляризованного поля $|E_{\perp}^{(+)}|^2 = |E_{\perp}^{(-)}|^2 = 1/2 |E_{\perp}|^2$, и для Φ имеем

$$\Phi = (\eta/2\omega)^2 \left\{ |E_{\parallel}|^2 + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2} |E_{\perp}|^2 \right\}. \quad (3.5)$$

4. ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

Усредненные уравнения (2.6) и (3.3) существенно проще исходного уравнения (1.3), так как их правые части не содержат в явном виде зависимости от времени и являются потенциальными векторами. Это позволяет получить первый интеграл движения в общем случае, не конкретизируя вида потенциала Φ ,

$$\frac{(\vec{R})^2}{2} + \Phi(\vec{R}) = \text{const.} \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) можно интерпретировать как интеграл усредненной энергии. Действительно, для движения в чисто высокочастотном поле, представляя функцию Φ , определяемую формулой (2.7), через скорость осцилляторного движения (2.5) и подставляя в (4.1), получим

$$\frac{(\vec{R})^2}{2} + \frac{(\vec{p})^2}{2} = \text{const.} \quad (4.2)$$

Здесь и дальше волнистая черта обозначает операцию усреднения. Мы видим, что кинетическая энергия быстро осциллирующего движения играет роль своеобразной потенциальной энергии. При полной остановке частицы в масштабе медленного движения ($\vec{R} = 0$) происходят наиболее интенсивные осцилляции с частотой внешнего поля.

Аналогичная ситуация имеет место и при движении частицы в присутствии постоянного магнитного поля. Но в этом случае помимо кинетической энергии необходимо ввести в рассмотрение энергию взаимодействия w_{B3} (на единицу массы) между внешним магнитным полем H_c и магнитным диполем, обусловленным вращением частицы с частотой ω .

$$\tilde{w}_{B3} = \frac{\omega_H \omega}{4} \{ |\vec{p}_{\perp}^{(+)}|^2 - |\vec{p}_{\perp}^{(-)}|^2 \}. \quad (4.3)$$

Тогда, в соответствии с равенствами (3.4) и (3.2), интегралу (4.1) можно придать вид

$$\frac{(\vec{R})^2}{2} + \frac{(\vec{p})^2}{2} + \tilde{w}_{B3} = \text{const.} \quad (4.4)$$

Итак, характер усредненного движения частицы определяется рельефом высокочастотного потенциала Φ . Благодаря этому удается снизить порядок усредненных уравнений и получить прибли-

* Уравнение (3.3) справедливо при значениях ω как меньших, так и больших значений ω_H . Однако следует иметь в виду, что при $|\omega_H| \gg \omega$ усреднение по периоду $2\pi/\omega$ включает в себя и усреднение по периоду $2\pi/\omega_H$, поэтому быстро осциллирующие решения уравнения (3.3) должны быть исключены.

женные решения ряда важных задач, не прибегая к трудоемким вычислениям.

Ниже будут приведены некоторые типичные примеры высокочастотных потенциальных рельефов и рассмотрены решения трех задач: отражение частицы от высокочастотного барьера, фокусировка пучка частиц и локализация частиц в конечной области пространства.

5. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ РЕЛЬЕФЫ В ПОЛЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН

Практически все типичные высокочастотные потенциальные рельефы могут быть созданы полями плоских неоднородных волн. Как известно, компоненты векторов электрической и магнитной напряженности в таких волнах выражаются через две скалярных функций $\varphi^e(x, y)$ и $\varphi^m(x, y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\Delta_{\perp} \varphi^{e,m} + k^2 \varphi^{e,m} = 0 \quad (5.1)$$

и описывающих соответственно поля типа ТМ и ТЕ по отношению к z -направлению. Для распространяющейся в этом направлении волны имеем

$$\left. \begin{aligned} E_{\parallel} &= z_0 \frac{x^2}{ik} \varphi^e e^{i\omega t - ihz}, \\ \text{TM: } E_{\perp} &= -h/k \nabla \varphi^e e^{i\omega t - ihz}, \\ H_{\perp} &= [\nabla \varphi^e z_0] e^{i\omega t - ihz}; \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{\parallel} &= z_0 \frac{x^2}{ik} \varphi^m e^{i\omega t - ihz}, \\ \text{TE: } H_{\perp} &= -h/k \nabla \varphi^m e^{i\omega t - ihz}, \\ E_{\perp} &= -[\nabla \varphi^m z_0] e^{i\omega t - ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Будем считать квадраты поперечных волновых чисел чисто действительными ($\operatorname{Im} k^2 = 0$)*. Тогда продольные волновые числа h в (5.2) и (5.3) будут принимать только следующие значения:

$$h = \begin{cases} \pm \sqrt{k^2 - x^2}, & k^2 > x^2, \\ \mp i \sqrt{x^2 - k^2} = \mp i h_m, & k^2 < x^2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Если поля (5.2) и (5.3) существуют раздельно (линии передачи с идеально проводящими границами, симметричные поля в кругло-цилиндрических системах с изотропным поверхностным импедансом границ и т. п.), то для отыскания соответствующих им потенциальных рельефов достаточно подставить (5.2) или (5.3) в формулу (2.7). В случае одиночной распространяющейся волны типа ТМ получим

$$\Phi_{\text{TM}} = (\eta/2\omega)^2 \frac{x^4}{k^2} \left\{ |\varphi^e|^2 + \frac{h^2}{x^4} |\nabla \varphi^e|^2 \right\}, \quad (5.5)$$

а для распространяющейся волны типа ТЕ —

$$\Phi_{\text{TE}} = (\eta/2\omega)^2 |\nabla \varphi^m|^2. \quad (5.6)$$

Выражения (5.5) и (5.6) не зависят от координаты z , т. е. описывают двухмерный потенциальный рельеф. В случае экспоненциально убывающих волн (например, в волноводах, возбуждаемых на частотах ниже критической) структура рельефа в сечениях

* Это имеет место во всех цилиндрических линиях передачи при отсутствии диссипации энергии и при изотропности поверхностных импедансов границ раздела сред, формирующих линию [5].

$z = \text{const}$ остается прежней, но появляется фактор $e^{\mp 2h_M z}$, превращающий этот рельеф в трехмерный

$$\Phi = \Phi_0 e^{\mp 2h_M z}. \quad (5.7)$$

На рис. 1 приведены графики функций Φ , построенные по формулам (5.5) и (5.6), для некоторых типов волн в волноводах с идеально проводящими стенками прямоугольного и кругового сечения. В полях типа ТМ распределение потенциала зависит от скорости распространения волны. Например, потенциал $\Phi_{TM_{11}}$ в волноводе прямоугольного сечения при $h^2 \pi^2 < x^4 a^2$ (a — размер стенки волновода) имеет в центре максимум (рис. 1г, кривая 1)

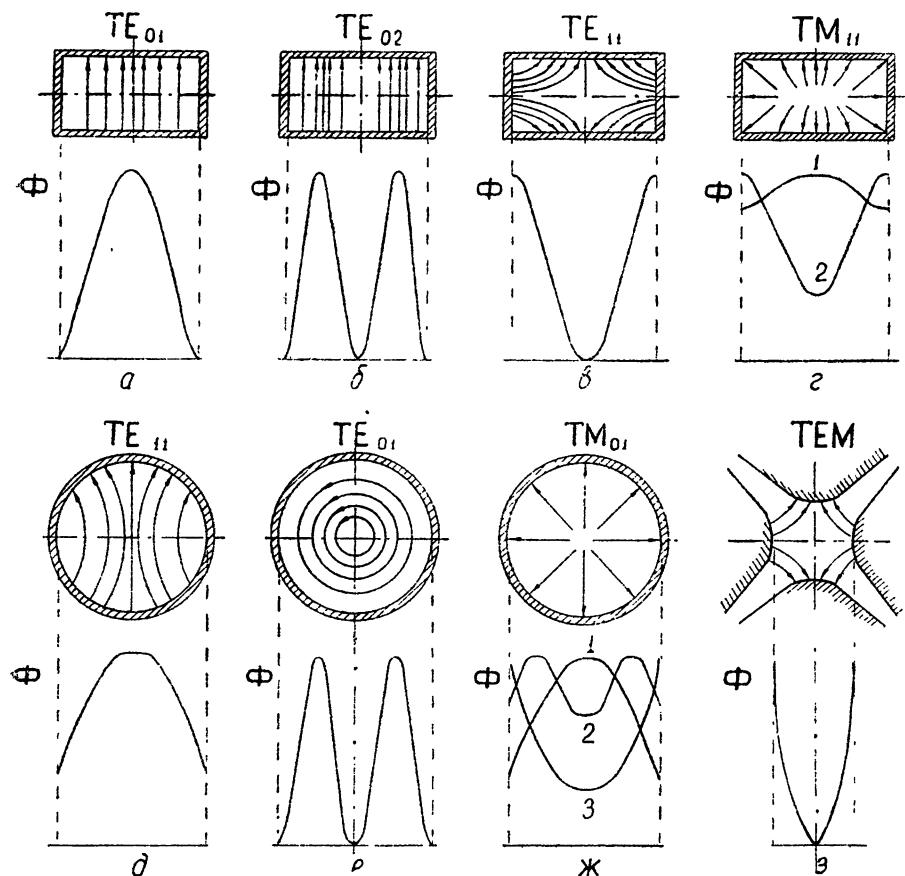


Рис. 1.

а при $h^2 \pi^2 > x^4 a^2$ — минимум (рис. 1г, кривая 2). Аналогично и для круглого волновода потенциал $\Phi_{TM_{01}}$ максимальен на оси при $h < \sqrt[4]{2}$ (рис. 1ж, кривая 1) и минимальен при $h > \sqrt[4]{2}$ (рис. 1ж, кривая 2). В случае медленных волн типа TM_{01} ($x^2 < 0$, $h^2 > k^2$) функция $\Phi_{TM_{01}}$ всегда имеет минимум на оси, что и показано на том же рисунке 1ж (кривая 3) для $h^2 \approx -x^2$.

Специальный интерес представляет волна типа TEM ($x^2 = 0$), потенциальный рельеф в которой во всем сечении $z = \text{const}$ имеет квазистатический характер,

$$\Phi_{\text{TEM}} = (\eta/2\omega)^2 |\nabla \varphi|^2. \quad (5.8)$$

На рис. 1з этот рельеф воспроизведен для одной из волн четырехпроводной линии, образованной идеально проводящими

гиперболическими цилиндрами. В декартовых координатах с центром на оси соответствующее этой волне решение уравнения (5.1) представляет собой электростатический потенциал поля двумерного квадруполя

$$\varphi = \text{const} (x^2 - y^2). \quad (5.9)$$

Для отыскания распределения потенциала Φ в стоячих неоднородных волнах необходимо взять сумму встречных волн (5.2) или (5.3) с одинаковыми амплитудами. В результате получим

$$\Phi_{\text{тм}} = (\eta/2\omega)^2 \frac{x^4}{k^2} \left\{ |\varphi^e|^2 \cos^2 hz + \frac{h^2}{x^4} |\nabla \varphi^e|^2 \sin^2 hz \right\}, \quad (5.10)$$

$$\Phi_{\text{тв}} = (\eta/2\omega)^2 |\nabla \varphi^m|^2 \cos^2 hz. \quad (5.11)$$

Выражения (5.10) и (5.11) описывают качественно различные рельефы. В стоячих ТЕ-волнах существуют плоскости ($z = \text{const}$) нулевого потенциала, в то время как в стоячих ТМ-волнах потенциал Φ принимает нулевые значения только в отдельных точках сечения $z = \text{const}$. Если в такой точке магнитное поле обращается в нуль (например, $hz = \pi/2$), то в ее окрестности потенциальный рельеф (5.10) будет иметь квазиэлектростатическую структуру и может быть описан с помощью электростатического потенциала $\varphi_{\text{эл. ст.}}$

$$\varphi_{\text{эл. ст.}} = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \varphi_{nm}, \quad (5.12)$$

$$\varphi_{nm} = C_{nm} r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m \varphi,$$

где r, θ, φ — сферические координаты с центром в точке $\Phi_{\text{тм}} = 0$, а P_n^m — присоединенные полиномы Лежандра. В частности, высокочастотный потенциал Φ , обусловленный полем одиночного мультиполя, запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{n>0} = & (\eta/2\omega)^2 C_{nm} r^{2(n-1)} \left\{ n^2 (P_n^m)^2 \cos^2 m \varphi + \right. \\ & \left. + (P_n^m)^2 \sin^2 \theta \cos^2 m \varphi + m^2 (P_n^m)^2 \frac{\sin^2 m \varphi}{\sin^2 \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Поскольку у функции, заключенной в (5.13) в фигурные скобки, в случае $m=0$ нет нулей ни при каких значениях θ и φ , потенциал (5.13) при $m=0, n>1$ имеет в точке $r=0$ абсолютный минимум.

Все выписанные выше формулы для высокочастотных потенциалов соответствовали одиночным собственным полям. Разумеется, это не исчерпывает всех возможностей, так как путем одновременного возбуждения волн нескольких типов с различными волновыми числами и на разных частотах можно обеспечить практически любое распределение потенциала Φ^* .

6. ОТРАЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ОТ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО БАРЬЕРА. ОДНОМЕРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ

Рассмотрим в качестве первого примера движение частицы в сторону потенциального барьера, заданного функцией $\Phi(z)$, монотонно и достаточно медленно растущей при положительных значе-

* Мы не рассматривали также потенциальные рельефы при наличии постоянного магнитного поля, хотя в этом случае существуют некоторые интересные дополнительные возможности. Например, при $|\omega_H| < \omega$ и $E \perp H_c$, как ясно непосредственно из (3.5), потенциал Φ , оставаясь прежним по структуре, изменяет знак, т. е. потенциальные ямы превращаются в потенциальные холмы и т. п.

ниях z и равной нулю при отрицательных z . Пусть в момент $t=0$ частица имела скорость $\dot{z}=v$ ($v^2=2|\eta|V$) и находилась в начале координат ($z=0$). Согласно интегралу энергии (4.1), она продвинется в $+z$ -направлении только до точки $z=z_1$, где потенциал $\Phi(z)$ достигает значения

$$\Phi(z_1) = \frac{v^2}{2} = |\eta| V. \quad (6.1)$$

Подставляя в (6.1) выражение (2.7) и учитывая (2.2) и (2.5), мы получаем условия отражения частицы от потенциального барьера в выражении через амплитуду напряженности поля на вершине барьера

$$\frac{L\omega^2}{|\eta|} \gg |E| > 2\omega \left(\frac{V}{|\eta|} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2)$$

На рис. 2 построены зависимости предельных значений неравенств (6.2) как функции частоты для случая отражения электронов от потенциального барьера протяженностью $L=\lambda/4$. Сплошная линия соответствует левому пределу $|E| = \pi c / 2 |\eta|$, пунктирные линии — правому пределу для $V = 1\text{eV}$, 10^2eV , 10^4eV . При энергиях, превышающих 10 кэВ , пределы в (6.2) настолько сближаются, что расчет становится некорректным. Впрочем, начиная с этих энергий, следует вводить релятивистскую поправку в исходные уравнения (1.3). В первом приближении это приводит к расширению пределов изменения $|E|$ в (6.2). Однако, благодаря увеличению массы частицы одновременно повышается само значение $|E|$, необходимое для полного отражения от барьера.

Отметим также, что ограничение (6.2) теряет силу для достаточно крутых барьеров, т. е. при нарушении условия (2.1). Если время пролета частицы через барьер становится соизмеримым с периодом высокочастотных колебаний, то она сможет при благоприятных фазах влета проскочить барьер, не успев затормозиться.

Для иллюстрации процедуры перекачки кинетической энергии медленного движения в кинетическую энергию быстрых осцилляций рассмотрим конкретный пример — движение частицы вблизи узла поля плоской однородной стоячей волны:

$$E_{\perp} = E_0 x_0 \sin kz \sin \omega t \simeq E_0 x_0 kz \sin \omega t, \quad (6.3)$$

$$H_{\perp} = E_0 y_0 \cos kz \cos \omega t \simeq E_0 y_0 \cos \omega t.$$

Соответствующий этому полю высокочастотный потенциал равен

$$\Phi = (\eta/2\omega)^2 E_0^2 (kz)^2.$$

Подставляя эти выражения в (2.6) и в (2.5), находим приближенную траекторию частицы

$$\begin{aligned} z &= v/\Omega_z \sin \Omega_z t, \\ x &= -v/\omega \sqrt{2} \sin \Omega_z t \sin \omega t, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\Omega_z = \eta E_0 / c \sqrt{2}$.

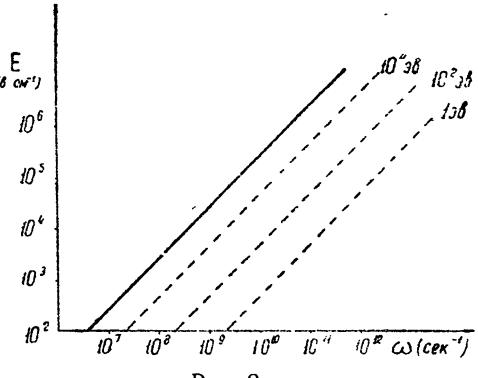


Рис. 2.

Эта траектория воспроизведена на рис. 3 для значения параметров $\omega/\Omega_z = 10$, $\frac{\Omega_z z_{\max}}{v} = 1$ и $z > 0$. Поскольку в данном примере мы имеем дело с двумя потенциальными барьерами, то частица, попеременно отражаясь от каждого из них, совершает помимо

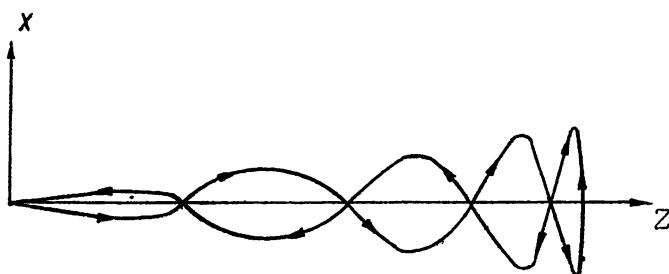


Рис. 3.

высокочастотных колебаний еще и колебания с частотой Ω_z ($\Omega_z \ll \omega$) внутри одномерной потенциальной ямы. Такие одномерные потенциальные ямы всегда существуют в узлах поля E ; их можно также образовать, например, с помощью двух экспоненциально спадающих потенциальных барьеров типа (5.7).

7. ФОКУСИРОВКА ПУЧКОВ ЧАСТИЦ. ДВУМЕРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ

Под фокусировкой пучка в самом общем смысле будем понимать ограничение траекторий всех частиц внутри некоторой конечной двумерной области, например, для прямолинейных параксиальных пучков—внутри цилиндра конечного радиуса.

Пусть необходимо сформировать пучок заряженных частиц, летящих в z -направлении со скоростью v_z , но обладающих также и поперечными скоростями $v_{\perp} \neq 0$. Ясно, что для предотвращения размывания пучка достаточно создать протяженную вдоль z двумерную потенциальную яму [6,7]. В силу аддитивности разночастотных потенциальных рельефов (2.8) такую яму можно образовать путем наложения четырех потенциальных барьеров—попарно в каждом из декартовых направлений сечения $z = \text{const}$. Однако подходящий потенциальный рельеф отыскивается и среди одночастотных неоднородных электромагнитных полей. Так, например, потенциал принимает минимальные значения на оси в волне TE_{11} , распространяющейся в идеальном прямоугольном волноводе, в волне TE_{01} —в круглом волноводе [7,9], в волне TEM —в четырехпроводной гиперболической линии и т. п., а также при определенных значениях фазовых скоростей в волнах типа TM (см. рис. 1). Правда, использование всех этих волн для фокусировки затрудняется из-за того, что они не являются единственно распространяющимися ни при каких поперечных размерах системы*. Однако, если их критические частоты не слишком велики, всегда можно “отфильтровать” волны тех типов, которые оказывают дефокусирующее действие.

Итак, предположим, что двумерная потенциальная яма тем или иным способом сформирована, и найдем условия, при которых

* Этот недостаток не свойственен медленным волнам, фазовая скорость которых меньше скорости света. Например, в круглом волноводе с ребристыми стенками при определенных значениях поверхностного импеданса первой распространяющейся волной является медленная волна типа TM_0 , высокочастотный потенциал которой имеет минимум на оси (кривая 3 на рис. 13). Возможность фокусировки пучка полем такой волны показана в работе [8].

траектории частиц, летящих вдоль нее, окажутся ограниченными. Пусть на оси пучка — в центре ямы — потенциал Φ равен нулю, а поперечные скорости $|\dot{r}_\perp| \ll v_\perp$ ($v_\perp^2 = 2 |\eta| V_\perp$). Тогда, в соответствии с (6.2), для удержания частиц в пределах $0 \leq r_\perp \leq r_n$ необходимо, чтобы напряженность поля на границе пучка, т. е. при $r_\perp = r_n$ удовлетворяла требованиям

$$\frac{\omega^2}{|\eta|} r_n \gg |\mathbf{E}| r_\perp \doteq r_n > 2\omega \left[\frac{V_\perp + |V_{q\perp}|}{|\eta|} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.1)$$

Здесь учтено дополнительно расталкивающее действие пространственного заряда пучка. В частности, для пучка квазицилиндрической формы входящий в (7.1) электростатический потенциал поля пространственного заряда V_q может быть оценен по формуле

$$V_q(r_\perp) = -\frac{q}{r_n} r_\perp^2,$$

где q — заряд на единицу длины пучка, „размазанный“ по его сечению с постоянной плотностью.

Условие (7.1) совпадает с условием отражения частиц от потенциального барьера. Необходимо отметить, что оно фактически ограничивает поперечные размеры пучка, который не может быть идеально тонким: его радиус должен превышать амплитуду быстрых колебаний

$$(r_n) \gg \left| \frac{\eta E}{\omega^2} \right| > 2 \frac{V_\perp |\eta|}{\omega} \sqrt{V_\perp + |V_{q\perp}|}. \quad (7.2)$$

Например, при $\omega = 10^{11}$ с $^{-1}$ и $V_\perp + V_{q\perp} = 10^2 b$ минимальный радиус электронного пучка, согласно (7.2), равен 10^{-2} см. В случае „толстых“ пучков величина $|\eta E/\omega^2|$ характеризует степень „размытия“ границ пучка из-за осцилляций, т. е. является параметром, характеризующим разрешающую способность любой высокочастотной электроннооптической системы. Учет осцилляторного размывания границы пучка становится принципиальным при приближении этой границы к проводящим поверхностям формирующих поле электродов. Ясно, что усредненная траектория „крайней“ частицы (частицы, летящей по периферии пучка) должна отстоять от поверхности электрода, по крайней мере, на расстоянии $|\eta E/\omega^2|$. В противном случае окажутся возможными соударения с электродами и уход частиц из пространства взаимодействия.

Важным условием, дополняющим (7.1), является ограничение, накладываемое на длину пучка: пучок не может быть слишком коротким, так как время пролета частицы через фокусирующую систему должно содержать достаточно большое число периодов высокой частоты. Однако это ограничение оказывается не столь жестким, сколь предыдущее. Например, при длине участка фокусировки $L \sim \lambda/2$ условие (2.1) сводится к $v_\perp \ll c$, т. е. выполняется для любых нерелятивистских пучков. Интересно отметить в связи с этим возможность фокусировки нерелятивистских пучков с помощью стоячих волн. Если за время пролета через узлы поля Φ или даже через дефокусирующие участки частица не успевает вылететь за границу потенциальной ямы, то в первом приближении допустимо считать ее по-прежнему движущейся в двумерном потенциальном поле $\Phi_{\text{эфф}}$, а соответствующее эффективное значение потенциала определять путем усреднения (5.10) и (5.11) по координате z .

^{*} Фактически пучок подвергается действию периодического по координате z поля. Как известно, в таких системах даже при чередовании фокусирующих и дефокусирующих элементов фокусирующий эффект при определенных условиях в среднем преобладает [10, 11]. Так, например, несмотря на то, что в бегущей волне типа TM_{01} , распространяющейся в идеальном гладкостенном круглом волноводе, потенциал на оси при $k\pi < x^2 a$ максимальен (кривая 1, рис. 1г), в соответствующей стоячей волне фокусировка оказывается возможной.

Характер движения частиц в поперечном сечении пучка (т. е. плоскости $z = \text{const}$) качественно аналогичен характеру рассмотренного в б. движения в одномерной потенциальной яме (см., например, траекторию (6.3), изображенную на рис. 3). Однако в общем случае уравнение (2.6) оказывается нелинейным [7] и сводится к осцилляторному только в малой окрестности вблизи центра ямы **. Приятное исключение составляет в этом отношении поле волны ТЕМ в четырехпроводной гиперболической линии (см. рис. 13). Как следует из (2.6), (5.3) и (5.9), усредненное движение частицы в таком поле является чисто синусоидальным во всей плоскости $z = \text{const}$, т. е. без учета поля пространственного заряда, — в пределах пучка любой толщины.

8. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ. ТРЕХМЕРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ

Будем понимать под локализацией такое состояние, при котором частица с энергией, меньшей некоторой заданной величины, не выходит за пределы ограниченной области пространства ни при каких начальных условиях. Как известно, в электростатическом поле в областях, свободных от источников, не существует абсолютных максимумов и минимумов электростатического потенциала, что исключает возможность пребывания заряженной частицы в состоянии устойчивого равновесия (теорема Ирншоу). Это утверждение не распространяется на случай высокочастотного электромагнитного поля, где локализация частиц оказывается вполне возможной [6, 12, 17]. Для этого достаточно создать трехмерную потенциальную яму в поле высокочастотного потенциала Φ . Такие ямы могут быть образованы с помощью размещенных определенным образом (попарно в каждом декартовом направлении) разночастотных потенциальных барьера [18] или путем сочетания двумерных потенциальных ям с „торцевыми“ барьераами. Они существуют также и в одночастотных полях, например, в квазиэлектростатическом мультипольном поле (5.13) или — в общем случае — в полях неоднородных стоячих волн (5.10), (5.11).

Условия локализации частицы внутри некоторой области не отличаются от условий отражения от потенциального барьера (6. 2), но, разумеется, они должны быть выполнены для любого направления.

Одним из наиболее прозрачных примеров, поясняющих механизм удержания частицы внутри потенциальной ямы, является движение в квазиэлектростатическом аксиально симметричном квадрупольном поле, описываемом электростатическим потенциалом (5.12) при $n = 2$, $m = 0$. Поле такой структуры может быть выделено, например, внутри кубического полого резонатора с хорошо проводящими стенками, если этот резонатор возбудить на собственной частоте $\omega_{11} = c\pi\sqrt{3}/a$ (a — длина ребра куба).

Действительно, в декартовых координатах с началом в центре куба, в соответствии с формулами (5.2) ($x = \pi\sqrt{2}/a$, $h = \pi/a$), для составляющих поля E вблизи начала координат имеем

$$E_x \simeq 2E_0 \frac{\pi}{a} x \sin \omega t; E_y \simeq -E_0 \frac{\pi}{a} y \sin \omega t; E_z \simeq -E_0 \frac{\pi}{a} z \sin \omega t, \quad (8.1)$$

где амплитуда E_0 связана со средним потоком мощности Π , поставляемой в резонатор источником, и с добротностью резонатора Q соотношением

** Впрочем, в квазистатических мультипольных полях, начиная с октупольного, даже вблизи центра ямы движение отличается от чисто синусоидального.

$$E_0^2 = \frac{32\pi}{3} \frac{\Pi Q}{\omega a^3} = \frac{32\pi \Pi Q}{3^{3/2} \frac{c^3}{ca^2}}. \quad (8.2)$$

Подставляя (8.1) в (2.6), находим усредненные уравнения движения

$$\ddot{X} + \Omega_x^2 X = 0; \quad \ddot{Y} + \Omega_y^2 Y = 0; \quad \ddot{Z} + \Omega_z^2 Z = 0, \quad (8.3)$$

где $\Omega_x^2 = 4\Omega_y^2 = 4\Omega_z^2 = 2\eta^2 E_0^2 \frac{\pi^2}{a^2 \omega^2} > 0$.

Отсюда следует, что траектории будут ограничены в любом направлении, т. е. частица оказывается локализованной в области, прилегающей к центру куба. Максимальное отклонение ее от центра равно $R_{\max} \approx v/\Omega_y$. Хотя в соответствии с принятим в (8.1) приближением необходимо считать, что $\approx R_{\max} \ll 1$, однако фактические размеры области локализации определяются, конечно, размерами потенциальной в целом ($\approx R_{\max} \sim 1$).

Интересно отметить, что для квадрупольного поля (8.1) можно сравнительно просто проанализировать решение не только усредненного, но и исходного уравнения (1.3). Действительно, подставляя (8.1) в (1.3) и пренебрегая лоренцевой силой (квазистатическое поле), мы получаем три независимых уравнения Матье:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\eta E_0 \frac{\pi}{a} x \sin \omega t; & \ddot{y} &= -\eta E_0 \frac{\pi}{a} y \sin \omega t; \\ \ddot{z} &= -\eta E_0 \frac{\pi}{a} z \sin \omega t. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Решения этих уравнений ограничены при любых начальных условиях в пределах так называемых зон устойчивости. В частности, в пределах первой зоны должно быть выполнено неравенство

$$|\eta| E_0 \frac{\pi}{a} \omega^2 < 0,22, \quad (8.5)$$

уточняющее левую часть неравенства (6.2)*.

В результате условия локализации частицы внутри кубической полости в выражении через мощность Π и добротность Q записывается в виде

$$\frac{3^{7/2} \pi^2 (0,22)^2}{32} \frac{c^5}{\eta^2} > \Pi Q > \frac{3^{5/2} \pi^2 c^3}{8} \frac{V}{|\eta|}. \quad (8.6)$$

Например, для удержания электрона с энергией V (выраженной в электроновольтах) необходимо ввести в резонатор мощность Π (в ваттах), ограниченную значениями

$$6,2 \cdot 10^9 > Q \Pi_{(sm)} > \frac{10^6}{3} V_{(e)}. \quad (8.7)$$

Обратим внимание, что в отличие от условий (6.2) и (7.1) пределы в (8.6) и (8.7) не содержат зависимостей от частоты: последняя входит лишь в неявном виде в добротность Q .

9. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В системах с постоянным однородным магнитным полем для осуществления локализации достаточно с помощью двух потенциальных барьеров предотвратить уход частиц вдоль линий постоянного поля.

* Решения уравнений движения в квадрупольном поле остаются ограниченными не только при чисто синусоидальном изменении поля во времени, но и при произвольном периодическом изменении, если выполняются условия применимости теоремы Ляпунова [14].

Проиллюстрируем это на простейшем примере рассмотренного в 6. движения частицы вблизи узла поля плоской однородной стоячей волны (6.3). При наличии постоянного поля $H_c = H_c z_0$ усредненное уравнение (3.3) распадается в данном случае на три осцилляторных уравнения:

$$\ddot{X} + \omega_H^2 X = 0; \quad \ddot{Y} + \omega_H^2 Y = 0; \quad (9.1)$$

$$\ddot{Z} + \tilde{\Omega}_z^2 Z = 0,$$

где $\tilde{\Omega}_z^2 = \omega_H^2 / 4(1 - \omega_H^2 / \omega^2)$; $\omega_H = \eta H_c / c$; $\tilde{\omega}_H = \eta E_0 / c$,

так что траектории частиц оказываются ограниченными при любых действительных $\tilde{\Omega}_z$. Поскольку, однако, при $\omega \rightarrow \omega_H$ сами усредненные уравнения (9.1) утрачивают смысл, то ограниченность движения имеет место для всех значений параметров (в области $\omega > \omega_H$), при которых эти уравнения справедливы, т. е. при изменении амплитуды поля в пределах

$$\frac{L(\omega^2 - \omega_H^2)}{|\eta|} \gg E_0 \gg 2(\omega^2 - \omega_H^2)^{1/2} \left(\frac{V}{|\eta|} \right)^{1/2}. \quad (9.2)$$

Здесь $v = \sqrt{2|\eta|V}$ — скорость частицы в начале координат. При значениях параметров $\omega < \omega_H$ происходит „обращение“ потенциальной ямы, и частицы покидают область, прилегающую к узлу поля E .

Сравнение (9.2) с (6.2) показывает, что наложение постоянного магнитного поля приводит к уменьшению эффективной частоты ($\omega \rightarrow \sqrt{\omega^2 - \omega_H^2}$), а следовательно, к увеличению высоты потенциального барьера. При этом для движения внутри всей потенциальной ямы (а не только в окрестности начала координат) ограничение амплитуды E_0 снизу должно быть заменено в (9.2) на простое неравенство, так как значение потенциала на вершине барьера (в пучности E_\perp), согласно (3.5) и (6.3), равно

$$\Phi = \eta^2 E_0^2 / 4(\omega^2 - \omega_H^2).$$

Для уточнения левого предела в (9.2) приходится обращаться непосредственно к исходному уравнению (1.3), которое сводится в случае движения вблизи центра ямы к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \tilde{\omega}_H z \sin \omega t + \omega_H \dot{y} - \tilde{\omega}_H \dot{z} \cos \omega t, \\ \ddot{y} &= -\tilde{\omega}_H \dot{x}, \\ \ddot{z} &= \tilde{\omega}_H x \cos \omega t. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Как и в случае движения в квадрупольном поле, описываемого уравнениями Матье (8.4), решение системы (9.3) устойчиво (ограничено) только внутри определенных зон значений параметров. На рис. 4 показаны границы первой и второй зон на плоскости параметров ω_H/ω , $\tilde{\omega}_H/\omega$. Там же отмечена пунктиром зависимость $\tilde{\omega}_H/\omega = \sqrt{1 - (\omega_H/\omega)^2}$, соответствующая значению амплитуды поля, определяемой левым пределом неравенства (9.2) при $L = 1/k$. Расчет проводился на электронной машине типа МН-8. Границы зон определялись приближенно по уходу траектории за пределы диапазона изменений напряжений в машине при минимально возможной начальной скорости $v_{\min} \neq 0$. Таким образом, одновременно отыскивались размеры области локализации R_{\max} ^{*}. На рис. 5 вос-

* При точности расчетов порядка 0,1 % отношение $\omega R_{\max} / v_{\min}$ не превышало значения 100.

произведены значения kz_{\max} в зависимости от $\tilde{\omega}_H/\omega$ при $\omega_H/\omega = v/c = 10^{-1}$.

Очевидно, что при приближении к границам зон область локализации становится неограниченно большой.

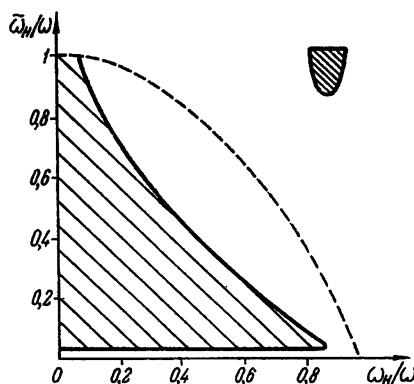


Рис. 4.

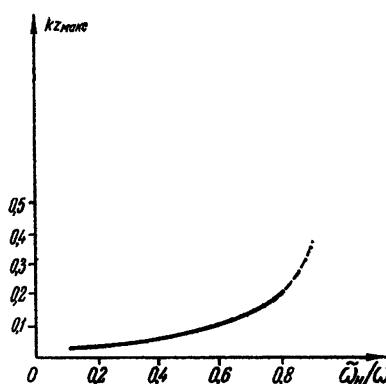


Рис. 5.

Интересно отметить, что с увеличением частоты внешнего поля ω пространство локализации слегка сжимается. Это сжатие можно осуществлять более эффективно, используя потенциальные барьеры, образованные экспоненциально убывающими полями в волноводах переменного сечения. В процессе такого сжатия локализованная частица при каждом отражении от барьера будет увеличивать свой импульс подобно тому, как это происходит в гипотетическом механизме Ферми [15] с космическими частицами при столкновениях с движущимися навстречу друг другу плазменными облаками.

Однако вопрос о поведении частицы в движущихся или изменяющихся во времени потенциальных ямах [16] выходит за рамки настоящей статьи и будет рассмотрен отдельно.

Автор признателен А. В. Гапонову за ценные замечания и дискуссии, а также сотрудникам счетного центра ГИФТИ, выполнившим вычислительную работу.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Д. Ландау, Е. Л. Лифшиц, Теория поля, ГИТТЛ, М—Л., 1948.
- Л. Спитцер, Физика полностью ионизированного газа, ИЛ, М., 1957.
- Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, М., 1955.
- G. Z. Hellwig, Naturforschung, **10** а, 508 (1955).
- М. А. Миллер, ЖЭТФ, **25**, 1972 (1955).
- М. А. Миллер, Сообщение на 2-ой конференции МВО по радиоэлектронике, Саратов, 1957.
- М. А. Миллер, ДАН СССР, **119**, 478 (1958).
- В. С. Ткалич, ЖЭТФ, **32**, 625 (1957).
- Г. А. Аскарьян, Атомная энергия, **4**, 71 (1958).
- A. M. Clogston, H. Heffner, J. Appl. Phys., **25**, 436 (1954).
- Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.
- А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, **34**, 242 (1958).
- F. B. Kpooh, Austr. J. Phys., **10**, 221 (1957).
- А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- E. Fermi, Astrophys. J., **119**, 1 (1954).
- А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, **34**, 751 (1958).
- H. Boot, R. Hargie, Nature, **180**, 1187 (1957).