

МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ. II

(Элементы теории бифуркаций неподвижных точек преобразования)

Ю. И. Неймарк

1. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ И ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Допустим теперь, что рассматриваемое нами точечное отображение T зависит от параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, так что формулы преобразования T имеют вид:

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где функции f_i и их производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны по переменным x_1, x_2, \dots, x_n и параметрам $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ в рассматриваемых областях их изменений. Пусть при некоторых частных значениях параметров $\sigma_1 = \sigma_1^0, \dots, \sigma_m = \sigma_m^0$ преобразование T допускает неподвижную точку M^* . Спрашивается, что произойдет с неподвижной точкой M^* при непрерывном изменении параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$? Для придания геометрической наглядности рассматриваемой задаче введем в рассмотрение пространство параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. Каждой точке этого пространства соответствует определенное преобразование T .

Неподвижные точки преобразования T определяются из системы n уравнений:

$$x_i^* = f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m). \quad (1.2)$$

Разрешая эти уравнения (1.2) относительно $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, найдем, что координаты неподвижной точки M^* являются функциями параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. Поэтому при непрерывном изменении параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ неподвижная точка M^* в пространстве переменных x_1, x_2, \dots, x_n будет, вообще говоря, непрерывно перемещаться. Однако это будет иметь место только до тех пор, пока система (1.2) разрешима относительно $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, для чего, как известно, нужно, чтобы якобиан системы (1.2), равный

$$I(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_* - 1, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_*, & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_* - 1 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

не обращался в нуль. Отсюда, в частности, вытекает, что рассматриваемая неподвижная точка при непрерывном изменении параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ может исчезнуть лишь при обращении якобиана I в нуль.

Запишем характеристический полином $\chi(z)$ преобразования (1.1), от расположения корней которого зависит устойчивость неподвижной точки M^* ,

$$\chi(z; \sigma_1, \dots, \sigma_m) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_* - z, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_*, & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_* - z \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Если неподвижная точка M^* устойчива, то все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ полинома (1.4) лежат внутри единичного круга. Будем непрерывно менять параметры $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. При этом и корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ будут также меняться непрерывно, и нарушение устойчивости сможет произойти лишь в силу перехода одним (или несколькими) из корней λ_j через границу единичного круга. Переходы через границу единичного круга разделяются на три основных случая^[39,30]: а) один из корней λ_j обращается в $+1$, б) один из корней λ_j обращается в -1 и в) появляются два комплексно-сопряженных корня $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$. Это означает, что граница области устойчивости неподвижной точки M^* в пространстве параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ состоит из трех различных поверхностей N_{+1} , N_{-1} и N_φ , уравнения которых, соответственно, можно записать в виде:

$$\chi(+1; \sigma_1, \dots, \sigma_m) = 0, \quad \chi(-1; \sigma_1, \dots, \sigma_m) = 0, \quad \chi(e^{i\varphi}; \sigma_1, \dots, \sigma_m) = 0. \quad (1.5)$$

Сравнивая уравнения (1.5) с уравнением границы области существования неподвижной точки M^* , приходим к важному выводу: часть N_{+1} , границы области устойчивости, соответствующая единичному корню, совпадает с границей области существования неподвижной точки. Таким образом, граница области существования и устойчивости неподвижной точки состоит из трех поверхностей N_{+1} , N_{-1} и N_φ , причем уравнения этих поверхностей могут быть написаны, если известен характеристический полином (1.4).

В качестве примера рассмотрим случай, когда характеристический полином будет полиномом второй степени

$$z^2 + pz + q,$$

и ради простоты примем p и q за параметры. Граница области существования и устойчивости, согласно предыдущему, состоит из трех частей: N_{+1} с уравнением $1 + p + q = 0$, N_{-1} с уравнением $1 - p + q = 0$ и N_φ , уравнения которой можно записать в виде условия

$$e^{2i\varphi} + p e^{i\varphi} + q = 0,$$

в котором φ пробегает все действительные значения между 0 и π . Разделяя в этом уравнении мнимую и действительную части, приходим к параметрическим уравнениям граничной кривой N_φ

$$p = -2 \cos \varphi, \quad q = +1.$$

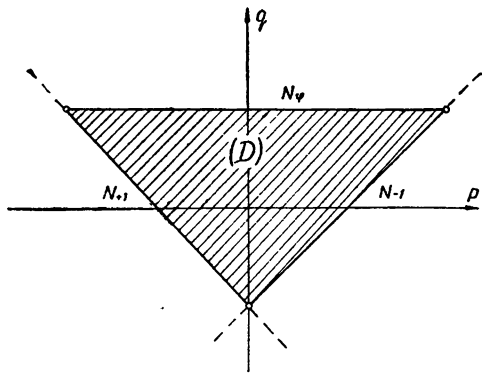


Рис. 1.

Строя на плоскости параметров p, q граничные кривые N_{+1}, N_{-1} и N_φ , приходим к картинке, показанной на рис. 1. Область существования и устойчивости неподвижной точки заштрихована и обозначена буквой D .

Необходимо напомнить, что полученные нами выводы справедливы лишь при условии непрерывной зависимости преобразования (1.1) от параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. При наличии разрывов непрерывности границей области существования и устойчивости неподвижной точки могут быть не только поверхности N_{+1}, N_{-1} и N_φ , но и поверхности в пространстве параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, на которых нарушается непрерывность функций f_i или их производных $\frac{df_i}{dx_j}$ по переменным x_1, x_2, \dots, x_n или параметрам $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$.

2. БИФУРКАЦИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ В ПРЯМУЮ

После того, как область D существования и устойчивости неподвижной точки найдена, естественно, возникает вопрос, а что же происходит с неподвижной точкой, когда параметры $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ меняются так, что мы покидаем область D , пересекая одну из ее граничных поверхностей N_{+1}, N_{-1} или N_φ . Не касаясь здесь этого вопроса в полном объеме, проиллюстрируем сначала случай перехода через граничные поверхности N_{+1} и N_{-1} на примере преобразования прямой в прямую.

Точке, лежащей на граничной поверхности N_{+1} , отвечает на диаграмме Кенигса—Ламерея функция последования, касающаяся в некоторой точке M^* с биссектрисой первого координатного угла (рис. 2). При переходе через граничную поверхность N_{+1} график функции последования меняется, как показано на рис. 2, в результате чего две различные неподвижные точки M_1^* и M_2^* , из которых одна устойчива, а другая неустойчива, сливаются в одну неподвижную точку M^* , которая затем исчезает. Таким образом, граничная поверхность N_{+1} соответствует слиянию двух неподвижных точек с последующим их исчезновением, причем, одна из сливающихся неподвижных точек устойчива, а другая неустойчива.

При переходе через граничную поверхность N_{-1} не происходит исчезновения неподвижной точки.

Неподвижная точка M^* лишь из устойчивой превращается в неустойчивую. Однако наряду с этим в момент перехода через N_{-1} вместе с изменением устойчивости неподвижной точки M^* из нее либо рождается устойчивая двукратная неподвижная точка, либо с ней сливается неустойчивая двукратная неподвижная точка. Напомним, что двукратными неподвижными точками преобразования T называются неподвижные точки преобразования T^2 . В случае преобразования прямой в прямую эти двукратные неподвижные точки могут быть получены, как точки пересечения графика функции последования γ преобразования T с симметричной с ней, относительно биссектрисы, кривой γ' (см. рис. 3).

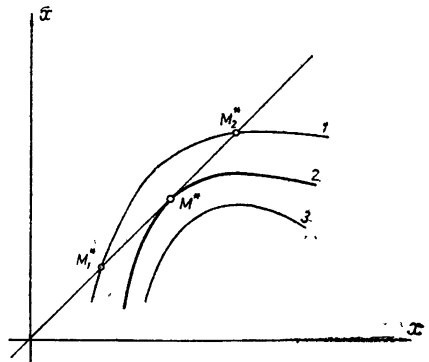


Рис. 2.

На рис. 4 показаны два различных возможных случая изменения вида графика функции последования, соответствующих переходу через граничную поверхность N_{-1} . В обоих случаях устойчивая однократная неподвижная точка M^* превращается в неустойчивую.

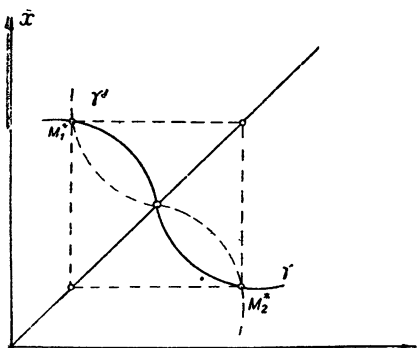


Рис. 3.

В первом случае из точки M^* в момент изменения ее устойчивости рождаются двукратные устойчивые неподвижные точки M_1^* и M_2^* (см. рис. 4а). (Преобразование T точку M_1 переводит в точку M_2^* , а точку M_2^* в точку M_1^* .) Во втором случае, напротив, в момент смены устойчивости с точкой M^* сливаются две неустойчивые неподвижные точки M_1^* и M_2^* (рис. 4б).

Еще раз отметим, что в случае разрывности преобразования T

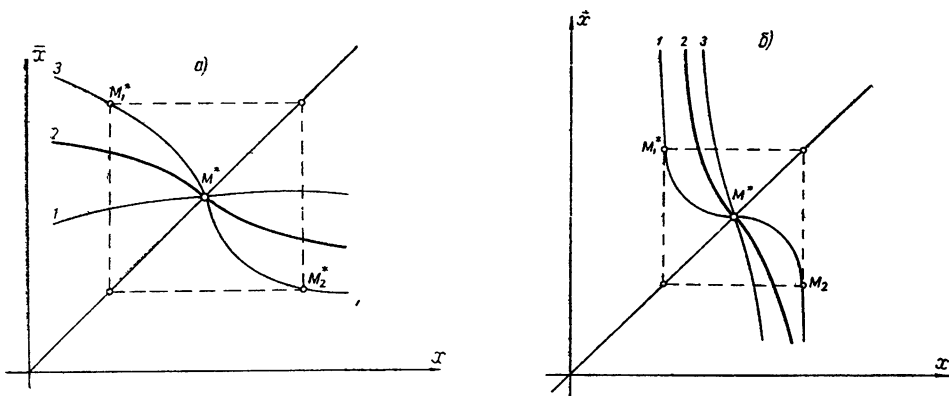


Рис. 4.

бифуркационными граничными поверхностями могут быть не только поверхности N_{+1} , N_{-1} и N_φ , но и, например, поверхности, на которых неподвижная точка становится точкой разрыва непрерывности точечного отображения. Соответствующий этому случаю пример изображен на рис. 5. При изменении параметров соответственно переходу от кривой 1 к 2, затем 3, неподвижная точка M^* становится точкой разрыва преобразования и исчезает.

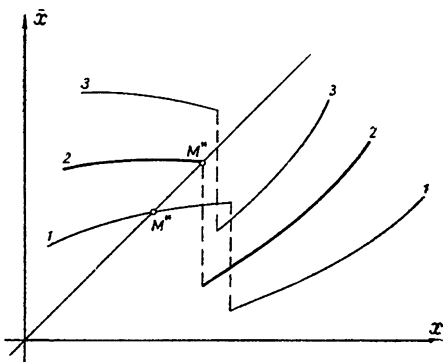


Рис. 5.

3. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ, ОБЛЕГЧАЮЩИЕ ОТЫСКИНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Регулярных методов исследования точечных отображений в большом в настоящее время еще нет. Исключение составляет только случай преобразования прямой в прямую. Однако, несмотря на это, во многих конкретных задачах можно тем или иным пу-

тем получить некоторые важные сведения об общем характере отображения. Более того, известен ряд трудных задач, которые долгое время, несмотря на значительные усилия выдающихся исследователей, оставались неприступными, затем были сведены к точечному отображению плоскости в плоскость и полностью решены [4-9]. При этом для исследования точечного отображения были привлечены некоторые общие теоремы теории точечных отображений: теорема Брауера о существовании неподвижной точки и так называемый принцип сжатых отображений, позволяющий установить существование и единственность неподвижной точки. Кроме того, в ряде случаев, и в частности, для исследования бифуркаций неподвижных точек полезно воспользоваться соображениями, опирающимися на понятие индекса векторного поля на поверхности [32].

n -мерным шаром радиуса r с центром в точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ называется множество точек R_n , координаты x_1, x_2, \dots, x_n которых удовлетворяют неравенству

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2. \quad (3.1)$$

Пусть G — произвольная замкнутая область R_n , между точками которой и точками n -мерного шара (3.1) может быть установлено взаимнооднозначное и взаимнонепрерывное соответствие. Для таких гомеоморфных n -мерному шару областей G имеет место теорема: если непрерывное точечное отображение T переводит все точки области G вместе с границей во внутренние точки этой же области, то в области G находится, по крайней мере, одна неподвижная точка преобразования T . Отметим, что требование гомеоморфности G n -мерному шару существенно. Так, например, для кольцеобразной двумерной области или для трехмерной тороидальной утверждение теоремы не имеет места.

Сформулируем теперь в несколько измененном виде принцип сжатых отображений. Пусть для преобразования T существует положительно-определенная квадратичная форма V , такая, что для любых двух различных точек M и N с координатами x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n из области G и соответствующих им точек $\bar{M} = TM$ и $\bar{N} = TN$ с координатами $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ и $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ имеет место неравенство

$$V(\bar{y}_1 - \bar{x}_1, \dots, \bar{y}_n - \bar{x}_n) - V(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) < 0, \quad (3.2)$$

тогда либо все точки области G при последовательном применении к ним преобразования T ее покидают, либо в области G существует единственная устойчивая неподвижная точка M^* , и всякая другая точка M области G при последовательном применении к ней преобразования T либо покидает область G , либо асимптотически приближается к неподвижной точке M^* .

Пусть в R_n задано непрерывное точечное отображение T . Каждой точке $M \in R_n$ преобразование T ставит в соответствие точку \bar{M} или, что то же, вектор $M\bar{M}$. Отнесем вектор $M\bar{M}$ к точке M . Тогда преобразование T определит в R_n некоторое векторное поле. Точки R_n , в которых вектор этого поля равен нулю, будут неподвижными точками отображения T .

Сферой с центром в точке M_0 и радиусом r называют поверхность, состоящую из точек M , для которых

$$\rho(M, M_0) = r. \quad (3.3)$$

Пусть S — некоторая сфера в R_n . В каждой точке M этой сферы преобразование T определяет вектор $M\bar{M}$, который мы обозначим

через $x(M)$. С помощью поля векторов $x(M)$ можно определить отображение сферы S в единичную сферу σ , ставя в соответствие точке $M \in S$ точку сферы σ с радиусом-вектором $x(M)|x(M)|^{-1}$, где $|x(M)|$ обозначает длину вектора $x(M)$. Это отображение будет однозначным и непрерывным, если ни в одной точке сферы S вектор $x(M)$ не обращается в нуль. Допустим теперь, что векторное поле $x(M)$ на сфере S непрерывно меняется или сфера S непрерывно деформируется, но так, что все время ни один из векторов $x(M)$ на ней не обращается в нуль. Отображение сферы S в единичную сферу σ при этом будет также непрерывно изменяться. Известно, что, несмотря на изменение этого отображения, существует некоторая величина, определяемая этим отображением, которая остается неизменной. Эта величина, не меняющаяся при описанных изменениях отображения S в σ , называется степенью отображения S в σ или индексом векторного поля $x(M)$ на S . Наглядное представление об индексе можно получить следующим образом. Пусть $d\Omega$ — элемент сферы S и пусть $d\omega$ — соответствующий ему элемент сферы σ . Элементы $d\Omega$ и $d\omega$ берутся со знаком плюс или минус, в зависимости от их ориентации. Элементы $d\Omega$ и $d\omega$ будут одинаково ориентированы, если якобиан I преобразования T в точках $d\Omega$ положителен, и различно, если $I < 0$. Положительные нормали на S и σ выбираются одинаково, например, в обоих случаях внешние. Под якобианом I преобразования T здесь понимается якобиан преобразования поверхности S в σ . Пусть $F=0$ — уравнение поверхности S , тогда непосредственное вычисление [32] дает, что

$$I = -\frac{\Delta}{AB^n}, \quad (3.4)$$

где

$$A = |\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2},$$

$$B = |x(M)| = \sqrt{(\bar{x}_1 - x_1)^2 + \dots + (\bar{x}_n - x_n)^2}$$

и Δ — определитель $n+1$ порядка вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial F}{\partial x_1}, & \frac{\partial F}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ \bar{x}_1 - x_1, & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} - 1, & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n - x_n, & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_n} - 1 \end{vmatrix}. \quad (3.5)$$

Элемент $d\omega$ единичной сферы σ может соответствовать нескольким различным элементам $d\Omega_1, d\Omega_2, \dots$ поверхности S . Пусть $d\omega$ положительно ориентирован, а среди его прообразов $d\Omega_s$ p положительно ориентированных и q — отрицательно. Разность $p - q$ одинакова [32] для всех элементов $d\omega$ сферы σ и называется индексом векторного поля x на S . Очевидно, что

$$\int_{(S)} Id\Omega \stackrel{\ominus}{=} \int_{(\sigma)} (p - q) d\omega = (p - q) \int_{(\sigma)} d\omega, \quad (3.6)$$

и поэтому индекс векторного поля x на поверхности S может быть определен и как

$$\left(\int_{(\sigma)} d\omega \right)^{-1} \int_{(S)} Id\Omega. \quad (3.7)$$

Пусть M^* — неподвижная точка преобразования T и S — сфера малого радиуса r с центром в M^* . Индексом неподвижной точки M^* называют предельное значение индекса векторного поля x на S при $r \rightarrow 0$.

Для дальнейшего важна следующая теорема: индекс векторного поля x на S равен сумме индексов, заключенных внутри S неподвижных точек. Из этой теоремы, в частности, следует, что если внутри и на поверхности S нет неподвижных точек преобразования, то индекс векторного поля на S равен нулю, и если этот индекс не равен нулю, то внутри S есть, по крайней мере, одна неподвижная точка.

Найдем индекс неподвижной точки в случае, когда все корни характеристического уравнения отличны от единицы. В каноническом виде преобразование T в окрестности M^* имеет вид

$$\bar{x}_i = \lambda_i x_i + \Omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.8)$$

или, считая, что среди величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $2m$ комплексно сопряженных вида $\mu_s e^{i\varphi_s}$ и $n - 2m$ действительных,

$$\bar{u}_s = \mu_s (u_s \cos \varphi_s - v_s \sin \varphi_s) + \dots, \quad (3.9)$$

$$\bar{v}_s = \mu_s (u_s \sin \varphi_s + v_s \cos \varphi_s) + \dots,$$

$$\bar{x}_i = \lambda_i x_i + \dots$$

Обозначим компоненты вектора $M\bar{M}$ через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; очевидно,

$$\begin{aligned} \xi_{2s-1} &= (\mu_s \cos \varphi_s - 1) u_s - \mu_s v_s \sin \varphi_s + \dots, \\ \xi_{2s} &= \mu_s u_s \sin \varphi_s + (\mu_s \cos \varphi_s - 1) v_s + \dots, \\ \xi_i &= (\lambda_i - 1) x_i + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Якобиан этого отображения при достаточно малых u_s, v_s, x_i в силу предположения, что все λ_i отличны от единицы, не равен нулю. Поэтому отображение достаточно малой сферы S в σ взаимно однозначно и, следовательно, индекс рассматриваемой неподвижной точки равен либо $+1$, либо -1 в зависимости от знака якобиана (3.4) или, что то же, определителя (3.5). Непосредственный подсчет, согласно (3.5), дает, что

$$\text{sign } \Delta = - \text{sign} (\lambda_{2m+1} - 1) \dots (\lambda_n - 1). \quad (3.11)$$

Таким образом, индекс неподвижной точки равен $+1$, если число действительных корней характеристического уравнения, меньших единицы, четно, и равен -1 , если это число нечетно.

Пусть на поверхности $F=0$ задано векторное поле $x(M)$, и пусть ни в одной точке этой поверхности не имеет место при $\alpha < 0$ равенство

$$x = \alpha \nabla F. \quad (3.12)$$

Рассмотрим на этой поверхности векторное поле

$$x(M, \mu) = (1 - \mu) x(M) + \mu \nabla F | \nabla F |^{-1}, \quad (3.13)$$

совпадающее с полем $x(M)$ при $\mu = 0$. При непрерывном изменении μ от 0 до 1, в силу сделанного предположения, ни в одной точке поверхности $F=0$ вектор $x(M, \mu)$ не обратится в нуль и при $\mu = 1$ $x(M, 1) = \nabla F | \nabla F |^{-1}$. Поэтому в рассматриваемом случае индекс векторного поля $x(M)$ равен индексу поля нормалей поверхности $F=0$ (нормаль направлена в сторону возрастания F).

В случае сферы, когда $F = x_1^2 + \dots + x_n^2 - r^2$, индекс поля ее внешних нормалей может быть легко вычислен. Именно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0, & 2x_1, & 2x_2, & \dots & 2x_n \\ x_1, & 1, & 0, & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n, & 0, & 0, & \dots & 1 \end{vmatrix} = -2(x_1^2 + \dots + x_n^2). \quad (3.14)$$

Поэтому якобиан (3.4) положителен и искомый индекс равен $+1$. В случае внутренней нормали аналогично находим, что искомый индекс равен $(-1)^n$. Отметим, что отсюда может быть непосредственно получена сформулированная ранее теорема Брауера. Действительно, если отображение T переводит все точки шара, ограничиваемого сферой S , в свои внутренние точки, то ни в одной точке S не может иметь места (3.12) при $\alpha > 0$, и поэтому поле векторов x может быть переведено, описанным выше образом, в поле внутренних нормалей сферы S , и, следовательно, индекс поля x равен $(-1)^n$. Но индекс поля $x(M)$ на поверхности S равен сумме индексов неподвижных точек, лежащих внутри S , т. е. внутри S есть, по крайней мере, одна неподвижная точка.

В заключение отметим, что сформулированные в этом параграфе теоремы допускают перенесение на более общие пространства [36, 37]. Так, в частности, принцип сжатых отображений имеет место не только для конечномерного евклидова пространства, но и для произвольного полного метрического пространства. В таком общем виде он был сформулирован С. Банахом. Напомним, что пространство R называется метрическим, если для любых его двух точек M и N определено понятие расстояния, и называется полным, если всякая фундаментальная последовательность $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$, т. е. последовательность, для которой

$$\rho(M_n, M_{n+m}) < \varepsilon(n), \quad (3.15)$$

где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, сходится к некоторой точке пространства R . В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующее общее утверждение: пусть $T(\mu)$, зависящее от параметра μ , преобразование полного метрического пространства R в себя и пусть для любых точек M_1 и M_2 из R и любых μ_1 и μ_2 из области $[\underline{\mu}, \overline{\mu}]$, изменения параметра μ имеет место

$$\rho[T(\mu_2)M_2, T(\mu_1)M_1] \leq L|\mu_1 - \mu_2| + q\rho(M_2, M_1), \quad (3.16)$$

где q и L — положительные постоянные и $q < 1$, тогда в R для любого μ существует единственная устойчивая неподвижная точка $M^*(\mu)$ преобразования $T(\mu)$, и точка $M^*(\mu)$ непрерывно зависит от параметра μ , точнее, для любых μ_1 и μ_2 из $[\underline{\mu}, \overline{\mu}]$

$$\rho[M^*(\mu_2), M^*(\mu_1)] < \frac{L}{1-q} |\mu_2 - \mu_1|. \quad (3.17)$$

Все остальные точки пространства R при последовательном применении преобразования T асимптотически стремятся к точке $M^*(\mu)$, причем

$$\rho[T^n(\mu)M, M^*(\mu)] < \frac{q^n}{1-q} \rho[M, T(\mu)M]. \quad (3.18)$$

Пусть M — произвольная точка R . Рассмотрим последовательные преобразования точки M

$$M_1 = T(\mu)M, M_2 = TM_1, \dots, M_n = TM_{n-1}, \dots \quad (3.19)$$

В силу (3.16)

$$\rho(M_n, M_{n+m}) < \frac{q^n - q^{n+m}}{1 - q} \rho(M, M_1). \quad (3.20)$$

В силу полноты пространства R и оценки (3.20) последовательность точек (3.19) сходится к некоторой точке $M^*(\mu)$. Для точки $M^*(\mu)$

$$\begin{aligned} \rho(TM^*, M^*) &< \rho(TM^*, M_n) + \rho(M_n, M^*) = \\ &= \rho(TM^*, TM_{n-1}) + \rho(M_n, M^*) < q \rho(M^*, M_{n-1}) + \rho(M^*, M_n) = \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\rho(TM^*, M^*) = 0$, и точка M^* является неподвижной точкой преобразования T . Точка M^* является единственной неподвижной точкой преобразования T , поскольку любая другая точка $M \in R$ при последовательных применениях к ней преобразования T асимптотически приближается к M^* , и из (3.20) при $m \rightarrow \infty$ следует (3.18).

Осталось установить, что точка $M^*(\mu)$ зависит от параметра μ непрерывно и имеет место (3.17). Пусть μ_1 и μ_2 — два различных значения параметра μ , оценим расстояние между точками $M^*(\mu_1)$ и $M^*(\mu_2)$

$$\begin{aligned} \rho[M^*(\mu_1), M^*(\mu_2)] &\leq \rho[M^*(\mu_1), T^n(\mu_1)M] + \rho[T^n(\mu_1)M, T^n(\mu_2)M] + \\ &\quad + \rho[T^n(\mu_2)M, M^*(\mu_2)] < \\ &< \frac{q^n}{1 - q} \{ \rho[T(\mu_1)M, M] + \rho[T(\mu_2)M, M] \} + \rho[T^n(\mu_1)M, T^n(\mu_2)M]. \end{aligned}$$

Далее, согласно предположению (3.16),

$$\begin{aligned} \rho[T^n(\mu_1)M, T^n(\mu_2)M] &< L |\mu_1 - \mu_2| + \\ + q \rho[T^{n-1}(\mu_1)M, T^{n-1}(\mu_2)M] &< \dots < L |\mu_1 - \mu_2| (1 + q + \dots + \\ + q^{n-1}) &= L \frac{1 - q^n}{1 - q} |\mu_1 - \mu_2|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\rho[M^*(\mu_1), M^*(\mu_2)] < \frac{L}{1 - q} |\mu_1 - \mu_2| + \frac{q^n}{1 - q} \{ \rho[T(\mu_1)M, M] + \rho[T(\mu_2)M, M] \}$$

или, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, окончательно

$$\rho[M^*(\mu_1), M^*(\mu_2)] < \frac{L}{1 - q} |\mu_1 - \mu_2|, \quad (3.21)$$

что и требовалось.

4. БИФУРКАЦИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРИ ПЕРЕХОДАХ ЧЕРЕЗ ГРАНИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ N_{+1}, N_{-1} и N_φ

1. Пусть преобразование T зависит от параметра μ и пусть при $\mu = 0$ оно допускает неподвижную точку M^* , у которой один из характеристических корней равен единице. Наша задача состоит в исследовании неподвижных точек преобразования T в окрестности точки M^* при малых μ . При $\mu = 0$ преобразование T в окрестности неподвижной точки M^* может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 + ax_1^2 + \dots, \\ \bar{x}_i &= \lambda_i x_i + \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где многоточия обозначают выражения второго и более высоких порядков малости относительно x_1, x_2, \dots, x_n .

При $\mu \neq 0$ в тех же переменных x_1, x_2, \dots, x_n преобразование (4.1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= a_{10} + x_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + \dots, \\ \bar{x}_i &= a_{i0} + \lambda_i x_i + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \dots,\end{aligned}\quad (4.2)$$

где все величины a_{sk} обращаются в нуль вместе с μ . Поскольку все λ_i отличны от единицы, то система $n-1$ уравнений

$$x_i^* = a_{0i} + \lambda_i x_1^* + a_{i1}x_1^* + \dots + a_{in}x_n^* + \dots \quad (4.3)$$

разрешима относительно $x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ при всех достаточно малых μ и x_1 , причем

$$x_i^* = \frac{a_{i0}}{1-\lambda_i} + \frac{a_{i1}}{1-\lambda_i}x_1 + A_i\mu^2 + B_i\mu + \dots, \quad (4.4)$$

где A_i — первого порядка малости относительно x_1 и B_i — второго. После подстановки (4.4) в первое соотношение (4.2) найдем, что

$$\bar{x}_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \dots, \quad (4.5)$$

где при $\mu = 0$ $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = a$. Тем самым задача отыскания неподвижных точек преобразования T в окрестности точки M^* при достаточно малых μ свелась к отысканию неподвижных точек преобразования прямой в прямую (4.5). Ради простоты ограничимся случаем $a \neq 0$. Тогда для первой координаты x_1^* неподвижной точки преобразования T имеем уравнение

$$\alpha_0 + (\alpha_1 - 1)x_1^* + \alpha_2 x_1^{*2} + \dots = 0,$$

из которого находим, что

$$x_1^* = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \alpha_1 \pm \sqrt{(1 - \alpha_1)^2 - 4\alpha_0(\alpha_2 + \dots)} \right\}, \quad (4.6)$$

где многоточие обозначает члены, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$. Из (4.6) вытекает, что в общем случае, когда α_0 первого порядка малости относительно μ и меняет знак вместе с μ , в достаточно малой окрестности M^* нет неподвижных точек преобразования T , если $\alpha\alpha_0 > 0$, напротив, при достаточно малом μ есть две и только две неподвижные точки M_1^* и M_2^* , если $\alpha\alpha_0 < 0$. При $\mu \rightarrow 0$ и $\alpha\alpha_0 < 0$ эти две точки M_1^* и M_2^* сливаются в точку M^* и затем при дальнейшем увеличении μ исчезают.

Составляя характеристическое уравнение для преобразования T в точках M_1^* и M_2^* , можно непосредственно убедиться, что в одной из точек корень λ_1 , обращающийся в единицу при $\mu = 0$, больше единицы, а в другой меньше. К этому же выводу приводят простые соображения, опирающиеся на понятие индекса неподвижной точки.

Допустим, ради определенности, что при $\mu < 0$ имеются две неподвижные точки M_1^* и M_2^* , которые при возрастании μ сливаются и затем исчезают. Окружим точку M^* малой сферой S . При $\mu > 0$ и достаточно малом, что имеется в виду всюду в дальнейшем, индекс векторного поля x равен нулю, поэтому он равен нулю и при $\mu < 0$. При $\mu < 0$ индекс векторного поля x равен сумме индексов неподвижных точек M_1^* и M_2^* . Согласно выражению (3.11), отсюда следует, что для точек M_1^* и M_2^* величина $1 - \lambda_1$ имеет разные знаки.

Пусть теперь, перемещаясь по некоторой кривой L в пространстве параметров преобразования T , мы выходим из области существ-

вованья и устойчивости неподвижной точки через поверхность N_{+1} . При этом в общем случае один, и только один, из корней характеристического уравнения обращается в единицу. Согласно изложенному, при этом переходе через поверхность N_{+1} происходит слияние (с последующим исчезновением) рассматриваемой нами устойчивой неподвижной точки с некоторой неустойчивой неподвижной точкой.

Отметим, что факт слияния рассматриваемой устойчивой неподвижной точки с другими неподвижными точками может быть установлен и из неизменности при достаточно малых μ индекса векторного поля на сфере малого радиуса с центром в точке M^* .

2. Точка M^* называется m -кратной неподвижной точкой преобразования T , если она является неподвижной точкой преобразования T^m , т. е. если

$$T^m M^* = M^* \quad (4.7)$$

и если одновременно не существует меньшего m , для которого также имело бы место равенство (4.7). Из соотношения (4.7) тотчас следует, что одновременно с точкой M^* m -кратными неподвижными точками преобразования T будут и точки

$$TM^*, T^2 M^*, \dots, T^{m-1} M^*. \quad (4.8)$$

Точки $M^*, TM^*, \dots, T^{m-1} M^*$ различны и образуют так называемый цикл, поскольку при применении к ним преобразования T они циклически переставляются. Корни характеристического уравнения преобразования T^m для всех точек $M^*, TM^*, \dots, T^{m-1} M^*$ цикла одинаковы. Действительно, в результате замены переменных $N = TM$ и $\bar{N} = T\bar{M}$, оставляющей неизменными корни характеристического уравнения, точки $M^*, TM^*, \dots, T^{m-1} M^*$ циклически переставляются.

В случае перехода через граничную поверхность N_{-1} один из корней характеристического уравнения обращается в -1 . При этом в окрестности рассматриваемой неподвижной точки $M^*(\mu)$ (напомним, что μ параметр, при изменении которого происходит выход через поверхность N_{-1} из области существования и устойчивости неподвижной точки) при достаточно малых μ нет отличных от $M^*(\mu)$ неподвижных точек. Однако в окрестности $M^*(\mu)$ могут быть неподвижные точки преобразования T^2 . У преобразования T^2 при $\mu = 0$ один из корней λ_i равен единице, но этот случай отличается от предыдущего тем, что теперь при всех достаточно малых μ преобразование T имеет неподвижную точку $M^*(\mu)$, т. е. неподвижная точка не исчезает при переходе через поверхность N_{-1} .

Прежде всего выясним, что могут дать общие соображения, основывающиеся на рассмотрении индекса векторного поля x преобразования T^2 на сколь угодно малой сфере S с центром в точке $M^*(0)$. При переходе параметром μ через нуль индекс неподвижной точки $M^*(\mu)$ меняется на две единицы, а индекс векторного поля на сфере S остается неизменным (предполагается, что S выбирается так, чтобы на ней не было неподвижных точек). Отсюда следует, что внутри сферы S , кроме точки $M^*(\mu)$, должны быть еще неподвижные точки, сливающиеся с M^* при $\mu \rightarrow 0$, поскольку сделанный вывод справедлив для сколь угодно малой сферы S . Таких точек, вообще, может быть четное число, поскольку неподвижные точки T^2 возникают парами. В простейшем случае это один цикл, составленный из двух точек $M_1^*(\mu)$ и $M_2^*(\mu)$, которые либо сливаются с точкой $M^*(\mu)$ при возрастании μ и затем исчезают, либо рождаются из точки $M^*(0)$ при переходе параметра μ , возрастая через значение $\mu = 0$. Причем в первом случае неподвижные точки M_1^* и M_2^* неустойчивые, а во втором — устойчивые.

Поскольку характеристические корни неподвижных точек M^* , M_1^* и M_2^* преобразования T^2 близки и все корни M^* , кроме одного, лежат внутри круга радиуса, меньшего единицы, то индексы точек M^* , M_1^* и M_2^* зависят от корней λ_1 и $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$, обращающихся в единицу при $\mu = 0$. Именно, согласно (3.11),

$$\text{ind } M^* = (-1)^p \text{sign}(\lambda_1 - 1),$$

$$\text{ind } M_1^* = \text{ind } M_2^* = (-1)^p \text{sign}(\lambda_1^{(1)} - 1),$$

где p — число действительных корней λ_i (кроме λ_1) преобразования T^2 . Кроме того, при μ достаточно малых по модулю,

$$(\text{ind } M^*)_{\mu=0} = (\text{ind } M^* + 2\text{ind } M_1^*)_{\mu < 0} = (\text{ind } M^* + 2\text{ind } M_1^*)_{\mu > 0} \quad (4.9)$$

или, поскольку $1 - \lambda_1 > 0$ при $\mu < 0$ и $1 - \lambda_1 < 0$ при $\mu > 0$, то

$$(\text{ind } M^*)_{\mu > 0} - (\text{ind } M_1^*)_{\mu < 0} = -(-1)^p,$$

и поэтому либо $(\text{ind } M_1^*)_{\mu < 0} = (-1)^p$, т. е. M_1^* неустойчива, и $(\text{ind } M_1^*)_{\mu > 0} = 0$, т. е. точки M_1^* при $\mu > 0$ нет, либо $(\text{ind } M_1^*)_{\mu > 0} = -1(-1)^p$, т. е. M_1^* устойчива, и $(\text{ind } M_1^*)_{\mu < 0} = 0$, т. е. точки M_1^* нет при $\mu < 0$.

Пусть дополнительно известно, что при $\mu = 0$ существует поверхность S , заключающая точку M^* , с индексом векторного поля $(-1)^n$. Это, например, имеет место, если при $\mu = 0$ точка M^* устойчива и для нее существует функция Ляпунова V . Величина $n - p - 1$ четная, поэтому из (4.9) следует, что

$$(\text{ind } M_1^*)_{\mu < 0} = 0,$$

т. е. имеет место второй случай рождения из точки M^* двух устойчивых двукратных точек M_1^* и M_2^* .

Перейдем теперь к непосредственному аналитическому рассмотрению бифуркации неподвижной точки преобразования T при появлении корня $\lambda_1 = -1$. В этом случае неподвижная точка $M^*(\mu)$ все время существует. В ее окрестности преобразование T может быть записано в виде:

$$\bar{x}_1 = \lambda_1(\mu) x_1 + \sum_{s,k} a_{1sk} x_s x_k + \sum_{s,k,j} b_{1skj} x_s x_k x_j + \dots, \quad (4.10)$$

$$\bar{x}_i = \lambda_i(\mu) x_i + \sum_{p,q} a_{ipq} x_p x_q + \dots,$$

где $\lambda_1(0) = -1$ и $|\lambda_i(0)| \neq 1$. Составим преобразование T^2

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_1 &= \lambda_1^2 x_1 + (\lambda_1 + \lambda_1^2) a_{111} x_1^2 + \sum_{k=2}^n \chi_1(\lambda_k + 1)(a_{11k} + a_{1k1}) x_1 x_k + \\ &+ \left\{ (\lambda_1 + \lambda_1^3) b_{1111} + 2\lambda_1 a_{111}^2 + \sum_{k=2}^n a_{k11} (a_{11k} + a_{1k1}) \lambda_1 \right\} x_1^3 + \dots, \quad (4.11) \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{x}}_i = \lambda_i^2 x_i + \sum_{p,q} a_{ipq} (\lambda_i + \lambda_p \lambda_q) x_p x_q + \dots$$

Система уравнений

$$\bar{\bar{x}}_i = x_i = x_i^* \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

разрешима и

$$x_i^* = (1 - \lambda_i^2)^{-1} (\lambda_i + \lambda_i^2) a_{i11} x_1^2 + \dots \quad (4.12)$$

После подстановки (4.12) в первую формулу преобразования (4.11) с точностью до величин третьего порядка малости относительно x_1 найдем, что

$$\bar{x}_1 = \lambda_1^2 x_1 + \lambda_1 (1 + \lambda_1) a_{111} x_1^2 + g x_1^3 + \dots, \quad (4.13)$$

где
$$g = \sum_{k=2}^n (a_{11k} + a_{1k1}) \lambda_1 (1 - \lambda_k)^{-1} (\lambda_k + \lambda_1^2) a_{k11} + (\lambda_1 + \lambda_1^3) b_{1111} + \lambda_1 (a_{11k} a_{k11} + a_{1k1} a_{k11}) 2 \lambda_1 a_{111}^2.$$

Допустим, что при $\mu = 0$ $g = g_0 \neq 0$, тогда уравнение $\bar{x}_1 = x_1 = \dot{x}_1$ или, согласно (4.13),

$$\lambda_1^2 - 1 + \lambda_1 (1 + \lambda_1) a_{111} x_1^* + g x_1^{*3} + \dots = 0 \quad (4.14)$$

при $(1 - \lambda_1^2) g_0 > 0$ допускает два действительных решения, обращающихся в нуль, когда $\lambda_1 \rightarrow -1$. Напротив, при обратном неравенстве, при достаточно малом μ в достаточно малой окрестности $x_1^* = 0$ нет решений уравнения (4.14). При переходе через границу N_{-1} величина $1 - \lambda_1^2$ меняет знак с плюса на минус. Поэтому при возрастании μ , соответственно выходу из области устойчивости, имеет место случай слияния с двумя неустойчивыми двукратными точками M_1^* и M_2^* , если $g_0 > 0$, и случай рождения двух устойчивых двукратных неподвижных точек, если $g_0 < 0$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости неподвижной точки M^* в критическом случае, когда $\mu = 0$ и $\lambda_1 = -1$ в предположении, что $g_0 \neq 0$. В этом случае преобразование T^2 , согласно (4.11), имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 + \sum_{k=2}^n a_k x_1 x_k + \beta x_1^3 + \dots, \\ \bar{x}_i &= \lambda_i^2 x_i + \sum_{p,q} (\lambda_i + \lambda_p \lambda_q) a_{ipq} x_p x_q + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Рассмотрим функцию

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = A x_1^2 + \sum_{k=2}^n (x_k - x_k^*)^2, \quad (4.16)$$

где A — пока неопределенное число, а x_k^* определяется согласно (4.12). Функция V положительно-определенная при $A > 0$ и принимает отрицательные значения при $A < 0$. После ряда простых вычислений находим, что

$$\begin{aligned} V(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - V(x_1, \dots, x_n) &= 2A g_0 x_1^4 - \\ &- 2A x_1^2 \sum_{k=2}^n a_k (x_k - x_k^*) + \sum_{k=2}^n (\lambda_k^4 - 1) (x_k - x_k^*)^2 + \\ &+ \sum_{k=2, p, q} 2 \lambda_k^2 (\lambda_k + \lambda_p \lambda_q) a_{kpq} (x_k - x_k^*) ((x_p - x_p^*) (x_q - x_q^*) + \\ &+ (x_p - x_p^*) x_q^* + (x_q - x_q^*) x_p^* + x_p^* x_q^*) + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если обозначить через ρ_1^2 величину $(x_2 - x_2^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2$, то для разности (4.17) можно указать оценку

$$V(\bar{M}) - V(M) < 2A(g_0 + \varepsilon)x_1^4 - AMx_1^2\rho_1 - q\rho_1^2, \quad (4.18)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, $M \rightarrow M_0$ и $q \rightarrow q_0 > 0$ при $x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow 0$. В силу этого функция V будет функцией Ляпунова в достаточно малой окрестности неподвижной точки M^* , если только имеет место при некотором достаточно малом отрицательном δ оценка

$$2Ag_0x_1^4 - AM_0x_1^2\rho_1 - q_0\rho_1^2 < \delta(x_1^4 + \rho_1^2 + x_1^2\rho_1).$$

Для того, чтобы была возможна эта оценка, необходимо и достаточно, чтобы

$$Ag_0 < 0 \text{ и } (AM_0)^2 + 8Ag_0q_0 < 0. \quad (4.19)$$

Оба условия (4.19) можно выполнить, выбрав A достаточно малым положительным при $g_0 < 0$ и малым отрицательным при $g_0 > 0$. Согласно ранее установленной теореме [33], неподвижная точка M^* преобразования T будет устойчивой, если $g_0 < 0$, и неустойчивой, если $g_0 > 0$. Тем самым установлена связь между устойчивостью неподвижной точки M^* в момент бифуркации и характером бифуркации, т. е. выясняется, сливается ли точка M^* с неустойчивыми двукратными неподвижными точками или из нее рождаются устойчивые двукратные неподвижные точки.

3. Бифуркация неподвижной точки при переходе через поверхность N_φ , в случае преобразования прямой в прямую, не имеет места, поскольку при этом должны появиться два корня вида $\lambda_1 = e^{i\varphi}$ и $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$. В окрестности неподвижной точки для значений параметров, близких к бифуркационной поверхности N_φ , преобразование T может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \rho(u \cos \varphi - v \sin \varphi) + a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + \dots, \\ \bar{v} &= \rho(u \sin \varphi + v \cos \varphi) + b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2 + \dots, \\ \bar{x}_i &= \lambda_i x_i + \dots, \end{aligned} \quad (4.20)$$

причем на поверхности N_φ $\rho = 1$.

Индекс неподвижной точки M^* (μ) при рассматриваемой бифуркации не меняется и однократных неподвижных точек в окрестности M^* (0) не возникает. Согласно виду преобразования T , следует ожидать возможности появления многократных неподвижных точек с таким числом m , что $m\varphi$ близко к числу, кратному 2π . Во всяком случае в малой окрестности M^* только такие многократные точки возможны. Сумма индексов возникающих или исчезающих m -кратных точек преобразования T^m , поскольку индекс неподвижной точки M^* не меняется, равняется нулю. В силу этого, в общем случае может возникнуть $2S$ циклов m -кратных точек: S циклов с индексом $+1$ и S с индексом -1 . Точки с индексом -1 неустойчивые, а с индексом $+1$ устойчивые. Структура разбиения пространства параметров вблизи бифуркационной поверхности N_φ может иметь очень сложный и тонкий характер. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим преобразование плоскости в плоскость, которое в полярных координатах r, θ имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \rho r + (-\alpha_0 + \varepsilon\alpha_1(\theta, r))r^2, \\ \bar{\theta} &= \varphi + \theta + \varepsilon\beta_1(\theta, r). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь $\alpha_0 > 0$, ε — некоторое достаточно малое число, величина которого будет уточнена в дальнейшем, $\alpha_1(\theta, r)$ и $\beta_1(\theta, r)$ — периодические по θ периода 2π и дифференцируемые по θ и r функции такие, что при некотором M и $r < r_0$

$$\max \left\{ |\alpha_1|, |\beta_1|, \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \right|, \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} \right|, \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} \right|, \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial r} \right| \right\} < M. \quad (4.22)$$

Примем величины ρ и φ за параметры. На границе $N_\varphi \rho = 1$. Функции $\alpha_1(\theta, r)$ и $\beta_1(\theta, r)$, вообще, могут зависеть от ρ и φ . Если $|\varepsilon| < \frac{\alpha_0}{M}$, то неподвижная точка $r=0$ преобразования (4.21) устойчива при $\rho \leq 1$ и неустойчива при $\rho > 1$. Прежде всего покажем, что при переходе величины ρ через значение $\rho=1$ из состояния равновесия рождается замкнутая непрерывная кривая, охватывающая точку $r=0$. При $\rho > 1$ неподвижная точка $r=0$ неустойчива:

$$\bar{r} > r, \text{ если } r \leq \frac{\rho - 1}{\alpha_0 - |\varepsilon| M} = r^*, \quad (4.23)$$

$$\bar{r} < r, \text{ если } r_0 > r \geq \frac{\rho - 1}{\alpha_0 + |\varepsilon| M} = r_*.$$

Дифференцируя (4.21), найдем, что

$$d\bar{r} = \left\{ \rho - 2(\alpha_0 - \varepsilon \alpha_1) r + \varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} r^2 \right\} dr + \varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} r^2 d\theta, \quad (4.24)$$

$$d\bar{\theta} = \varepsilon \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} r d\theta + \varepsilon \left(\beta_1 + r \frac{\partial \beta_1}{\partial r} \right) dr + d\theta,$$

и поэтому

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{\theta}} = \frac{\left[\rho - 2\alpha_0 r + \varepsilon r \left(\alpha_1 + r \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} \right) \right] \frac{dr}{d\theta} + \varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} r}{1 + \varepsilon r \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} + \varepsilon \left(\beta_1 + r \frac{\partial \beta_1}{\partial r} \right) \frac{dr}{d\theta}}. \quad (4.25)$$

Из соотношений (4.24) и (4.25) находим, что

$$d\bar{r} < (\rho - 2\alpha_0 r + 2r \varepsilon M + \varepsilon r^2 M) dr \quad (4.26)$$

при $d\theta = 0$ и

$$\left| \frac{d\bar{r}}{d\bar{\theta}} \right| < \frac{[\rho - 2\alpha_0 r + \varepsilon r(1+r)M] \left| \frac{dr}{d\theta} \right| + \varepsilon r M}{1 - \varepsilon r M + \varepsilon(1+r)M \left| \frac{dr}{d\theta} \right|}. \quad (4.27)$$

Из найденных оценок (4.26) и (4.27) вытекает, что в кольце C_ρ , определяемом неравенствами

$$r_* = \frac{\rho - 1}{\alpha_0 + |\varepsilon| M} < r < \frac{\rho - 1}{\alpha_0 - |\varepsilon| M} = r^* \quad (4.28)$$

и лежащем при $\rho < \rho_0$ внутри круга радиуса r_0 , при $\left| \frac{dr}{d\theta} \right| \leq N$, где N некоторое фиксированное число, и достаточно малом $|\varepsilon|$, выполняются соотношения

$$d\bar{r} < q(\rho) dr, \quad (4.29)$$

$$\text{где } 0 < q(\rho) < 1 - \frac{1}{2}(\rho - 1)$$

при $\rho > 1$, и

$$\left| \frac{d\bar{r}}{d\bar{\theta}} \right| < p(\rho) \left| \frac{dr}{d\theta} \right| + \delta, \quad (4.30)$$

где $0 < p(\rho) < 1$ при $\rho > 1$ и $(1 - p(\rho))N \gg \delta$.

Пусть теперь ε таково, что в кольце C_ρ , где $\rho < \rho_0$, выполнены оценки (4.29) и (4.30). Рассмотрим множество Φ всевозможных замкнутых кривых, расположенных внутри кольца C_ρ , вида

$$r = \Psi(\theta),$$

где $\Psi(\theta)$ — однозначная и периодическая функция с периодом 2π , удовлетворяющая условиям

$$r_* \leq |\Psi(\theta)| \leq r^* \text{ и } |\Psi(\theta + \Delta\theta) - \Psi(\theta)| \leq N\Delta\theta. \quad (4.31)$$

Если в Φ определить расстояние между двумя кривыми $r = \psi_1(\theta)$ и $r = \psi_2(\theta)$, как

$$\rho(\psi_1, \psi_2) = \max |\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)|, \quad (4.32)$$

то Φ будет полным линейным функциональным пространством.

В силу оценок (4.29) и (4.30) преобразование (4.21) является сжимающим. Тем самым, согласно известному и изложенному ранее принципу сжатых отображений в кольце C_ρ , существует одна, и только одна, инвариантная кривая $r = \psi(\theta, \rho)$, принадлежащая Φ , и всякая другая кривая из Φ или точка $M \subset C_\rho$ при последовательных применениях преобразования (4.21) асимптотически приближается к инвариантной кривой $r = \psi(\theta, \rho)$.

Преобразование (4.21) определяет некоторое точечное отображение на инвариантной кривой $r = \psi(\theta, \rho)$

$$\bar{\theta} = \varphi + \theta + \varepsilon\beta_1(\theta, \psi(\theta, \rho))\psi(\theta, \rho). \quad (4.33)$$

Преобразование (4.33) можно рассматривать как отображение окружности в себя, зависящее от двух параметров φ и ρ . Неподвижными точками преобразования T^m , где T обозначает преобразование, определяемое формулами (4.21), могут быть только m -кратные неподвижные точки преобразования (4.33).

Прежде, чем перейти к исследованию преобразования (4.33), установим, при каких предположениях оно непрерывно зависит от параметров φ и ρ . Допустим, что исходное преобразование (4.21) непрерывно зависит от параметров ρ и φ и

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right|, \left| \frac{\partial \alpha_0}{\partial \rho} \right|, \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi} \right|, \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} \right|, \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} \right|, \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial \rho} \right| \right\} < M, \quad (4.34)$$

тогда для любой точки $M(\theta, r)$, принадлежащей кольцам C_{ρ_1} и C_{ρ_2} , имеем:

$$\begin{aligned} & | \{ \rho r + (-\alpha_0 + \varepsilon\alpha_1)r^2 \}_{\rho_2, \varphi_2} - \{ \rho r + (-\alpha_0 + \varepsilon\alpha_1)r^2 \}_{\rho_1, \varphi_1} | < \\ & < r(1 + |\varepsilon|rM + rM) |\rho_2 - \rho_1| + r^2(M + |\varepsilon|M) |\varphi_2 - \varphi_1|, \quad (4.35) \\ & | \{ \varphi + \theta + \varepsilon\beta_1 r \}_{\rho_2, \varphi_2} - \{ \varphi + \theta + \varepsilon\beta_1 r \}_{\rho_1, \varphi_1} | < \\ & < (1 + r|\varepsilon|M) |\varphi_2 - \varphi_1| + |\varepsilon|M |\rho_2 - \rho_1|. \end{aligned}$$

Неравенство (4.35), в силу (4.32), показывает, что выполнено условие (3.16) теоремы о непрерывной зависимости инвариантной кривой $r = \psi(r, \rho, \varphi)$ от параметров ρ и φ . Действительно, пусть некоторая кривая $r = \psi(\theta)$, удовлетворяющая условию (4.31) и лежащая в C_{ρ_1}, C_{ρ_2} , переводится преобразованием (4.21) при значениях параметров ρ_1, φ_1 и ρ_2, φ_2 соответственно в кривые $r = \psi_1(\theta)$ и $r = \psi_2(\theta)$, тогда

$$\begin{aligned} \max |\psi_1 - \psi_2| & < \frac{r(1 + rM + |\varepsilon|M + r|\varepsilon|M)}{1 - q} |\rho_2 - \rho_1| + \\ & + N \frac{r(1 + 2|\varepsilon|rM + rM)}{1 - q} |\varphi_2 - \varphi_1|. \quad (4.36) \end{aligned}$$

Далее, согласно (4.29), $q \leq 1 - \frac{1}{2}(\rho - 1)$ и, согласно (4.28), $r < \frac{\rho - 1}{\alpha_0 - |\varepsilon|M}$, т. е.

$$\frac{r}{1 - q} < \frac{2}{\alpha_0 - |\varepsilon|M}.$$

Следовательно, оценка (4.36) при некотором постоянном L может быть записана в виде:

$$\rho(\psi_1, \psi_2) = \max |\psi_1 - \psi_2| < L \{ |\rho_2 - \rho_1| + |\varphi_2 - \varphi_1| \},$$

совпадающем с условием (3.16). Тем самым установлена непрерывная зависимость преобразования (4.33) окружности в себя от параметров φ и ρ при $\rho - 1 > 0$ и достаточно малом. Перейдем к исследованию многократных неподвижных точек преобразования (4.33) в зависимости от параметров φ и ρ .

Характер преобразования (4.33) в значительной мере определяется так называемым числом вращения, введенным А. Пуанкаре в связи с изучением структуры разбиения тора на траектории [32]. Пусть θ_0 — какая-либо точка окружности. В результате последовательного применения к точке θ_0 преобразования (4.33) найдем точки $\theta_1, \theta_2, \dots$. Число вращения ω определяется как

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{2\pi n}. \tag{4.37}$$

Предел этот всегда существует (если $\bar{\theta}$, согласно преобразованию (4.33), монотонно растет с θ и преобразование взаимнооднозначно, что в рассматриваемом случае имеет место) и не зависит от начальной точки θ_0 . Число вращения ω непрерывно зависит от параметров, если само преобразование от них зависит непрерывно [35].

Вопрос о многократных неподвижных точках преобразования (4.33) теперь решается теоремой Пуанкаре — Данжуа [35], утверждающей, что ω может быть рациональным и равным несократимой дроби p/q в том, и только в том, случае, если рассматриваемое преобразование окружности в себя имеет q -кратные неподвижные точки.

Число вращения ω является непрерывной функцией параметров ρ и φ , причем, согласно виду преобразования (4.33), поскольку $\psi(\theta, \rho, \varphi) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \omega(\varphi, \rho) = \frac{\varphi}{2\pi}. \tag{4.38}$$

Пусть теперь L — любая непрерывная кривая, соединяющая две точки граничной кривой N_φ с разными значениями параметра φ , и расположенная, исключая концы, в области $1 + \delta > \rho > 1$, где δ достаточно мало. Число вращения ω вдоль кривой L меняется непрерывно от некоторого значения φ_1 до φ_2 , принимая все промежуточные значения. При этом каждому промежуточному рациональному значению p/q , где p и q взаимно простые, отвечает преобразование (4.21), имеющее q -кратную неподвижную точку. Если среди этих q -кратных точек есть устойчивые в линейном приближении, что является общим случаем, то имеется на кривой L целый интервал, соответствующий наличию q -кратной устойчивой неподвижной точки. Пусть L_1, L_2, \dots — последовательность кривых, стягивающихся к некоторой точке границы N_φ , у которой параметр $\varphi = \frac{2\pi p}{q}$, причем для кривых L_1, L_2, \dots все время $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Начиная с некоторого номера, каждая из кривых L_i пересекает „область“, отве-

чающую существованию q -кратной неподвижной точки. В этом смысле можно сказать, что к каждой точке N_q , соответствующей значению параметра φ вида $2\pi p/q$, примыкает область существования q -кратных неподвижных точек преобразования (4.21).

5. РОЖДЕНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОТ МНОЖЕСТВА ИНВАРИАНТНЫХ ТОЧЕК РАЗМЕРНОСТИ m

Пусть преобразование $T(\mu)$

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) \quad (5.1)$$

при $\mu = 0$ допускает множество J инвариантных точек размерности m . Будем говорить, что неподвижная точка $M^*(\mu)$ преобразования $T(\mu)$ порождена от множества инвариантных точек J , если при $\mu \rightarrow 0$ точка $M^*(\mu)$ стремится к множеству J . Если в области G преобразование $T(\mu)$ в окрестности $\mu = 0$ зависит от параметра μ и при $\mu = 0$ в этой области нет неподвижных точек преобразования $T(\mu)$, отличных от точек J , то в любой строго внутренней к G ограниченной области G' при $|\mu| < \bar{\mu}$, где $\bar{\mu}$ достаточно мало, нет неподвижных точек $T(\mu)$, которые бы не порождались множеством J . Действительно, в противном случае существовала бы последовательность значений $\mu_1, \mu_2, \dots \rightarrow 0$ и соответствующих ей неподвижных точек M_1^*, M_2^*, \dots , для которых $\rho(M_k^*, J) > \delta > 0$. В силу ограниченности области G' из последовательности M_1^*, M_2^*, \dots можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предельная точка этой подпоследовательности, в силу непрерывной зависимости преобразования $T(\mu)$ от параметра μ , будет неподвижной точкой преобразования $T(0)$. Эта точка лежит в G и отлична от точек J , что противоречит предположению.

Таким образом, исследование неподвижных точек преобразования $T(\mu)$ при достаточно малых μ сводится к изучению рождения неподвижных точек из инвариантного многообразия J .

Вопрос об отыскании неподвижных точек $M^*(\mu)$, сливающихся при $\mu \rightarrow 0$ с одной из точек множества J , был рассмотрен А. Пуанкаре в связи с задачей отыскания периодических движений дифференциальных уравнений методом малого параметра.

Результаты А. Пуанкаре^[32] для случаев $m=0$ и $m=1$ были обобщены И. Г. Малкиным^[34] на случай произвольной размерности множества инвариантных точек J . При этом необходимо отметить, что ни у А. Пуанкаре, ни у И. Г. Малкина нет изложенной выше постановки задачи. В этих работах речь идет об аналитическом продолжении по параметру решений уравнений, определяющих периодические движения. Хааг^[25], вне непосредственной связи с работами А. Пуанкаре, рассмотрел при любом m в так называемых канонических переменных вопрос о рождении и устойчивости неподвижных точек преобразования $T(\mu)$, предполагая лишь, что функции f_i дважды непрерывно дифференцируемы по переменным x_1, x_2, \dots, x_n и параметру μ .

Теория рождения и устойчивости неподвижных точек преобразования $T(\mu)$ при малых μ может служить отправным пунктом для обоснования известного метода малого параметра и, в частности, позволяет перенести метод малого параметра на важный для приложений случай дифференциальных уравнений, правые части которых допускают разрывы непрерывности.

Пусть в рассматриваемой нами области множество инвариантных точек представимо в виде:

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.2)$$

где u_1, \dots, u_m — действительные параметры. Для точек J тождественно относительно u_1, u_2, \dots, u_m

$$\varphi_i(u_1, \dots, u_m) = f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; 0). \quad (5.3)$$

Дифференцируя (5.3) по u_s , придем к соотношениям

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_s} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s} + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_s}, \quad (5.4)$$

означающим, что преобразование T , линеаризованное в точке $x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2, \dots, x_n = \varphi_n$, при $\mu = 0$ касательные к J вектора $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_s}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_s} \right)$ переводит в себя. Следовательно, характеристическое уравнение преобразования T при $\mu = 0$ в точках J имеет m единичных корней. Если допустить, что все остальные корни характеристического уравнения отличны от единицы, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - 1 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

равен $n - m$, поскольку, согласно предположению, система (5.4) имеет m , и только m , независимых решений $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_s} \right) (s = 1, 2, \dots, m)$.

Рассмотрим теперь систему уравнений, определяющую неподвижные точки $M^*(\mu)$ преобразования $T(\mu)$,

$$x_i^* = f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \mu). \quad (5.6)$$

При $m = 0$, когда J состоит из изолированной точки, якобиан системы (5.6) при $\mu = 0$ отличен от нуля, поскольку, согласно предположению, ранг матрицы (5.5) равен n . В силу этого при малых μ в окрестности точки J есть одна, и только одна, неподвижная точка $M^*(\mu)$. При $m \neq 0$ и $\mu = 0$ якобиан системы (5.6), напротив, равен нулю. Однако, в силу сделанного предположения о ранге матрицы (5.5), минор порядка $n - m$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} - 1, & \dots & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}}, & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - 1 \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

можно считать отличным от нуля. В силу этого последние $n - m$ уравнений (5.6) могут быть разрешены при достаточно малых μ относительно $x_{m+1}^*, x_{m+2}^*, \dots, x_n^*$, так что

$$x_{m+s}^* = \Psi_{m+s}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*; \mu) \quad (s = 1, 2, \dots, n - m). \quad (5.8)$$

Уравнения (5.8) при $\mu = 0$ представляют собою уравнения J , поэтому из предположения неравенства нулю минора (5.7) следует

представимость J в виде (5.8) с $\mu = 0$. Используя (5.8), оставшиеся m уравнений (5.6) запишем в виде:

$$x_j^* = f_j(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*, \Psi_{m+1}^*, \dots, \Psi_n^*; \mu) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (5.9)$$

При $\mu = 0$ уравнения (5.9) выполняются тождественно относительно $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$. В силу этого правые части уравнений (5.9) представляются в виде:

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \dots, x_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_n; \mu) &= x_i + \left(\frac{df_i}{d\mu} \right)_{\mu=0} \mu + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2f}{d\mu^2} \right) \mu^2 = \\ &= x_i + \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \mu} + \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+s}} \frac{\partial \psi_{m+s}}{\partial \mu} \right\}_{\mu=0} \mu + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2f}{d\mu^2} \right) \mu^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для выяснения разрешимости при малых μ системы уравнений (5.9) и одновременно устойчивости находимой неподвижной точки составим характеристическое уравнение преобразования (5.1):

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_* - z, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_*, & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_* - z \end{vmatrix} = 0 \quad (5.11)$$

где производные взяты в неподвижной точке с координатами, удовлетворяющими уравнениям (5.8) и (5.9).

Из соотношений

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_n; \mu) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{m+j}} \right) (x_{m+j} - \psi_{m+j}) + \dots, \\ f_i(x_1, \dots, x_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_n; \mu) &= \begin{cases} x_i + \left(\frac{df_i}{d\mu} \right)_{\mu=0} \mu + \dots & \text{при } i \leq m, \\ \Psi_i & \text{при } i > m \end{cases} \end{aligned}$$

найдем, что

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right) = \begin{cases} \partial_{is} + \left[\frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{df_i}{d\mu} \right)_{\mu=0} \right]_* \mu - \sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial x_s} \right)_* & \text{при } i \leq m, \\ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_s} \right)_* - \sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial x_s} \right)_* & \text{при } i > m. \end{cases} \quad (5.12)$$

Прибавив к S -му столбцу определителя (5.11), где S последовательно равно $1, 2, \dots, m$, один за другим первый столбец, умноженный на $\frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x_s}$, второй, умноженный на $\frac{\partial \psi_{m+2}}{\partial x_s}$, ..., n -ый, умноженный на $\frac{\partial \psi_n}{\partial x_s}$, и, воспользовавшись найденными соотношениями (5.12), приведем его к виду:

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} a_{11}\mu + 1 - z, & a_{12}\mu, & \dots & a_{1m}\mu, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_* \\ a_{21}\mu, & a_{22}\mu + 1 - z, & \dots & a_{2m}\mu, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{m+1}}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\mu, & a_{m2}\mu, & \dots & a_{mm}\mu + 1 - z, & \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right)_* \\ (1-z)\frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x_1}, & (1-z)\frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x_2}, & \dots & (1-z)\frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x_m}, & \left(\frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n}\right)_* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-z)\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1}, & (1-z)\frac{\partial \psi_n}{\partial x_2}, & \dots & (1-z)\frac{\partial \psi_n}{\partial x_m}, & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_* \end{vmatrix}, \quad (5.13)$$

где

$$a_{is} = \left[\frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{df_i}{d\mu} \right) \right]_* + \mu(\dots). \quad (5.14)$$

Характеристическое уравнение (5.13) при $\mu = 0$ имеет m единичных корней и по предположению $n - m$ корней, отличных от единицы. Разделим каждый из m первых столбцов определителя (5.13) на μ и введем обозначение $z = 1 + \mu\sigma$, в результате чего придем к уравнению для σ вида:

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma, & a_{12}, & \dots & a_{1m}, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mm} - \sigma, & \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right)_* \\ \sigma \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x_1}, & \sigma \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x_2}, & \dots & \sigma \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x_m}, & \left(\frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}}\right)_* - 1 - \mu\sigma, & \dots & \left(\frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n}\right)_* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1}, & \sigma \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2}, & \dots & \sigma \frac{\partial \psi_n}{\partial x_m}, & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}}\right)_*, & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_* - 1 - \mu\sigma \end{vmatrix}, \quad (5.15)$$

Уравнение (5.15) при $\mu \rightarrow 0$ имеет m корней, стремящихся к конечным значениям $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, и $n - m$ корней, неограниченно возрастающих. Неподвижная точка $M^*(\mu)$ будет устойчивой при малых μ , если действительные части корней $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ уравнения (5.15) при $\mu = 0$ отрицательны, а корни уравнений (5.13) $z_{m+1}, z_{m+2}, \dots, z_n$, отличные от единицы, по модулю меньше единицы, и будет неустойчивой, если хотя бы у одного из корней $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ действительная часть положительна или один из корней z_{m+1}, \dots, z_n по модулю больше единицы.

Заметим, что уравнения, определяющие $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ и z_{m+1}, \dots, z_n упрощаются, если переменные x_1, x_2, \dots, x_n выбраны так, что при $\mu = 0$ производные $\frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial x_s} = 0$. Условие равенства нулю этих производных при $\mu = 0$ будет, в частности, выполнено, если для всех точек J

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0. *$$

* Именно такие переменные были использованы в работе [25] Хаага.

В этом случае уравнение, определяющее $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, будет

$$\Delta_1(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (5.16)$$

и уравнение для z_{m+1}, \dots, z_n будет

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} - z & \dots & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - z \end{vmatrix}. \quad (5.17)$$

В рассматриваемом случае отличным от нуля при $\mu = 0$ минором матрицы (5.5) может быть только минор (5.7), совпадающий с $\Delta_2(1)$. При $\mu = 0$ якобианом системы уравнений (5.9), которую, согласно (5.10), можно записать в виде

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mu} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+s}} \frac{\partial \psi_{m+s}}{\partial \mu} + \mu(\dots) = 0, \quad (5.18)$$

будет $\Delta_1(0)$. Если характеристическое уравнение (5.13) имеет ровно m корней, равных единице, или, что то же, (5.17) не имеет равных единице корней, то $\Delta_2(1) \neq 0$, и если корни уравнения (5.16) отличны от нуля, то $\Delta_1(0) \neq 0$.

Отметим, что в общем случае якобиан системы уравнений (5.18) при $\mu = 0$ равен $\Delta_1(0) = \Delta(0)\Delta_2(1)$, поэтому, если система уравнений (5.18) при $\mu = 0$ имеет решение, то она при наших предположениях будет его иметь и при достаточно малых μ . Все сказанное резюмируем следующей теоремой: каждому корню x_1^*, \dots, x_m^* системы уравнений (5.18) с $\mu = 0$ отвечает неподвижная точка $M^*(\mu)$, стремящаяся при $\mu \rightarrow 0$ к точке с координатами x_1^*, \dots, x_m^* множества J , если только уравнение (5.15) при $\mu = 0$ не имеет нулевых корней и если число единичных корней уравнения (5.11) совпадает с размерностью m множества инвариантных точек J . Точка $M^*(\mu)$ будет устойчива, если все корни $\Delta(\sigma)$ имеют отрицательные действительные части, а корни уравнений (5.11), отличные от единицы, лежат внутри единичного круга.

В заключение сделаем ряд общих замечаний:

1. Для составления m уравнений

$$g_i = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \mu} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+s}} \frac{\partial \psi_{m+s}}{\partial \mu} \right\}_{\mu=0} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (5.19)$$

определяющих координаты x_1^*, \dots, x_m^* точек J , порождающих неподвижные точки преобразования T , нет необходимости, как это проделывалось при теоретическом рассмотрении, в фактическом исключении переменных x_{m+1}, \dots, x_n . Уравнения (5.19) могут быть составлены непосредственно по формулам (5.1) рассматриваемого точечного отображения и уравнениям (5.8) поверхности J . Именно, подставляя в уравнения (5.19) значения $\frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial \mu}$, находим из соотношений

$$\frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial \mu} \left(\frac{\partial f_{m+s}}{\partial x_{m+j}} - \delta_{sj} \right) = - \frac{\partial f_{m+s}}{\partial \mu},$$

получаемых дифференцированием (5.9), приведем (5.19) к виду

$$\left| \begin{array}{c} \Delta_2(1) \\ \frac{\partial f_{m+1}}{\partial \mu} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_i}{\partial \mu} \end{array} \right| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.19')$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+1}}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \end{array} \right|$$

2. Неподвижные точки точечного отображения

$$\bar{x}_i = x_i + \mu g_i + \mu^2(\dots) \quad (5.20)$$

поверхности J в себя и неподвижные точки преобразования $T(\mu)$ имеют одинаковые первые m координат, а остальные отличаются на величины порядка μ . В случае, когда $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_s} = 0$ при $\mu = 0$, это отличие будет даже второго порядка малости и с точностью до величин порядка μ^2 совпадают и корни уравнений (5.15) и (5.16).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на поверхности J

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i + \mu(\dots). \quad (5.21)$$

Состояниям равновесия этой системы соответствуют неподвижные точки преобразования (5.20) и, как было установлено раньше [33], устойчивому или неустойчивому состоянию равновесия системы (5.21) соответствует (соответственно) устойчивая или неустойчивая неподвижная точка преобразования (5.20). Характеристическое уравнение системы (5.21) есть $\Delta_1(\sigma)$.

3. Заметим, что при непрерывном переходе от одних переменных к другим с якобианом, все время не обращающимся в нуль, корни характеристического уравнения (5.15) не меняются. При $\sigma = 0$ $\Delta(0) = \Delta_1(0)\Delta_2(1)$; поэтому, если при рассматриваемом непрерывном переходе все время $\Delta_2(1) \neq 0$, то все время и $\Delta_1(0) \neq 0$. Из $\Delta_1(0) \neq 0$ следует, что ни один из корней σ при рассматриваемой непрерывной замене не обращается в нуль и, следовательно, такая замена заведомо при $m = n$ не меняет знака корня σ . Поэтому при рассмотрении устойчивости отражающейся неподвижной точки в этом случае можно вместо уравнения (5.15) рассматривать уравнение первой степени (5.16).

ЛИТЕРАТУРА

(Дополнительная к списку, приведенному в предыдущей работе [33] автора.)

32. А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Классики естествознания, М.—Л., 1947.
33. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1958, 1.
34. И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Л.—М., 1949.
35. А. Г. Майер, Ученые записки Горьковского государственного университета, 1939, вып. 12, 215—229.
36. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М.—Л., 1951.
37. В. В. Немыцкий, УМН, 1936, вып. 1.
38. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВА, 1949.
39. Ю. И. Неймарк, О периодических движениях релейных систем, Сборник памяти А. А. Андропова.