ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1958*

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ИЗ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН

В. В. Колпаков

Решается задача об отражении плоской электромагнитной волны от периодической структуры, состоящей из чередующихся слоев диэлектрика без потерь и тонких проводящих пластин, расположенных нормально к идеально проводящей плоскости.

На рис. 1 изображена периодическая структура, состоящая из плоских слоев диэлектрика без потерь и тонких проводящих пластин. Эта структура, представляющая собой искусственный диэлектрик с потерями, расположена на идеально проводящей плоскости $z = l$. На внешнюю поверхность структуры под углом θ_0 к нормали падает плоская электромагнитная волна, электрический вектор которой перпендикулярен плоскости $x0z$.

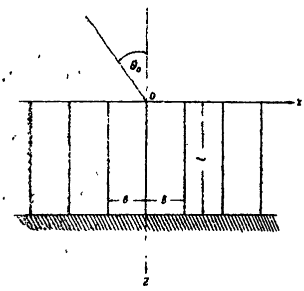

Рис. 1. Общая схема периодической структуры.

Задачу будем решать с помощью метода функциональных уравнений [1,2] с использованием приближенных граничных условий для проводящей пластины [3].

Пусть толщина пластин τ мала и ею можно пренебречь по сравнению с периодом структуры b. Обозначим через $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$; $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = 0$ и ε_0, μ_0 электромагнитные параметры, соответственно, материала проводящих пластин, слоев диэлектрика и свободного пространства.

Вследствие периодичности структуры для всех компонент поля при $z < 0$ и $z > 0$ справедливо соотношение

$$E_y(x + nb, z) = e^{inbk_0 \sin\theta_0} E_y(x, z) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots), \tag{1}$$

где

$$k_0 = \omega(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2} = 2\pi/\lambda_0.$$

Обозначая

$$E_y(0, z) = g(z) = \int_C e^{iwz} G(w)\, dw,$$

где C — некоторый контур интегрирования на плоскости комплексного переменного w, и учитывая (1), можно представить решение волнового уравнения для единственной компоненты электрического поля $E_y = E(x, z)$ в форме:

$$E(x, z) = \int_C e^{iwz} \frac{e^{ibk_0 \sin\theta_0} \sin\alpha_0 x + \sin\alpha_0 (b - x)}{\sin\alpha_0 b} G(w)\, dw \quad \text{для } z < 0, \tag{2}$$

где

$$\alpha_0 = (k_0^2 - w^2)^{1/2},$$

и

$$E(x, z) = \int_C e^{iwz} \frac{e^{ibk_0 \sin\theta_0} \sin\alpha x + \sin\alpha (b - x)}{\sin\alpha b} G(w)\, dw \quad \text{для } z > 0, \tag{3}$$

где

$$\alpha = (k^2 - w^2)^{1/2}, \qquad k = \omega(\varepsilon_2 \mu_2)^{1/2} = 2\pi/\lambda.$$

Функция $G(w)$ должна быть такова, чтобы вектор напряженности магнитного поля был непрерывен на вспомогательных плоскостях $x = nb$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots)$ в полупространстве $z < 0$. Из этого условия получаем

$$\int_C e^{iwz} P(w)\, \alpha_0 G(w)\, dw = 0 \qquad \text{при } z < 0, \tag{4}$$

где
$$P(w) = i\, \frac{\cos \alpha_0 b - \cos (k_0 b \sin \theta_0)}{\sin \alpha_0 b}.$$

В полупространстве $z > 0$ для проводящих пластин справедливы граничные условия [3]

$$E_y(nb + 0, z) = E_y(nb - 0, z) = \frac{1}{Y}\left[H_z(nb + 0, z) - H_z(nb - 0, z)\right], \tag{5}$$

где $Y = \sigma_1 \tau - i \omega \varepsilon_1 \tau$ — поверхностная проводимость пластины. Если токами смещения в пластине можно пренебречь, то $\frac{1}{Y} = \rho = \frac{1}{\sigma_1 \tau}$, где ρ — активное поверхностное сопротивление пластины.

Подставляя в (5) выражения для тангенциальных компонент поля, получим

$$\int_C e^{iwz} Q(w)\, \alpha\, G(w)\, dw = 0 \qquad \text{при } z < 0, \tag{6}$$

где
$$Q(w) = i\, \frac{\cos \alpha b - \cos (k_0 b \sin \theta_0) - i\, \frac{kWY}{2} \frac{\sin \alpha b}{\alpha}}{\sin \alpha b}, \qquad W = (\mu_2/\varepsilon_2)^{1/2}.$$

Функция $P(w)$ имеет нули p_n и полюсы v_m в точках:

$$w = \pm p_n = \pm \sqrt{k_0^2 - [k_0 \sin \theta_0 + (2\pi n/b)]^2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots),$$

$$w = \pm v_m = \pm \sqrt{k_0^2 - (\pi m/b)^2} \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots).$$

Сравнивая числитель функции $Q(w)$ с дисперсионным уравнением для безграничной периодической структуры [3], находим, что если для каждого типа волны, возбуждающейся в структуре, выполняется закон Снелля

$$\gamma_n \sin \theta = k_0 \sin \theta_0,$$

то $Q(w)$ имеет нули в точках

$$w = \pm q_n = \pm \gamma_n \cos \theta.$$

Полюсами $Q(w)$ являются точки

$$w = \pm w_m = \pm \sqrt{k^2 - (\pi m/b)^2}.$$

Для удобства анализа временно будем считать, что k_0 и k имеют исчезающе малую положительную мнимую часть $Im k = Im k_0 = k_0''$. Функции $P(w)$ и $Q(w)$ голоморфны в полосе $-k_0'' \cos \theta_0 < Im w < k_0' \cos \theta_0$ и не имеют здесь нулей, причем в пределах этой полосы $P(w) \to 1$ и $Q(w) \to 1$ при $|w| \to \infty$. На основании [4] представим $P(w)$ и $Q(w)$ в виде произведения двух функций

$$P(w) = P_1(w)\, P_2(w), \qquad Q(w) = Q_1(w)\, Q_2(w),$$

где $P_1(w)$ и $Q_1(w)$ голоморфны и не имеют нулей в верхней полуплоскости $Im w > -k_0'' \cos \theta_0$, а $P_2(w) = P_1(-w)$ и $Q_2(w) = Q_1(-w)$ в нижней полуплоскости $Im w < k_0'' \cos \theta_0$, причем

$$P_1(w) = \frac{\sqrt{k_0 P(0)}\, (1 + w/p_0) \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + w/p_n)(1 + w/p_{-n})}{\sqrt{k_0 + w}\, \prod\limits_{m=1}^{\infty} (1 + w/v_m)},$$

$$Q_1(w)=\frac{\sqrt{kQ(0)}\,(1+w/q_0)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+w/q_n)\,(1+w/q_{-n})}{\sqrt{k+w}\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1+w/w_m)}.$$

Будем искать функцию $G(w)$ в виде

$$G(w)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\sqrt{k_0+w}\,\sqrt{k-w}\,(w-p_0)\,P_1(w)\,Q_2(w)}\left(A+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_n}{w+q_n}\right), \quad (7)$$

а контур интегрирования выберем так, как показано на рис. 2. Контур идет, в основном, по действительной оси, но огибает снизу все точки $w=-q_n$ и сверху точку $w=p_0=k_0\cos\theta_0$. Уравнения (4) и (6) удовлетворяются, поскольку функция $P(w)\,\alpha_0\,G(w)$ не имеет полюсов ниже контура C, а функция $Q(w)\,\alpha_0\,G(w)$ — выше контура C. Кроме того, эти функции при $|w|\to\infty$ в соответствующих полуплоскостях стремятся к нулю, как $\frac{1}{w}$.

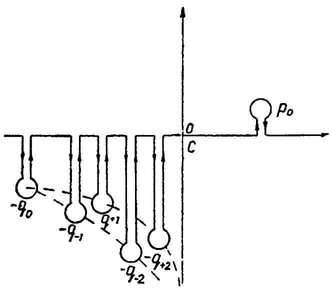

Рис. 2. Выбор контура интегрирования.

Подставляя (7) в (3), получим поле в периодической структуре в виде суперпозиции полей различных типов волн с постоянными распространения $+q_n$ и $-q_n$ вдоль оси z. На металлической подложке имеет место граничное условие

$$E(x, z)_{z=l}=0, \quad (8)$$

которому должна удовлетворять каждая пара волн (прямая и обратная). Используя (8), получим систему уравнений для коэффициентов ряда (7)

$$A_r=2q_r\Gamma_r\,e^{i2q_rl}\left(A+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_n}{q_r+q_n}\right) \qquad (r=0, \pm 1, \pm 2, \pm\ldots), \quad (9)$$

где

$$\Gamma_r=\frac{(p_0+q_r)\,(p_r-q_r)}{(p_0-q_r)\,(p_r+q_r)}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{q_r}{v_m}\right)\left(1-\frac{q_r}{w_m}\right)}{\left(1-\frac{q_r}{v_m}\right)\left(1+\frac{q_r}{w_m}\right)}\ \prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq r}}^{\infty}{}'\,\frac{\left(1-\frac{q_r}{p_n}\right)\left(1+\frac{q_r}{q_n}\right)}{\left(1+\frac{q_r}{p_n}\right)\left(1-\frac{q_r}{q_n}\right)}$$

(штрих означает, что член с $n=0$ отсутствует).

При $z<0$ интеграл (2) представим в виде суммы вычетов в точках $w=\pm p_0$ и $w=-p_n$.

$$E(x,z)=B_0'e^{ik_0(x\sin\theta_0+z\cos\theta_0)}+B_0e^{ik_0(x\sin\theta_0-z\cos\theta_0)}+\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}B_\nu e^{ik_0\left[x\left(\sin\theta_0+\nu\frac{\lambda_0}{b}\right)-z\sqrt{1-\left(\sin\theta_0+\nu\frac{\lambda_0}{b}\right)^2}\right]}, \quad (10)$$

$$B_0'=\frac{1}{2\sqrt{kk_0P(0)\,Q(0)}}\,\frac{\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{p_0}{v_m}\right)\left(1-\frac{p_0}{w_m}\right)}{\left(1-\frac{p_0}{q_0}\right)\prod\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{p_0}{q_n}\right)\left(1+\frac{p_0}{p_n}\right)}\left(A+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_n}{p_0+q_n}\right) \quad (11)$$

Аналогичным образом выражаются амплитуда зеркально отраженной плоской волны B_0 и амплитуды пространственных гармоник B_ν, которые обуславливают плоские волны, распространяющиеся под углом $\varphi_\nu = \arcsin\left(\sin\theta_0 + \nu\frac{\lambda_0}{b}\right)$ к внешней нормали, если $|\sin\theta_0 + \nu(\lambda_0/b)| < 1$. Налагая на амплитуду падающей плоской волны условие

$$B'_0 = 1, \tag{12}$$

получим еще одно уравнение, которое вместе с системой уравнений (9) дает возможность определить все неизвестные коэффициенты A и A_n однозначно.

В случае полубесконечной периодической структуры волны, распространяющиеся в структуре в отрицательном направлении оси z, отсутствуют, поэтому $A_n = 0$, и для зеркальной компоненты коэффициента отражения R (по мощности) получаем

$$R = |B_0|^2 = \left| \frac{\left(1 - \frac{p_0}{q_0}\right)}{\left(1 + \frac{p_0}{q_0}\right)} \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\left(1 - \frac{p_0}{q_n}\right)\left(1 + \frac{p_0}{p_n}\right)}{\left(1 + \frac{p_0}{q_n}\right)\left(1 - \frac{p_0}{p_n}\right)} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{p_0}{v_m}\right)\left(1 + \frac{p_0}{w_m}\right)}{\left(1 + \frac{p_0}{v_m}\right)\left(1 - \frac{p_0}{w_m}\right)} \right|^2 .$$

Если период структуры b сравним с длиной волны или меньше её, то ряд (9) сходится настолько быстро, что при вычислении коэффициента отражения от структуры, помещенной на металлическую подложку, можно ограничиться с достаточной для практики точностью членами с A и A_0. Из (9), (11) и (12) получаем

$$R_{\bullet} = |B_0|^2 = D_0 \frac{|r_0|^2 - 2|\Gamma_0||r_0| e^{-2\operatorname{Im} q_0 l}\cos(2\operatorname{Re} q_0 l + \vartheta_0 - \delta_0) + |\Gamma_0|^2 e^{-4\operatorname{Im} q_0 l}}{1 - 2|\Gamma_0||r_0| e^{-2\operatorname{Im} q_0 l}\cos(2\operatorname{Re} q_0 l + \vartheta_0 + \delta_0) + |\Gamma_0|^2 |r_0|^2 e^{-4\operatorname{Im} q_0 l}}, \tag{13}$$

где $\quad r_0 = |r_0| e^{i\delta_0} = \frac{k_0\cos\theta_0 - q_0}{k_0\cos\theta_0 + q_0}, \qquad \Gamma_0 = |\Gamma_0| e^{i\vartheta_0},$

$$D_0 = \left| \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\left(1 + \frac{p_0}{p_n}\right)\left(1 - \frac{p_0}{q_n}\right)}{\left(1 - \frac{p_0}{p_n}\right)\left(1 + \frac{p_0}{q_n}\right)} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{p_0}{v_m}\right)\left(1 + \frac{p_0}{w_m}\right)}{\left(1 + \frac{p_0}{v_m}\right)\left(1 - \frac{p_0}{w_m}\right)} \right|^2 .$$

Выражение (13) по своей структуре совпадает с выражением для коэффициента отражения от слоя однородного диэлектрика на металлической плоскости, но отличается от него коэффициентами Γ_0 и D_0, наличие которых свидетельствует об искажении плоской волны у поверхности структуры. Совершенно аналогично можно найти и „коэффициенты отражения" $R_\nu = |B_\nu|^2$ в направлении дифракционных максимумов.

В качестве примера на рис. 3 приведена кривая зависимости коэффициента отражения R_0 от λ_0/b, рассчитанная по формуле (13) для случая нормального падения $|\theta_0 = 0|$ при следующих значениях параметров структуры: $\frac{l}{b} = 1{,}14$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\rho = 240$ *ом*. Расчет показал, что при вычислении Γ_0 и D_0 в бесконечных произведениях можно ограничиться лишь первыми двумя сомножителями, так как модули последующих сомножителей мало отличаются от единицы, а их аргументы близки к нулю.

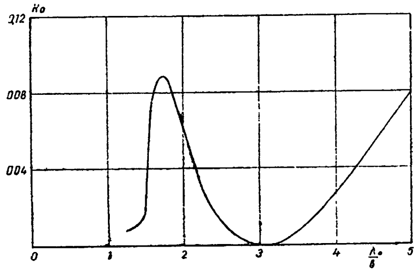

Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения от длины волны λ_0 при $\frac{l}{b} = 1{,}14$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\rho = 240$ *ом*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, изд. Сов. радио, М., 1953.
2. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1956, **26**, 385.
3. В. В. Колпаков, Распространение электромагнитных волн в периодической структуре из проводящих пластин (настоящий сборник).
4. В. А. Фок, Матем. сборник, 1944, **14**, 1, 3.

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
25 ноября 1957 г.