

## ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ И ЕСТЕСТВЕННАЯ ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КОЛЕБАНИЯ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. Н. Малахов

Теоретически исследуются флюктуации амплитуды и частоты, а также ширина спектральной линии колебания для автоколебательных систем, описываемых одним дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка. Приведены расчетные данные ширины линии для  $LC$  и  $RC$ -генераторов.

Задача о поведении автоколебательной системы при наличии случайных воздействий и связанный с ней вопрос о немонохроматичности (ширине) спектральной линии реального генератора рассматривались теоретически и экспериментально в ряде работ (см., например, [1<sup>—9</sup>]). Эти работы показывают, что тепловые и дробовые шумы, с одной стороны, и фликкер-шум, например, с другой стороны, приводят к существованию так называемой „естественной“ и соответственно „технической“ [10, 11] ширины спектральной линии колебания.

В большинстве работ рассматривалась автоколебательная система с одной степенью свободы и лишь в некоторых (см., например, [6]) — с двумя степенями свободы.

Настоящая статья посвящена исследованию ширины спектральной линии колебания для некоторых автоколебательных автономных систем с произвольным числом степеней свободы, дающих колебания, близкие к гармоническим.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЯ

Пусть имеем автономную автоколебательную систему, дающую колебания, близкие к синусоидальным, и описываемую дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right), \quad (1)$$

где  $l = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \leq n$  ( $a_n \neq 0$ ). Функция, стоящая в правой части (1), содержит все нелинейные комбинации аргументов, входящие по условию с малым параметром, и те  $x$  и  $\frac{d^l x}{dt^l}$ , которые также имеют множителем малый параметр\*.

Приближенное стационарное решение уравнения (1) ищем в виде

$$x = R \cos \omega t. \quad (2)$$

Пусть  $F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right)$  при подстановке (2) дает следующее Фурье разложение

---

\* То есть  $F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right) = \mu F_1\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right)$ . Однако в дальнейшем малый параметр  $\mu$  явно вводить не будем.

$$F(R \cos \omega t, -\omega R \sin \omega t, \dots) = \Psi(\omega, R) \cos \omega t + \Phi(\omega, R) \sin \omega t + \text{высшие гармоники.} \quad (3)$$

В этом случае, как нетрудно видеть, стационарные значения амплитуды  $R_0$  и частоты  $\omega_0$  автоколебания (2) являются корнями уравнений

$$R(a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - a_6 \omega^6 + \dots) = \Psi(\omega, R), \quad (4)$$

$$R(-a_1 \omega + a_3 \omega^3 - a_5 \omega^5 + \dots) = \Phi(\omega, R). \quad (5)$$

Тем самым, уравнение (1) имеет приближенное решение (рассматриваем только устойчивые решения)

$$x_0 = R_0 \cos \omega_0 t. \quad (6)$$

Пусть теперь система (1) начала подвергаться случайным воздействиям, которые можно считать малыми возмущениями. Тогда вместо (1) будем иметь

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right) + E(t), \quad (7)$$

где случайная функция  $E(t)$  представляет упомянутые малые случайные возмущения. Приближенное решение уравнения (7) ищем в виде:

$$x = (R_0 + \rho) \cos \vartheta = (R_0 + \rho) \cos(\omega_0 t + \int \nu dt), \quad (8)$$

где  $\rho = \rho(t)$  и  $\int \nu dt$  — медленные функции времени, порождаемые  $E(t)$ , и где  $|\rho| \ll R_0$  и  $|\nu| \ll \omega_0$ .

Для получения уравнений для  $\rho(t)$  и  $\nu(t)$  вычислим прежде производные, входящие в левую ( $d^k x/dt^k$ ) и правую ( $d^l x/dt^l$ ) части уравнения (7).

Из (8), сохраняя лишь первые производные по  $t$  от  $\rho(t)$  и  $\int \nu dt$ , получаем

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \left[ (R_0 + \rho) \omega_0^k \cos \vartheta + \nu R_0 k \omega_0^{k-1} \cos \vartheta + \frac{d\rho}{dt} k \omega_0^{k-1} \sin \vartheta \right] & \text{четное} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[ -(R_0 + \rho) \omega_0^k \sin \vartheta - \nu R_0 k \omega_0^{k-1} \sin \vartheta + \frac{d\rho}{dt} k \omega_0^{k-1} \cos \vartheta \right] & \text{нечетное} \end{cases} \quad (9)$$

Поскольку функция  $F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right)$ , входящая в правую часть уравнения (7), мала, то при подстановке в неё производных в последних следует положить (пренебрежение высшим порядком малости)  $\frac{d}{dt} \int \nu dt \equiv 0$  и  $\frac{d}{dt} \rho(t) \equiv 0$ .

Таким образом

$$\frac{d^l x}{dt^l} = \begin{cases} (-1)^{\frac{l}{2}} (R_0 + \rho) \omega_0^l \cos \vartheta \\ -(-1)^{\frac{l-1}{2}} (R_0 + \rho) \omega_0^l \sin \vartheta \end{cases} \quad (10)$$

Отсюда

$$F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right) = \Psi(\omega_0, R_0 + \rho) \cos \vartheta + \Phi(\omega_0, R_0 + \rho) \sin \vartheta + \text{высшие гармоники}$$

или

$$F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right) = \Psi(\omega_0, R_0) \cos \vartheta + \Phi(\omega_0, R_0) \sin \vartheta + \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)_{R_0} \cos \vartheta + \rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R_0} \sin \vartheta + \text{высшие гармоники.} \quad (11)$$

Случайное возмущение  $E(t)$  представляем в форме

$$E(t) = E_{\parallel}(t) \cos \vartheta - E_{\perp}(t) \sin \vartheta, \quad (12)$$

для чего достаточно, например, положить

$$E_{\parallel}(t) = E(t) \cos \vartheta, \quad E_{\perp}(t) = -E(t) \sin \vartheta. \quad (13)$$

Подставляя теперь (9), (10), (11) и (12) в (7), учитывая (4) и (5) и приравнявая коэффициенты при  $\cos \vartheta$  и  $\sin \vartheta$ , получаем уравнения для  $\nu(t)$  и  $\rho(t)$ :

$$-a_{\parallel} R_0 \nu + a_{\perp} \frac{d\rho}{dt} + b_{\parallel} \rho = E_{\parallel}(t), \quad (14)$$

$$-a_{\perp} R_0 \nu - a_{\parallel} \frac{d\rho}{dt} + b_{\perp} \rho = -E_{\perp}(t), \quad (15)$$

где

$$a_{\parallel} = 2a_2 \omega_0 - 4a_4 \omega_0^3 + 6a_6 \omega_0^5 - 8a_8 \omega_0^7 + \dots, \quad (16)$$

$$a_{\perp} = a_1 - 3a_3 \omega_0^2 + 5a_5 \omega_0^4 - 7a_7 \omega_0^6 + \dots, \quad (17)$$

$$b_{\parallel} = \left[ \frac{\Psi}{R} - \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right]_{\omega_0, R_0} = -R_0 \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\Psi}{R} \right) \right]_{\omega_0, R_0}, \quad (18)$$

$$b_{\perp} = \left[ \frac{\Phi}{R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right]_{\omega_0, R_0} = -R_0 \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\Phi}{R} \right) \right]_{\omega_0, R_0}. \quad (19)$$

Разрешая уравнения (14) и (15) относительно  $\nu(t)$  и  $\rho(t)$ , вводя  $\alpha(t) \equiv \rho(t)/R_0$ , получим искомые дифференциальные уравнения для флюктуаций амплитуды и частоты автоколебания:

$$\frac{d\nu}{dt} + p\nu = -\frac{a_{\parallel}}{\delta R_0} \frac{dE_{\parallel}}{dt} + \frac{a_{\perp}}{\delta R_0} \frac{dE_{\perp}}{dt} + \frac{b_{\perp}}{\delta R_0} E_{\parallel} - \frac{b_{\parallel}}{\delta R_0} E_{\perp}, \quad (20)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} + p\alpha = \frac{a_{\parallel}}{\delta R_0} E_{\perp} + \frac{a_{\perp}}{\delta R_0} E_{\parallel}, \quad (21)$$

где  $p = \gamma/\delta$ ,  $\gamma = b_{\parallel} a_{\perp} - a_{\parallel} b_{\perp}$ ,  $\delta = a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2$ . (22)

## 2. ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ АВТОКОЛЕБАНИЯ

Обсудим прежде полученные результаты. Пусть  $E(t) \equiv 0$ , тогда из (20) и (21) в общем случае следует,

$$\frac{d\nu}{dt} + p\nu = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} + p\alpha = 0,$$

т. е.  $\nu = \nu_0 e^{-pt}$ ,  $\alpha = \alpha_0 e^{-pt}$ . Это говорит о том, что если  $p > 0$  ( $\gamma > 0$ ), то случайные небольшие отклонения частоты и амплитуды колебания от  $\omega_0$  и  $R_0$  затухают, т. е. фазовые траектории наматываются на предельный цикл, который тем самым является устойчивым предельным циклом. Таким образом, для устойчивых автоколебаний (6) величина  $p > 0$  и характеризует собой „прочность“ предельного цикла.

Рассмотрим теперь частный случай  $a_{\perp} = 0$ ,  $b_{\parallel} = 0$ . Первое условие выполняется, если в левую часть (1) входят только четные производные. Для автоколебательной системы с одной степенью свободы это имеет место всегда, так как диссипативный член  $a_1 \frac{dx}{dt}$  обычно является малым и, следовательно, находится в правой части. Второе условие может иметь место либо при  $\Psi(\omega, R) \equiv 0$ , что означает отсутствие в первом порядке поправки к частоте, либо при  $\Psi(\omega, R) \equiv R\psi(\omega)$ . В обоих случаях, как нетрудно видеть из (4),

частота автоколебания  $\omega_0$  не зависит (в первом приближении) от его амплитуды  $R_0$ . Тем самым условию  $b_{\perp} = 0$  соответствует изохронность системы\*.

Из (14) и (15) при  $a_{\perp} = b_{\perp} = 0$  следует для  $\nu$  и  $\alpha$ ,

$$\nu = -\frac{1}{a_{\perp} R_0} E_{\perp}(t), \quad \frac{d\alpha}{dt} + p\alpha = \frac{1}{a_{\perp} R_0} E_{\perp}(t). \quad (23)$$

Отсюда видно, что флюктуации частоты порождаются  $E_{\perp}(t)$ , а  $E_{\perp}(t)$  ведет только к амплитудным флюктуациям. Из (23) при  $E_{\perp} = E_{\perp} \equiv 0$  следует, что  $\nu = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0 e^{-pt}$ ; т. е. отклонения амплитуды исчезают  $\sim e^{-pt}$ , а отклонения частоты исчезают мгновенно\*\*.

Нетрудно получить из (20) и (21), что при  $a_{\perp} = 0$ ,  $b_{\perp} \neq 0$  флюктуации амплитуды по-прежнему определяются только  $E_{\perp}(t)$ , а флюктуации частоты зависят от  $E_{\perp}(t)$  и от  $E_{\parallel}(t)$ . Другими словами, случаю  $b_{\perp} \neq 0$  соответствует влияние амплитудных флюктуаций на флюктуации частоты (ср. [6]).

В общем случае, когда  $b_{\perp} \neq 0$  и  $a_{\perp} \neq 0$ , т. е. когда  $R_0$  и  $\omega_0$  взаимосвязаны, флюктуации амплитуды и частоты зависят как от  $E_{\parallel}$ , так и от  $E_{\perp}$ .

Для отыскания ширины спектральной линии автоколебания найдем прежде спектральные плотности флюктуаций частоты и амплитуды колебания. Рассмотрим представление (12) случайной функции  $E(t)$  через случайные функции  $E_{\parallel}(t)$  и  $E_{\perp}(t)$ . Можно показать, на основании (13), во-первых, что  $E_{\parallel}(t)$ ,  $E_{\perp}(t)$ ,  $dE_{\parallel}/dt$  и  $dE_{\perp}/dt$  попарно не коррелированы (при одних и тех же значениях аргумента) и, во-вторых, что спектральные плотности мощности функций  $E_{\parallel}(t)$  и  $E_{\perp}(t)$  одинаковы и равны\*\*\*. (для  $f < f_0 = \omega_0/2\pi$ )

$$\frac{1}{4} W_E(f_0 - f) + \frac{1}{4} W_E(f_0 + f),$$

где  $W_E(f)$  — спектральная плотность мощности функции  $E(t)$ .

Принимая это во внимание, из (20) и (21) нетрудно получить следующие выражения для спектральных плотностей мощности флюктуаций частоты  $W_{\nu}(f)$  и амплитуды  $W_{\alpha}(f)$  автоколебания:

$$W_{\nu}(f) = \frac{1}{4R_0^2} \frac{\delta^2 4\pi^2 f^2 + b_{\parallel}^2 + b_{\perp}^2}{\delta^2 4\pi^2 f^2 + \gamma^2} \left[ W_E(f_0 - f) + W_E(f_0 + f) \right], \quad (24)$$

$$W_{\alpha}(f) = \frac{1}{4R_0^2 \delta} \frac{1}{4\pi^2 f^2 + p^2} \left[ W_E(f_0 - f) + W_E(f_0 + f) \right].$$

При какой  $E(t)$  возникает немонахроматичность автоколебаний и, следовательно, отличная от нуля ширина спектральной линии? Как известно [12], для существования ненулевой ширины линии необходимо\*\*\*\*, чтобы  $W_{\nu}(0) > 0$ . Используя (24), получаем условие

$$W_E(f_0) > 0.$$

Итак, мы получаем вполне очевидный результат: для немонахроматичности автоколебания необходимо, чтобы в спектре случайного воздействия  $E(t)$  содержалась частота автоколебаний  $\omega_0$ .

\* Нетрудно видеть из (19) и (5), что случаю  $b_{\perp} = 0$  также соответствует независимость частоты автоколебания  $\omega_0$  от амплитуды  $R_0$ .

\*\* На эту характерную особенность изохронного генератора обратил наше внимание Берштейн.

\*\*\* Для достаточно малого случайного воздействия  $E(t)$ .

\*\*\*\* Предполагается, что для  $W_{\nu}(f)$  вблизи  $f = 0$  имеет место разложение  $W_{\nu}(f) = W_{\nu}(0) + Af^2 + \dots$

Известно далее [13], что если выполняется условие \*

$$W_v^2(0) \ll 16 \int_0^{\infty} W_v(f) df, \quad (25)$$

то энергетическая ширина спектральной линии автоколебания равна

$$\Delta f = \frac{1}{8} W_v(0).$$

Рассмотрим частный случай  $E(t)$ . Пусть уравнение (7) описывает ламповый генератор, куда входят активные сопротивления, дающие тепловой шум, и лампы, дающие дробовой шум. В этом случае оба этих шума образуют (непосредственно и через производные) величину  $E(t)$ . Так как тепловые и дробовые шумы обладают независимым (или для больших частот слабозависимым) от частоты спектром, то можно показать, что условие (25) имеет место и, следовательно, ширина линии генератора, связанная с тепловыми и дробовыми шумами, т. е. так называемая „естественная“ ширина линии, равна

$$\Delta f = \frac{1}{16 R_0^2} \frac{b_{\parallel}^2 + b_{\perp}^2}{\gamma^2} W_E(f_0), \quad (26)$$

где  $f_0 = \omega_0/2\pi$ , а  $R_0$ ,  $b_{\parallel}$ ,  $b_{\perp}$ ,  $\gamma$  даются соответственно формулами (4), (5), (18), (19), (22).

Для случая  $b_{\parallel} = 0$  ширина линии (26) принимает вид

$$\Delta f = \frac{1}{16 R_0^2 a^2} W_E(f_0), \quad (27)$$

говорящий о том, что для изохронного генератора ширина спектральной линии определяется, во-первых, амплитудой автоколебаний, во-вторых, частотой (через коэффициенты  $a_k$  при четных производных) и, в-третьих, величиной спектральной плотности случайного воздействия на частоте автоколебания. Характеристики нелинейности изохронного генератора, таким образом, на ширину линии автоколебания непосредственно не влияют.

Из (26) следует, что для решения вопроса об удельном вкладе, даваемым тепловыми и дробовыми шумами в ширину линии, достаточно рассмотреть лишь удельный вклад этих шумов в величину спектральной плотности  $W_E(f_0)$ .

### 3. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим ряд ламповых генераторов и найдем для них ширину спектральной линии автоколебания. Пусть характеристики ламп для простоты такие, что все генераторы (в первом приближении) являются изохронными (пусть для всех рассматриваемых ниже генераторов  $\Psi(\omega, R) \equiv 0$ ).

Для простейшего LC-генератора с контуром в цепи анода (рис. 1) имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) + E(t), \quad (28)$$

где  $x$  — напряжение на сетке лампы,  $\omega^2 = 1/LC$ ,  $F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right)$  — функция, аналогичная таковой в (7);

$$E(t) = \omega^2 M \left[ \frac{dI_{др}(t)}{dt} + C \frac{d^2E_r(t)}{dt^2} \right], \quad (29)$$

\* В нашем случае верхний предел интеграла в (25) достаточно положить равным  $f_0$ .

где  $I_{др}(t)$  — дробовой шум лампы,  $E_r(t)$  — тепловой шум сопротивления контура  $r$ .

Сравнивая (28) с (7) и принимая во внимание (4), (16), нетрудно видеть, что  $\omega_0 = \omega$ ,  $a_1 = 2\omega_0$ . Спектральная плотность дробового шума равна  $2eI_0$ , где  $e$  — заряд электрона,  $I_0$  — постоянный ток,

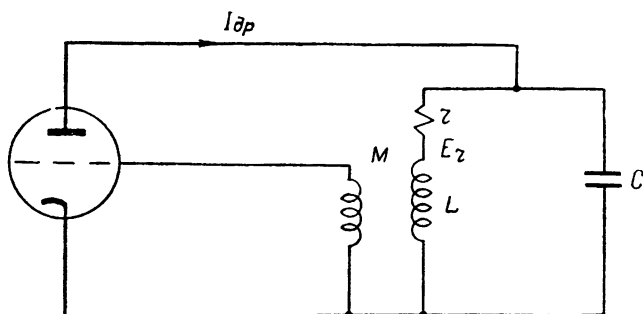


Рис. 1.

текущий через лампу. Спектральная плотность теплового шума равна  $4kTr$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура сопротивления  $r$ . Учитывая, что спектральная плотность производной от случайной функции равна спектральной плотности самой функции, помноженной на  $\omega^2$ , из (29) нетрудно получить:

$$W_E(f) = \omega^4 M^2 [\omega^2 2eI_0 + \omega^4 C^2 4kTr].$$

Согласно (27) ширина линии равна

$$\Delta f = \frac{\omega_0^2}{32R_0^2} M^2 \omega_0^2 [eI_0 + \omega_0^2 C^2 2kTr].$$

Примем во внимание, что по порядку величины

$$|M| \approx rC/S, \quad (30)$$

где  $S$  — крутизна лампы, а также, что  $\frac{L}{rC} = R_{oe}$  резонансному сопротивлению контура. Тогда получим

$$\Delta f = \frac{\omega_0^2}{32R_0^2} \left[ \frac{2kTr}{(R_{oe}S)^2} + \frac{eI_0 r R_{oe}}{(R_{oe}S)^2} \right]. \quad (31)$$

Оценим удельную роль дробового и теплового шума. Имеем, например, для  $I_0 = 10 \text{ ма}$ ,  $T = 300^\circ\text{К}$

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{eI_0}{2kT} R_{oe} = \frac{1}{5} R_{oe},$$

где  $R_{oe}$  выражено в омах.

Ясно (как и было ранее получено [4,6]), что уже для колебательного контура с  $R_{oe} \geq 50 \text{ ом}$  влиянием его тепловых шумов можно пренебречь по сравнению с дробовыми шумами лампы.

Оценим величину  $\Delta f$ . Пусть, например,  $R_0 = 1 \text{ в}$ ,  $f_0 = 10^5 \text{ гц}$ ,  $S = 3 \text{ ма/в}$ ,  $R_{oe} = 10^4 \text{ ом}$ ,  $r = 1 \text{ ом}$ ,  $I = 10 \text{ ма}$ ,  $T = 300^\circ\text{К}$ . В этом случае

$$\Delta f \approx 2,0 \cdot 10^{-10} \text{ гц}.$$

2. Для LC-генератора с контуром в цепи сетки (рис. 2) по-прежнему сохраняется уравнение (28), где, однако, вместо (29) будем иметь

$$E(t) = \omega^2 E_r(t) + \omega^2 M \frac{dI_{др}(t)}{dt},$$

что приводит к

$$W_E(f) = \omega^4 [4kTr + \omega^2 M^2 2eI_0].$$

На основании (27), принимая во внимание (30), получим

$$\Delta f = \frac{\omega_0^2}{32R_0^2} \left[ 2kTr + eI_0 \frac{rR_{oe}}{(R_{oe}S)^2} \right]. \quad (32)$$

Отсюда имеем ( $I_0 = 10$  ма,  $T = 300^\circ\text{K}$ )

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} \frac{eI_0}{2kT} \frac{R_{oe}}{(R_{oe}S)^2} = \frac{1}{S} \frac{R_{oe}}{(SR_{oe})^2}.$$

Если по-прежнему  $S = 3$  ма/в, то нужен контур с  $R_{oe} \geq 2 \cdot 10^5$  ом, чтобы дробовыми шумами можно было пренебречь по сравнению с тепловыми. Это может иметь место для кварцевого контура [7]. Для контура с  $R_{oe} \leq 2 \cdot 10^3$  ом необходимо пренебречь тепловыми шумами по сравнению с дробовыми. При  $10^4 \leq R_{oe} \leq 10^5$  необходимо учитывать (при выбранных выше  $I_0, S, T$ ) как дробовые, так и тепловые шумы.

Оценим величину  $\Delta f$ . Пусть  $R_0, f_0, S, R_{oe}, r, I_0$  и  $T$  имеют те же значения, что и в предыдущем примере. Тогда из (32) следует

$$\Delta f \approx (1,0 + 2,0) \cdot 10^{-10} \text{ гц.}$$

Здесь первое слагаемое обусловлено тепловыми, а второе дробовыми шумами.

Нетрудно заметить из (31) и (32), что для обеих схем LC-генераторов (рис. 1 и рис. 2) значение  $\Delta f$ , связанное с дробовыми шумами, одно и то же, в то время, как влияние тепловых шумов различно.

Если  $(R_{oe}S) > 1$ , что обычно имеет место, то при прочих равных условиях ширина спектральной линии колебания для LC-генератора с контуром в сеточной цепи больше таковой для схемы с контуром в анодной цепи\*.

3. Перейдем теперь к схемам генераторов, флюктуации в которых еще не исследовались. Рассмотрим схему трехзвенного RC-генератора (рис. 3), для которого можно получить

$$(1 + k_0) \tau^3 \frac{d^3x}{dt^3} + 6\tau^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 5\tau \frac{dx}{dt} + x = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}\right) + E(t), \quad (33)$$

где  $x$  — напряжение на сетке лампы,  $\tau = rC$ ,  $k_0 = r_0S$  — усиление каскада;

$$E(t) = E_3 + \tau \frac{d}{dt} [4E_3 + E_2] + \tau^2 \frac{d^2}{dt^2} [3E_3 + 2E_2 + E_1] + \tau^3 \frac{d^3}{dt^3} [E_0 + r_0I_{xp}], \quad (34)$$

где  $E_0(t)$  — тепловой шум нагрузочного сопротивления  $r_0$  ( $r_0 \ll r$ ),  $E_1(t), E_2(t), E_3(t)$  — тепловые шумы сопротивлений цепочки.

\* В работе [14] содержится противоположный вывод, ошибочность которого, как мне сообщил Берштейн, была еще ранее подмечена Гореликом.

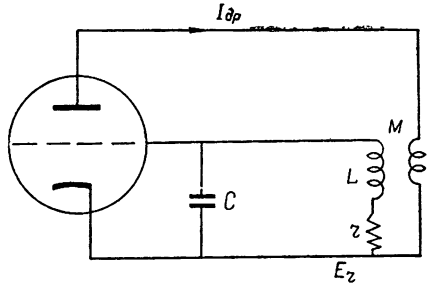


Рис. 2.

Сравнивая (33) с (7), учитывая (4) и (16), получаем

$$\omega_0 = 1/\sqrt{6}\tau, \quad a_1 = 12\tau^2\omega_0 = 2/\omega_0.$$

Полагая, что все сопротивления  $r$  имеют одинаковую величину и температуру, из (34) находим

$$\begin{aligned} W_E(t) &= (1 + 17\tau^2\omega^2 + 14\tau^4\omega^4 + \tau^6\omega^6) 4kTr + r_0^2\tau^6\omega^6 2eI_0 = \\ &= 4,23 \cdot 4kTr + r_0^2 2eI_0/216. \end{aligned}$$

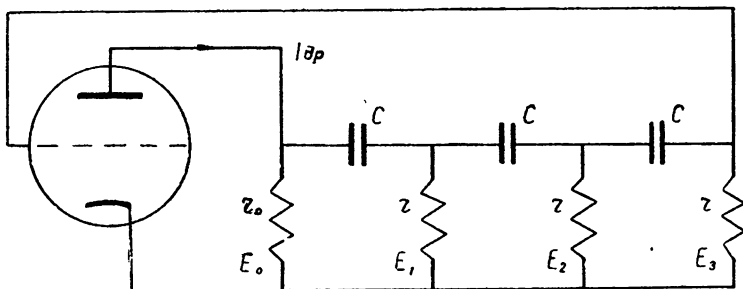


Рис. 3.

Наконец, согласно (27), находим естественную ширину линии  $RC$ -генератора:

$$\Delta f = \frac{\omega_0^2}{32R_0^2} \left[ 4,23 \cdot 2kTr + \frac{r_0^2}{216} eI_0 \right]. \quad (35)$$

Пусть  $I_0 = 10 \text{ ма}$ ,  $T = 300^\circ\text{К}$ , тогда

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{eI_0}{2kT} \frac{r_0^2}{4,23 \cdot 216 \cdot r} \approx \frac{1}{4600} \frac{r_0}{r} r_0.$$

Если, например,  $r/r_0 = 10$ , то ( $r_0$  выражаем в  $\text{ком}$ )

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{r_0}{46}.$$

Таким образом, в случае  $RC$ -генератора естественная ширина линии в зависимости от  $r_0$ ,  $I_0$ ,  $r$  может определяться или тепловыми (малое  $r_0$ ), или дробовыми (большое  $r_0$ ) шумами, или теми и другими.

Оценим ширину спектральной линии. Пусть  $I_0$ ,  $T$ ,  $R_0$  и  $f_0$  имеют прежние значения;  $r_0 = 1 \text{ ком}$ ,  $r = 10 \text{ ком}$ .

Тогда, согласно (35), ширина спектральной линии  $RC$ -генератора равна

$$\Delta f \approx 0,4 \cdot 10^{-5} \text{ гц}$$

и обусловлена преимущественно тепловыми шумами.

Большее значение  $\Delta f$  для  $RC$ -генератора, по сравнению с  $LC$ -генераторами, может быть легко объяснено, согласно (35) и, например, (32), тем, что в  $RC$ -генераторах тепловые ЭДС на много порядков больше, чем в  $LC$ -генераторах, ибо величина сопротивлений цепочки (рис. 3) много больше величины активного сопротивления  $LC$ -контура (рис. 1).

4. Рассмотрим двухламповую схему  $RC$ -генератора (рис. 4). Обозначая  $x$  — напряжение на сетке первой лампы, можно получить

$$\tau^2 \frac{d^2x}{dt^2} + x = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) + E(t),$$



где  $\tau = rC$  ( $r_2 \ll r$ );

$$E(t) = E_2 + \tau \frac{d}{dt} [E_1 + E_2 + KE_3 + E_4 + Kr_1 I_{др,1} + r_2 I_{др,2}], \quad (36)$$

где  $K$  — усиление второго каскада,  $E_k$  — тепловые шумы сопротивлений (см. рис. 4). Нетрудно видеть, что  $\omega_0 = 1/\tau$ ,  $a_{||} = 2/\omega_0$ . Из (36) получаем, считая, что все сопротивления имеют одинаковую температуру,

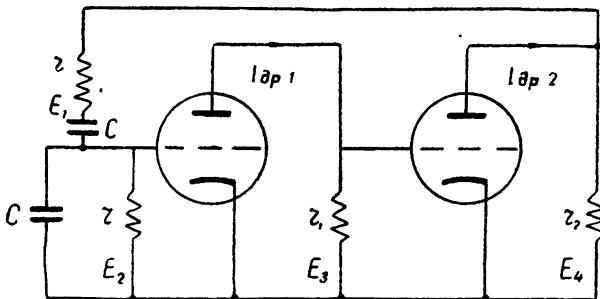


Рис. 4.

$$W_E(f) = (6r + 2K^2 r_1 + 2r_2) 2kT + (K^2 r_1^2 I_2 + r_2^2 I_1) 2e,$$

где  $I_1, I_2$  — постоянные составляющие токов ламп. Положив для простоты  $K=1$ ,  $r_1 = r_2 = r_0$ ,  $I_1 = I_2 = I_0$ , получим

$$W_E(f) = (3r + 2r_0) 4kT + 4r_0^2 e I_0.$$

Тогда, согласно (27), естественная ширина линии двухлампового RC-генератора равна

$$\Delta f = \frac{\omega_0^2}{32R_0^2} [(3r + 2r_0) 2kT + 2r_0^2 e I_0]. \quad (37)$$

Отсюда имеем ( $I_0 = 10$  ма,  $T = 300^\circ\text{K}$ )

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{теп.}} = \frac{eI_0}{2kT} \frac{2r_0^2}{3r + 2r_0} = \frac{1}{5} \frac{2}{3 \frac{r}{r_0} + 2} r_0.$$

Легко видеть, и это ясно из схемы RC-генератора, что при малых  $r_0$  основную роль будут играть тепловые шумы (при малом  $r_0$  от дробовых шумов в схему вводится малая величина шумового напряжения по сравнению с тепловыми шумами). При больших  $r_0$  основную роль играют дробовые шумы.

Пусть, например,  $r = 10r_0$ , тогда уже при  $r_0 \geq 10$  ом существенны дробовые шумы и лишь при  $r_0 \leq 10$  ом существенны тепловые шумы.

Оценим величину ширины спектральной линии. Пусть  $I_0, T, R_0, f_0, r_0, r$  сохраняют значения предыдущего примера. Тогда, на основании (37), ширина спектральной линии равна

$$\Delta f \approx 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ гц}$$

и обусловлена в отличие от предыдущего случая преимущественно дробовыми шумами.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. С. Троицкому за подробное обсуждение данной работы и И. Л. Берштейну за ценные замечания при чтении рукописи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, Л. С. Понтрягин, ЖЭТФ, 1933, **3**, **3**, 165.
2. А. А. Андронов, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ОНТИ, 1937.
3. И. Л. Берштейн, ДАН СССР, 1938, **20**, **1**, 11; ЖТФ, 1941, **11**, **4**, 305.
4. И. Л. Берштейн, ДАН СССР, 1949, **68**, **3**, 469; Изв. АН СССР, сер. физ., 1950, **14**, **2**, 145.
5. В. С. Троицкий, В. В. Хрулев, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, **6**, 831.
6. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 1955, **29**, **3**, 304 и 315.
7. A. Blaquiègre, Ann. de radioélectricité, 1953, **8**, **31**, 36 и **32**, 153.
8. Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, **9**, 1240.
9. В. С. Троицкий, Изв. ВУЗ, Радиофизика, 1958, **1**.
10. Г. С. Горелик, ЖЭТФ, 1950, **20**, 351.
11. Г. С. Горелик, Изв. АН СССР, сер. физ., 1950, **14**, 187.
12. D. Middleton, Phil. Mag., 1951, **42**, **330**, 689.
13. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, **10**, 1295.
14. A. Blaquiègre, C. R., 1953, **237**, **21**, 1316.

Исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
22 ноября 1957 г.