

Это препятствует получению чистого эллипса на экране измерительного блока. Нами применено стробирование путем модуляции яркости индикаторной трубки короткими импульсами с частотой 50 гц. Это дает возможность наблюдения эллипса, несмотря на наличие указанной модуляции.

С помощью описываемой установки проведены измерения мегагерцевых генераторов, собранных по осцилляторной схеме и по мостовой схеме с регулированием амплитуды в общем тракте [5].

Процесс настройки с помощью телефонных трубок и наблюдения фигуры на экране осциллографа очень прост и занимает несколько секунд. Однако фактическое установление частоты требует большего времени, определяемого в основном свойствами кварцевого резонатора и связью между частотой и амплитудой генерируемых колебаний.

Аналогичная схема может быть применена для построения эталона частоты (времени) на основе молекулярного генератора.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Gordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes, Phys. Rev., 1955, 99, 1264; Н. Г. Басов, РЭ, 1956, 1, 752.
2. Отчет ИРЭ АН СССР № 120—01—56—II.
3. J. M. Shaul, Tele—Tech., 1955, 14, 86.
4. М. Е. Жаботинский, Е. И. Сверчков, ПТЭ, 1956, 3, 74.
5. М. Е. Жаботинский, Д. А. Лисичкин, ДАН СССР, 1954, 95, 1197.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
25 ноября 1957 г.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ГЭС С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНИТЕЛЬНЫМ РЕЗЕРВУАРОМ

Я. К. Любимцев

В [1] при помощи прямой методы Ляпунова найдены условия устойчивости стационарного режима ГЭС с дифференциальным уравнительным резервуаром. В предлагаемой заметке решение вопроса об устойчивости в малом стационарного режима сводится к исследованию невозмущенного движения в критическом случае двух нулевых корней. Полученные условия устойчивости стационарного режима ГЭС полностью совпадают с условиями, найденными в [1]. Доказывается также, что сама граница области устойчивости является „опасной“.

Пусть имеется система, состоящая из питающего резервуара, напорной штольни постоянного сечения, уравнительного резервуара дифференциального типа и питающего трубопровода, на выходе которого регулятором турбины поддерживается постоянство потребляемой мощности (см. рис. 1).

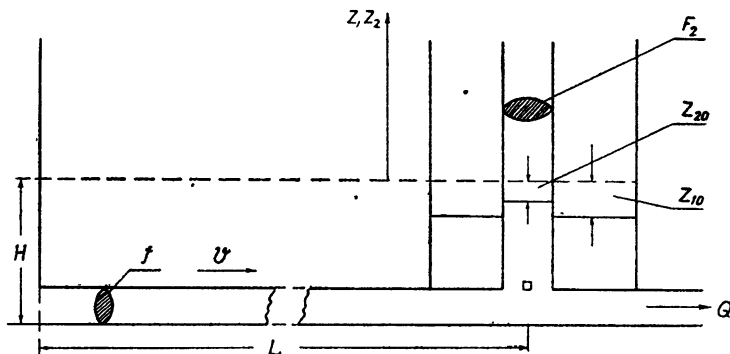


Рис. 1.

Система дифференциальных уравнений возмущенного движения при ограничениях, принятых в [1], записывается следующим образом:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\varepsilon(2\eta + \sigma + \varepsilon + \eta^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \eta + \frac{c(\sigma + \varepsilon)}{1 + c(\sigma + \varepsilon)} \mp k_1(\alpha + 1) \sqrt{|\sigma|}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \pm k_1 \sqrt{|\sigma|}. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) верхний знак берется при $\sigma > 0$, нижний знак соответственно при $\sigma < 0$. В системе (1) η , σ , ε — безразмерные отклонения возмущенного движения от стационарного режима, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$, c , k_1 , α — параметры системы. Водосливом через верх центрального стояка мы пренебрегаем ($k_2 = 0$), так как характер устойчивости стационарного режима при учете водослива не изменяется.

В системе (1) сделаем замену переменного σ , полагая $\sigma = \pm \sigma_1^2$ (знак + при $\sigma_1 > 0$, знак — при $\sigma_1 < 0$), и введем новое время согласно соотношению*

$$d\tau = \frac{1}{2} \frac{dt}{|\sigma_1|}. \quad (2)$$

Полагая $\varepsilon \equiv x$; $\eta \equiv y$; $\sigma_1 \equiv x_1$, перепишем систему (1) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \pm 2k_1 x_1^2, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -2\varepsilon |x_1| (2y + x + y^2 \pm x_1^2), \\ \frac{dx_1}{d\tau} &= -k_1(\alpha + 1)x_1 + cx + y \pm cx_1^2 - c^2x^2 \mp 2c^2xx_1^2 + c^2x^3 + \dots \end{aligned} \quad (1')$$

Верхний знак в (1') берем при $x_1 > 0$, нижний при $x_1 < 0$. Характеристическое уравнение системы (1') имеет два нулевых ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) и один отрицательный действительный корень [$\lambda_3 = -k_1(\alpha + 1)$]. Выясним характер невозмущенного движения для системы (1').

Следуя И. Г. Малкину [2], делаем замену

$$x_2 = \xi + u(x, y), \quad (3)$$

где $u(x, y)$ — целая рациональная функция относительно x и y , могущая принимать разные значения при $x_1 > 0$ и при $x_1 < 0$.

Полагая

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + \dots + u_n(x, y), \quad (4)$$

где $u_i(x, y)$ — формы $i^{\text{го}}$ порядка относительно x и y , подберем $u_i(x, y)$ так, чтобы в функции

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} 2k_1 [u(x, y)]^2 - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} 2\varepsilon u(x, y) \{2y + x + y^2 + \\ &+ [u(x, y)]^2\} + k_1(\alpha + 1)u(x, y) - cx - y + c[u(x, y)]^2 - c^2x^2 - \\ &- 2c^2x[u(x, y)]^2 + c^2x^3 + \dots \quad [\text{при } u(x, y) > 0] \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} 2k_1 [u(x, y)]^2 + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} 2\varepsilon u(x, y) \{2y + x + y^2 - \\ &- [u(x, y)]^2\} + k_1(\alpha + 1)u(x, y) - cx - y - c[u(x, y)]^2 - c^2x^2 + \\ &+ 2c^2x[u(x, y)]^2 + c^2x^3 + \dots \quad [\text{при } u(x, y) < 0] \end{aligned} \quad (5')$$

входили члены не ниже четвертого порядка относительно x и y .

В результате вычислений получим:

для случая $u(x, y) > 0$ (здесь $u = u_1' + u_2' + \dots$)

$$u_1'(x, y) = \frac{cx + y}{k_1(\alpha + 1)},$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{c[2\varepsilon(\alpha + 1) + c^2(\alpha - 1) - ck_1^2(\alpha + 1)^3]x^2 + 2[c^2(\alpha - 1) + \varepsilon(\alpha + 1)(1 + 2c)]xy}{k_1^3(\alpha + 1)^4} + \\ &+ \frac{[4\varepsilon(\alpha + 1) + c(\alpha - 1)]y^2}{k_1^3(\alpha + 1)^4} \quad \text{и т. д.,} \end{aligned} \quad (6)$$

* В выражении (2) $|\sigma_1(t)|$ может стремиться к нулю, однако, как нетрудно видеть из построения функций Ляпунова, это обстоятельство не влияет на результаты исследования. Так, например, если для системы уравнений (1) производная $\frac{dV}{dt}$ была знакопостоянной отрицательной функцией, то при переходе к новому времени знакопостоянность $\frac{dV}{d\tau} = \frac{dV}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dV}{dt} |\sigma_1|$ сохраняется.

для случая $u(x, y) < 0$ (здесь $u = u_1'' + u_2'' + \dots$)

$$u_1''(x, y) = \frac{cx + y}{k_1(\alpha + 1)} = u_1'(x, y),$$

$$u_2''(x, y) = - \frac{c [2\varepsilon(\alpha + 1) + c^2(\alpha - 1) + ck_1^2(\alpha + 1)^2]x^2 + 2[c^2(\alpha - 1) + \varepsilon(\alpha + 1)(1 + 2c)]xy}{k_1^3(\alpha + 1)^4} - \frac{[4\varepsilon(\alpha + 1) + c(\alpha - 1)]y^2}{k_1^3(\alpha + 1)} \quad (6')$$

и т. д.

После такого подбора функции $u(x, y)$, согласно теореме Малки на [2, стр. 373], которая легко переносится на наш случай, достаточно выяснить вопрос об устойчивости невозмущенного движения „укороченной“ системы:

$$\frac{dx}{d\tau} = \pm 2k_1 [u(x, y)]^2, \quad (7)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -2\varepsilon |u(x, y)| \{2y + x + y^2 \pm [u(x, y)]^2\}.$$

Верхний знак берется при $u(x, y) > 0$, нижний при $u(x, y) < 0$. Так как при $\xi = 0$ $u(x, y) = \alpha_1 \equiv x_1$, то для „укороченной“ системы (7) можно сделать обратный переход к старому времени. В результате система (7) запишется следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 u(x, y), \quad (7')$$

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon \{2y + x + y^2 \pm [u(x, y)]^2\}.$$

Или, подставляя значения для $u(x, y)$,

$$\frac{dx}{dt} = k_1 \left[\frac{cx + y}{k_1(\alpha + 1)} + u_2'(x, y) + u_3'(x, y) + \dots \right], \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon \left\{ x + 2y + y^2 + \left[\frac{cx + y}{k_1(\alpha + 1)} + u_2'(x, y) + u_3'(x, y) + \dots \right]^2 \right\} \quad \text{при } u(x, y) > 0$$

и

$$\frac{dx}{dt} = k_1 \left[\frac{cx + y}{k_1(\alpha + 1)} + u_2''(x, y) + u_3''(x, y) + \dots \right], \quad (8')$$

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon \left\{ x + 2y + y^2 - \left[\frac{cx + y}{k_1(\alpha + 1)} + u_2''(x, y) + u_3''(x, y) + \dots \right]^2 \right\} \quad \text{при } u(x, y) < 0.$$

Условия Рауга — Гурвица устойчивости невозмущенного движения для (8) и (8') имеют вид:

$$\varepsilon > \frac{c}{2(\alpha + 1)} \quad \text{и} \quad c < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Так как для реальных систем c всегда меньше $\frac{1}{2}$, то должно выполняться лишь

одно условие $\varepsilon > \frac{c}{2(\alpha + 1)}$ (условие Тома). При $\varepsilon < \frac{c}{2(\alpha + 1)}$ невозмущенное движение неустойчиво. Условия (9) полностью совпадают с результатами, полученными в [1].

Выясним характер границы области устойчивости. При $\varepsilon = \frac{c}{2(\alpha + 1)} = \varepsilon^* \left(c < \frac{1}{2} \right)$ характеристическое уравнение „укороченной“ системы (8) и (8') имеет чисто мнимые корни.

Исследование поведения системы вблизи границ области устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при наличии склейки в правых частях дифференциальных уравнений было проведено Г. В. Ароновичем [3, 4]. В указанных работах показано, что при склейке первая ляпуновская величина, определяющая характер границы, совпадает с коэффициентом четного номера (в данном случае с коэффициентом a_2).

После проведения выкладок, в соответствии с [4], для первой ляпуновской величины получается следующее выражение*:

$$g(\epsilon^*) = \frac{4\alpha c(1-2c)}{3k_1^2(\alpha+1)^3}. \quad (10)$$

При $c < \frac{1}{2}$ $g(\epsilon^*) > 0$ и, следовательно, граница области устойчивости будет всегда „опасной“.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. К. Любимцев, Известия АН СССР, 1957, ОТН, 1.
2. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, 1952.
3. Г. В. Ароневич, Устойчивость колебаний горизонта в уравнительном резервуаре с сопротивлением, Сборник памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, 1955.
4. Г. В. Ароневич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1958, 2.

Исследовательский
физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 декабря 1957 г.

О СРАВНЕНИИ ЧАСТОТ КВАРЦЕВОГО И МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРОВ

В. В. Никитин

В настоящей работе дано краткое описание аппаратуры для сравнения частот кварцевого генератора с частотой молекулярного генератора, которая была разработана для молекулярных часов, и приведены результаты исследования этой аппаратуры. Блок-схема сравнения приведена на рис. 1.

Частота кварцевого генератора была выбрана равной $f = 500$ кГц, исходя из следующих условий:

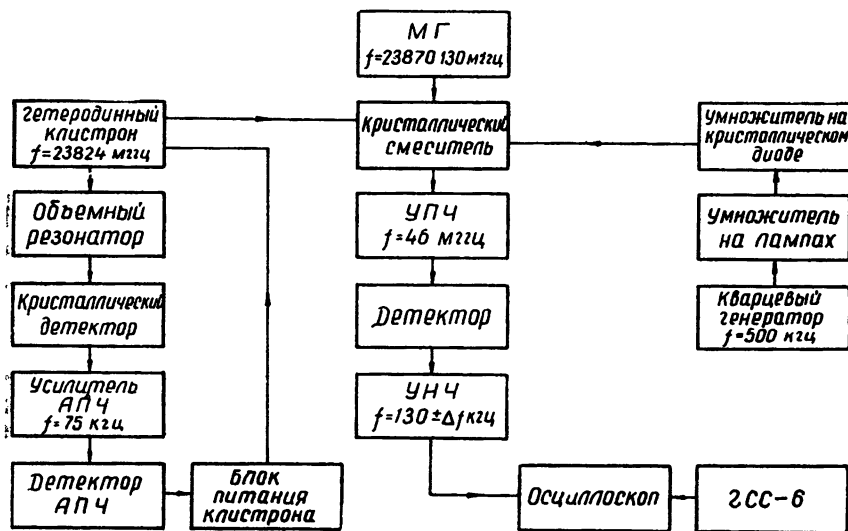


Рис. 1.

* При подсчетах α_2 принято, что с точностью до малых высшего порядка линия складки $u(x, y) = 0$ в окрестности начала координат совпадает с прямой $u_1(x, y) = \frac{cx + y}{k_1(\alpha + 1)} = 0$, т. е. с касательной к линии $u = 0$ в точке $x = 0, y = 0$.