

О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И СИНТЕЗЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ СХЕМ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

М. Я. Эйнгорин

Рассматривается система уравнений алгебры логики, доказываются теоремы, относящиеся к решениям и преобразованиям этих систем. Рассмотренные системы уравнений применяются для синтеза управляющих устройств с обратными связями, сходных с триггерами, имеющими большее число состояний равновесия, а также с мультивибраторами и кипереле, обладающими более сложной формой колебаний. Кратко рассмотрены вопросы запуска, приведен анализ количества оборудования, необходимого для синтеза подобных схем. Приводятся некоторые результаты эксперимента.

В дискретных управляющих устройствах широко используются различные схемы, имеющие как положительные, так и отрицательные обратные связи. К ним относятся триггеры, счетные кольца и другие системы, имеющие несколько стационарных состояний. Вместе с тем вопросы анализа и синтеза подобных схем методами алгебры логики разработаны недостаточно. Так в работе [1] на основе двоичного триггера рассматривается синтез схем с обратными связями и произвольным числом состояний равновесия. Примененный аппарат переключательных функций громоздок и затрудняет рассмотрение сложных схем. В работе [2] рассмотрен метод синтеза управляющих схем с обратными связями, работающих дискретными тактами. Синтеза систем типа триггера в работе не проведено.

В настоящей работе * рассмотрены некоторые типы систем уравнений алгебры логики, позволяющие проводить синтез дискретных устройств с обратными связями и числом состояний равновесия, совпадающим с числом решений системы уравнений. Получающиеся устройства обладают достаточной экономичностью. Так, например, при синтезе аналогичной триггеру системы на электронных лампах и кристаллических диодах, имеющих $2^n - 1$ состояний равновесия, требуется n инверторов, т. е. n триодов.

1. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В общем случае система уравнений алгебры логики для n независимых двоичных переменных

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1.1)$$

может быть записана в виде:

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n), j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.2)$$

где $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — двоичные функции алгебры логики и N — произвольное натуральное число.

Решениями системы (1.2) назовем такие наборы значений переменных (1.1), которые удовлетворяют этой системе. Систему (1.2) назовем совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система несовместна.

* Основные результаты доложены на семинаре отдела ГИФТИ 15 марта 1957 г.

Две системы уравнений алгебры логики назовем эквивалентными, если решения этих систем совпадают. Укажем некоторые, необходимые для дальнейшего, свойства системы (1.2):

1. Взятие инверсии от обеих частей одного или группы уравнений системы не меняет решений этой системы.

2. Взятие инверсии от каждого переменного системы изменяет все решения ее на дополнительные так, что если

$$\{x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_k}^0, x_{i_{k+1}}^0, \dots, x_{i_n}^0\} = \{0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1\} \quad (1.3)$$

решение системы (1.2), то дополнительное решение новой системы будет:

$$\{x_{i_1}', x_{i_2}', \dots, x_{i_k}', x_{i_{k+1}}', \dots, x_{i_n}'\} = \{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}.$$

3. Прибавление по $\text{mod } 2$ к обеим частям любого уравнения или группы уравнений системы произвольной двоичной функции алгебры логики $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не изменяет решений этой системы.

4. Уравнения системы (1.2) могут дизъюнктивно складываться, если $h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Это приведет к эквивалентной системе (или одному уравнению).

Третье свойство позволяет привести систему (1.2) к следующему эквивалентному виду:

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.4)$$

где $F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = [F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) + h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \text{ mod } 2$.

Пользуясь четвертым свойством, систему (1.4) можно свести к одному эквивалентному ей уравнению

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1.5)$$

где

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^N F_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

или (см. свойство 1)

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1. \quad (1.6)$$

Системы (1.2), (1.4) или уравнения (1.5), (1.6) имеют не более чем 2^n различных решений. Эти решения могут быть найдены из уравнения (1.6). Для этого его левая часть представляется в нормальной дизъюнктивной форме, и наборы значений переменных, при которых конъюнкция этого представления обращается в единицу, дают решения. Таким образом, число решений уравнения (1.6) совпадает с числом конъюнкций в нормальной дизъюнктивной форме $\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Уравнение (1.5) можно свести к такой эквивалентной системе n уравнений вида

$$x_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

весьма удобной для дальнейшего (см. § 2), решения которой могут быть указаны по виду этой системы.

Теорема 1. Уравнение (1.5) или (1.6) можно привести к эквивалентной системе n уравнений вида (1.7), где

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j \bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.8)$$

для уравнений (1.5) или (1.6), имеющих нулевое решение, и

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j \bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \bigwedge_{i=1}^n \bar{x}_i \quad (1.9)$$

для тех же уравнений, не имеющих нулевого решения.

Действительно, пользуясь свойствами 1 и 2, систему (1.7) в случае (1.8) можно преобразовать к эквивалентному виду:

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \bar{x}_j = 1, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

Рассматривая отдельно каждое из уравнений (1.10), заметим, что оно дает все решения, которые имеет уравнение (1.5) или (1.6), и порождает еще те решения, в которых на месте x_j стоит нуль. Для всех вновь порожденных решений, не совпадающих с решениями (1.5) или (1.6), $\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$, а система (1.10) при этом имеет лишь нулевое решение. В случае, если уравнения (1.5) или (1.6) не имеют нулевого решения, то подстановкой в (1.7) функций (1.9) нетрудно убедиться, что нулевой набор не удовлетворяет системе (1.7), так как в левых частях всех уравнений стоят нули, а в правых $\sum_{i=1}^n \bar{x}_j$, равные единице.

Очевидно, систему (1.7) можно возвратить к виду (1.4) путем преобразования

$$\{[f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_j] \bmod 2\} = 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.11)$$

Для дальнейшего будет удобно ввести понятие дизъюнктивной и конъюнктивной системы уравнений. Назовем систему дизъюнктивной (конъюнктивной), если двоичные функции, входящие в систему, заданы в дизъюнктивной (конъюнктивной) форме.

Рассмотрим дизъюнктивные системы уравнений. Произвольную конъюнкцию Y_l дизъюнктивной системы уравнений, имеющей c различных конъюнкций, можно представить в виде:

$$Y_l = Y'_l \cdot Y''_l \quad (l = 1, 2, \dots, c), \quad (1.12)$$

где

$$Y'_l = \begin{cases} 1 & \text{при } k_l = 0 \\ \& x_{i_p} & \text{при } k_l > 0, \\ \& p=1 & \end{cases} \quad Y''_l = \begin{cases} 1 & \text{при } m_l = k_l \\ \& x_{i_p} & \text{при } m_l > k_l, \\ \& p=k_l+1 & \end{cases}$$

$n \geq m_l \geq k_l \geq 0$, m_l — число всех, а k_l — число инверсных переменных в Y_l .

Пусть M_l — набор индексов всех, а K_l — инверсных переменных в конъюнкции Y_l , I — набор индексов переменных (1.1).

Назовем конъюнкции Y_l и Y_g ортогональными, если $Y_l \cdot Y_g \equiv 0$. Скажем, что конъюнкция Y_l входит в Y_g , если $M_l \subseteq M_g$ при $Y_l \cdot Y_g \neq 0$.

Лемма. Дизъюнктивная система (1.7), полученная из дизъюнктивного уравнения (1.6), может быть приведена к эквивалентному виду:

$$x_i = \bigvee_{l=1}^c a_{jl} \cdot Y_l, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.13)$$

при

$$a_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in M_l / \bar{K}_l \text{ или } \bar{K}_l = I \\ 0 & \text{при } j \notin M_l / \bar{K}_l. \end{cases} \quad (1.14)$$

Действительно, пусть Y_g конъюнкция уравнения (1.6). При переходе к системе (1.7) конъюнкция Y_g войдет во все уравнения с $j \in M_g / \bar{K}_g$ в виде Y_g и с $j \in I / M_g$ в виде $Y_l = x_j \cdot Y_g$, причем в уравнение относительно x_j не войдет ни одна конъюнкция Y_h , в которую входит \bar{x}_j . Следовательно, учитя $Y_g = Y_g(1 \vee x_j) = Y_g \vee x_j Y_g$, коэффициенты a_{jl} системы (1.13) могут быть записаны в виде (1.14).

Заметим, что дизъюнктивная система (1.7) или (1.13) имеет нулевое решение, если в каждую конъюнкцию системы входит хотя бы одно неинверсное переменное.

Теорема 2. Каждой конъюнкции Y_l ($l=1, 2, \dots, c$), кроме $\&_{i=1}^n \bar{x}_i$ системы (1.7) или (1.13), соответствует решение

$$\begin{aligned} \{x_{i_1}^\circ, x_{i_2}^\circ, \dots, & x_{i_{k_l}}^\circ, x_{i_{k_l+1}}^\circ, \dots, x_{i_{m_l}}^\circ, x_{i_{m_l+1}}^\circ, \dots, x_{i_n}^\circ\} = \\ & = \{0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

в котором каждому неинверсному переменному, входящему в конъюнкцию Y_l , соответствует единица, а всем остальным переменным — нуль. При этом система имеет решения, являющиеся различными почленными дизъюнкциями решений вида (1.15), соответствующих попарно неортогональным конъюнкциям рассматриваемой системы. Других решений система не имеет.

Для доказательства рассмотрим систему (1.13). Заметим, что она имеет нулевое решение, если в каждую конъюнкцию Y_l системы входит хотя бы одно неинверсное переменное. Рассмотрим ненулевые решения, которые полностью определяются конъюнкциями Y_l ($l=1, 2, \dots, c$), входящими в правые части уравнений. Допустим, на наборе (1.15) только одна конъюнкция Y_g системы равна единице. В этом случае, по условию (1.14), все переменные системы примут значения

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \notin M_g / \bar{K}_g \\ 1 & \text{при } j \in M_g / \bar{K}_g, \end{cases} \quad (1.16)$$

и, следовательно, набор (1.16), совпадающий с (1.15), является решением. Если в системе (1.13) найдется конъюнкция Y_h , входящая в Y_g , то на наборе (1.15) конъюнкция $Y_h = 1$. По условию (1.14) Y_h входит в те же уравнения, в которые входит Y_g , следовательно, набор (1.16), а значит и (1.15), является также решением системы. Аналогично для любой другой конъюнкции Y_l ($l=1, 2, \dots, c$).

Допустим, что на некотором наборе значений переменных

$$\begin{aligned} \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k_l}}, x_{i_{k_l+1}}, \dots, x_{i_{m_l}}, x_{i_{m_l+1}}, \dots, x_{i_{k_g}}, x_{i_{k_g+1}}, \dots, x_{i_{m_g}}, \\ x_{i_{m_g+1}}, \dots, x_{i_n}\} = \{0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\} \end{aligned}$$

две конъюнкции Y_l и Y_g одновременно равны единице. В этом случае, согласно (1.14), все переменные системы примут значения

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in M_l / \bar{K}_l \quad \text{и } j \in M_g / \bar{K}_g \\ 0 & \text{при } j \notin M_l / \bar{K}_l \quad \text{и } j \notin M_g / \bar{K}_g, \end{cases}$$

где

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

следовательно, взятый набор — решение нашей системы. Но этот набор — дизъюнкция наборов вида (1.15), на которых отдельно Y_l и Y_g равны единице. Аналогично любая дизъюнкция решений вида (1.15), соответствующих неортогональным (ортогональные конъюнкции одновременно не могут быть равны единице) конъюнкциям, является также решением системы (1.13). Этим определяются все возможные решения системы (1.13) или (1.7), так как любой набор, за исключением нулевого, обращающий все конъюнкции в нуль, не может быть решением системы.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что если все конъюнкции ортогональны, то каждой различной конъюнкции системы соответствует решение вида (1.15), и других ненулевых решений система не имеет.

Рассмотрим систему, имеющую только ортогональные конъюнкции. Из условия (1.14) и доказательства теоремы 2 следует, что каждую конъюнкцию системы (1.13) можно умножить на инверсную конъюнкцию, индексы переменных которой совпадают с набором $I/(M_l/\bar{K}_l)$. В этом случае все конъюнкции системы ортогональны ($M_l = I$, $l = 1, 2, \dots, c$), и условие (1.14) для системы (1.13) может быть записано в виде:

$$a_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in K_l \text{ или } \bar{K}_l \in I, \\ 0 & \text{при } j \notin K_l \end{cases} \quad (1.17)$$

где $K_l \in I/\bar{K}_l$. При этом новая система имеет решения, совпадающие с (1.15), в которых каждому инверсному переменному конъюнкции Y_l соответствует нуль, а всем остальным — единица.

Заметим, что конъюнкции системы (1.13), при условии (1.14) в случае ортогональных и при условии (1.17) в случае невходящих конъюнкций, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$Y_l = \bigwedge_{j=1}^c \bar{Y}_j, \text{ где } j \neq l \text{ и } l = 1, 2, \dots, c.$$

Для дальнейшего (см. § 2) коротко рассмотрим некоторые эквивалентные преобразования системы (1.13) и (1.7).

1. Для системы (1.13) при условии (1.14): а) Любую конъюнкцию Y_l ($l = 1, 2, \dots, c$) системы можно умножить на инверсную конъюнкцию Y_l^* , индексы переменных которой принадлежат I/M_l . Необходимо лишь, чтобы Y_l^* не была ортогональна к конъюнкциям, к которым не ортогональна Y_l . б) Ко всем $Y_l = Y'_l \cdot Y_l^*$ системы можно дизъюнктивно прибавить конъюнкцию $Y_l^* = Y_l^{**} \cdot Y_l^*$, где Y_l^{**} — конъюнкция, индексы переменных которой принадлежат $I/(M_l/\bar{K}_l)$, а Y_l^* — ортогональная только к тем конъюнкциям системы, к которым ортогональна Y_l .

2. Для системы (1.13) при условии (1.17): а) Ко всем $Y_l = Y'_l \cdot Y_l^*$ системы можно дизъюнктивно прибавить конъюнкцию $Y_l^* = Y' \cdot Y_l^{**}$, где Y_l^{**} — конъюнкция, индексы переменных которой принадлежат K_l . При этом Y_l^* может входить лишь в Y_l . б) Произвольную конъюнкцию Y_l системы можно умножить на Y_l^* , индексы переменных которой принадлежат K_l . Последнее преобразование будет неэквивалентным, если в результате преобразования 2а над системой с $m_l > k_l$ для всех $l = 1, 2, \dots, c$ в ней появится хотя бы одна конъюнкция с $m_g = k_g$ при $g \in \{1, 2, \dots, c\}$, и наоборот, если в результате преобразования 2б над системой, в которой имеются конъюнкции с $m_g = k_g$ при $g \in \{1, 2, \dots, c\}$, получим, что $m_l > k_l$ для всех $l = 1, 2, \dots, c$. В первом случае система теряет, а во втором — приобретает нулевое решение.

Преобразования 1 и 2 следуют из того, что вид решения (1.15) для системы (1.13) при условии (1.14) зависит только от безынерсных, а для (1.13) при условии (1.17) — от инверсных переменных, входящих в конъюнкцию Y_l .

3. Система (1.13) при условии (1.14) в случае ортогональных конъюнкций и при условии (1.17) в случае невходящих конъюнкций может быть разбита на подсистемы:

$$x_j = \bigvee_{l=1}^g a_{jl} \cdot Y_l, \quad j = 1, 2, \dots, n; \dots; \quad x_j = \bigvee_{l=h}^c a_{jl} \cdot Y_l, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$1 \leq \dots \leq g \leq \dots \leq h \leq \dots \leq c.$$

При этом все решения каждой из подсистем являются решениями соответствующей системы (1.13).

4. Система уравнений алгебры логики (1.13) при условии (1.14) или (1.17), для которой $m_l \geq k_l \geq 0$ ($l = 1, 2, \dots, c$), может быть приведена к виду, где $m_l = k_l$ ($l = 1, 2, \dots, c$). Для этого достаточно в правых частях системы все безынверсные переменные x_i заменить на $x_i = \bar{x}_{i+n}$. В этом случае система будет иметь дополнительные переменные и уравнения, число которых совпадает с числом различных безынверсных переменных, встречающихся в правых частях системы.

Рассмотрим еще одно преобразование системы (1.13), все коэффициенты которой удовлетворяют (1.17). Назовем конъюнкцию

$$\tilde{Y}_l' = \underset{p=g+1}{\overset{n}{\&}} x_{i_p} \quad (1.18)$$

дополнительной, а

$$\tilde{Y}_l' = \underset{p=g+1}{\overset{n}{\&}} \bar{x}_{i_p} \quad (1.19)$$

инверсной дополнительной к конъюнкции $\tilde{Y}_l' = \underset{p=1}{\overset{g}{\&}} \bar{x}_{i_p}$.

Теорема 3. Инверсная система ($m_l = k_l$, $l = 1, 2, \dots, c$) уравнений (1.13), удовлетворяющая условиям (1.17), может быть приведена к эквивалентному виду:

$$x_j = \overline{\bigvee_{l=1}^c \tilde{a}_{jl} \cdot \tilde{Y}_l'}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.20)$$

где $\tilde{a}_{jl} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \in K_l \\ 1 & \text{при } j \notin K_l \end{cases}$, \tilde{Y}_l' — дополнительная конъюнкция к конъюнкции Y_l' исходной системы.

Для доказательства рассмотрим систему

$$x_j = \overline{\bigvee_{l=1}^c \tilde{a}_{jl} \cdot \tilde{Y}_l'}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.21)$$

для которой $\tilde{k}_l = n - k_l$, \tilde{Y}_l' — инверсная дополнительная конъюнкция к конъюнкции Y_l' исходной системы и $\tilde{a}_{jl} = 0$ при $j \in K_l$. Система (1.21) и исходная система будут иметь взаимно дополнительные наборы решений. Взяв от обеих частей каждого уравнения системы (1.21) инверсию и заменив \bar{x}_j на x_j , получим, что новая система

$$x_j' = \overline{\bigvee_{l=1}^c \tilde{a}_{jl} \cdot \tilde{Y}_l}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

эквивалентна исходной и совпадает с системой (1.20). Этим теорема доказана.

Рассмотрим систему (1.13), все коэффициенты a_{jl} которой удовлетворяют условию (1.14) или (1.17).

Назовем систему уравнений симметричной, если при всех подстановках $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ переменных (1.1) система переходит в себя. Очевидно, для симметричной системы $n \geq m_1 = \dots = m_c = m > 0$ и $m \geq k_1 = k_2 = \dots = k_c = k \geq 0$.

Для дальнейшего представляют интерес некоторые случаи симметричных систем уравнений, рассмотрим их.

1. Инверсная симметричная система уравнений (для которой $n > m = k > 0$) может быть записана в виде:

$$x_j = \bigvee_{l=1}^{C_n^k} a_{jl} \cdot Y_l, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.22)$$

где a_{jl} удовлетворяют условию (1.17). Система имеет C_n^k различных инверсных конъюнкций, а следовательно, и решений вида (1.3), каждое из которых содержит k нулей и $n - k$ единиц. Система (1.22) имеет наибольшее число решений для заданного значения n при $k = E\left(\frac{n}{2}\right)$.

2. Безинверсная симметричная система уравнений (для которой $n > m > 0$ и $k = 0$) может быть записана в виде:

$$x_j = \bigvee_{l=1}^{C_n^m} a_{jl} \cdot Y_l, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.23)$$

где a_{jl} удовлетворяют условию (1.14). Система имеет нулевое решение, C_n^m различных решений вида

$$\{x_{i_1}^\circ, x_{i_2}^\circ, \dots, x_{i_m}^\circ, x_{i_{m+1}}^\circ, \dots, x_{i_n}^\circ\} = \{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\} \quad (1.24)$$

и еще решения, являющиеся различными почлененными дизъюнкциями этих C_n^m решений.

Система имеет наибольшее число решений вида (1.24) для заданного значения n при $m = E\left(\frac{n}{2}\right)$.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Системы уравнений, рассмотренные в предыдущем разделе, могут моделироваться в виде схем, составленных с помощью одного из полных наборов логических элементов любой природы. Непосредственно от уравнений можно перейти к схеме их модели, а от схемы модели — к физической модели.

При составлении схем моделей будем пользоваться логическими элементами дизъюнкции, конъюнкции и инверсии, которые будем считать идеальными, т. е. идеально направленными, не дающими сдвига по времени, ложных срабатываний (проскоков) и т. п.

Из всех рассмотренных видов уравнений наибольший интерес представляет система вида (1.7), которая на основе логических элементов дает возможность производить синтез автономных устройств, имеющих обратные связи, число которых совпадает с числом уравнений в системе. Получающиеся устройства сходны с триггерами, но могут иметь большее число устойчивых состояний равновесия. При этом каждому решению системы уравнений соответствует состояние равновесия устройства (физической модели). Устойчивость состояний равновесия синтезируемых устройств зависит от конфигурации схемы модели, а также числа и характеристик элементов, входящих в эту модель.

В общем случае схема модели системы (1.7) имеет вид*, пока-

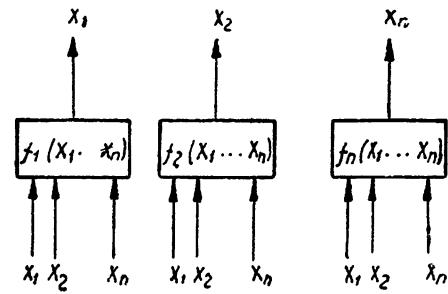


Рис. 1.

* Здесь и в дальнейшем для упрощения рисунков на них не проводятся линии, соединяющие одинаковые переменные.

занный на рис. 1. Рассмотрим моделирование некоторых симметричных однородных систем уравнений вида (1.20), (1.22), (1.23). В этих моделях будем пользоваться условными обозначениями рис. 2, где a и b — элементы конъюнкции, v и g — элементы дизъюнкции, \bar{d} — элемент инверсии с Z -характеристикой, e — усилитель с Z -характеристикой и τ — задержка на постоянное время τ .

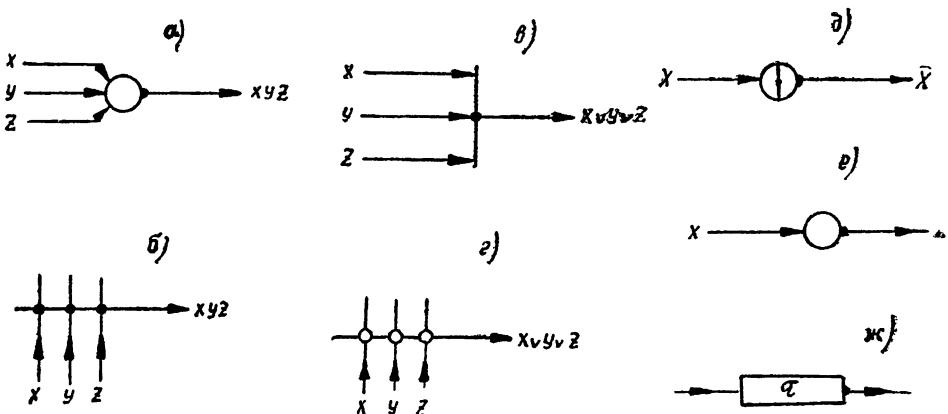


Рис. 2.

I. Пусть $n = 1, m = 1, k = 0$. В этом случае система (1.23) сводится к тождеству

$$x = x, \quad (2.1)$$

которое имеет решения $\{x^0\} = \{1\}, \{0\}$. Схема модели уравнения показана на рис. 3.

II. $n = 2, m = 1, k = 1$, тогда из (1.22) имеем*

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_2 \\ x_2 = x_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Набор решений системы будет $\{x_1^0, x_2^0\} = \{1, 0\}, \{0, 1\}$. Схема модели показана на рис. 4. Она дает физическую модель, сходную с обыч-

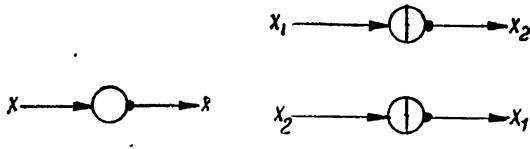


Рис. 3.



Рис. 4.

ным триггером, обладающим двумя устойчивыми состояниями равновесия.

III. $n = 3$

1. $m = 1, k = 1$, тогда $\bar{K}_l = \{1\}, \{2\}, \{3\}$, $C_n^k = 3$ и система

$$x_j = \bigvee_{l=1}^3 a_{jl} \cdot Y_l, \quad j = 1, 2, 3$$

может быть расписана в виде**:

* Система уравнений (2.2) может быть получена из (2.1), используя четвертое преобразование предыдущего параграфа.

** В дальнейшем для рассматриваемых систем будем указывать лишь характеристические числа, число различных конъюнкций C_n^k и подмножества \bar{K}_l системы.

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3, \\ x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3, \\ x_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Решениями системы являются наборы:

$$\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}. \quad (2.4)$$

Схема модели показана на рис. 5а. С узловых точек схемы модели

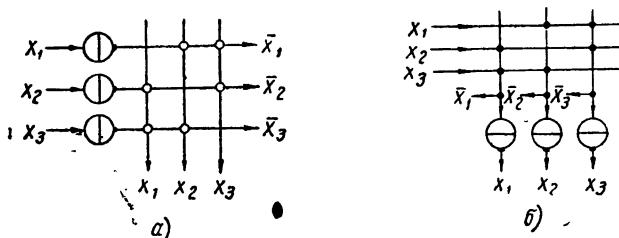


Рис. 5.

могут быть получены как состояния, соответствующие решениям (2.4), так и состояния дополнительных решений

$$\{\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{x}_3^0\} = \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}. \quad (2.5)$$

Если воспользоваться теоремой 3 (или тождеством $\bar{a}\bar{b} = \overline{a \vee b}$) и преобразовать правые части системы (2.3), то получим эквивалентную систему вида (1.20), для которой $C_n^k = 3$ и $\bar{K}_l = \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}$. Схема модели этой системы показана на рис. 5б. Она тоже позволяет получить как состояния (2.4), так и (2.5).

2. Случай $m=2, k=2$. При этом $C_n^k = 3$ и $\bar{K}_l = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. Решениями системы являются наборы:

$$\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}. \quad (2.6)$$

Схема модели полностью совпадает со схемой, изображенной на рис. 5б, необходимо лишь за выходы считать $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Если эту систему преобразовать (пользуясь теоремой 3) к виду (1.20), то для новой системы $C_n^k = 3$ и $\bar{K}_l = \{3\}, \{2\}, \{1\}$. Схема модели будет совпадать со схемой рис. 5а. За выходы системы необходимо взять x_1, x_2, x_3 .

Заметим, что в общем случае схема модели с числами $n, m=k$, выполненная по уравнениям (1.22), совпадает со схемой модели системы (1.22), имеющей числа $n, m'=k'=n-k$ и преобразованной к виду (1.20). Поэтому в дальнейшем не будем приводить схем моделей для $k > E\left(\frac{n}{2}\right)$, выполненных по уравнениям системы (1.22), так как их можно получать из системы (1.22) при $k \leq E\left(\frac{n}{2}\right)$, пользуясь указанным преобразованием.

IV. $n=4$

1. $m=1, k=1$. Для этой системы $C_n^k = 4$ и $\bar{K}_l = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$. Решениями будут следующие наборы:

$$\{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\} = \{0, 1, 1, 1\}, \{1, 0, 1, 1\}, \{1, 1, 0, 1\}, \{1, 1, 1, 0\}. \quad (2.7)$$

Схема модели показана на рис. 6а. Преобразованная (см. теорему 3) система при $C_n^k = 4$ и $\bar{K}_l = \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}$ дает схему, показанную на рис. 6б.

2. $m = 2, k = 2$. В этом случае $C_n^k = 6, \bar{K}_l = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$, система имеет вид:

$$x_j = \bigvee_{l=1}^6 a_{jl} \cdot Y'_l, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

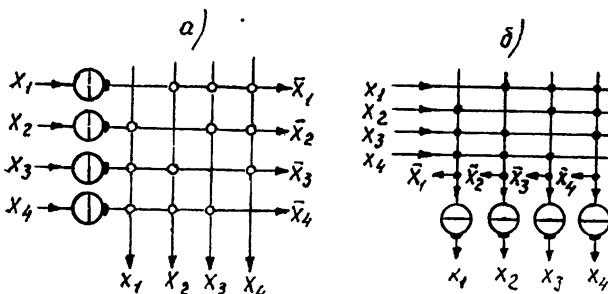


Рис. 6.

или

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4, \\ x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4, \\ x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4, \\ x_4 = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4. \end{cases} \quad (2.8)$$

Ее решениями будут

$$\begin{aligned} \{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\} &= \{0, 0, 1, 1\}, \{0, 1, 0, 1\}, \{0, 1, 1, 0\}, \{1, 0, 0, 1\}, \\ &\quad \{1, 0, 1, 0\}, \{1, 1, 0, 0\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

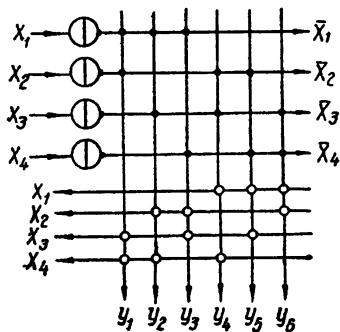


Рис. 7.

Схема модели показана на рис. 7. Каждая конъюнкция $Y_l (l=1, 2, \dots, 6)$ соответствует определенному решению (для каждого решения всего лишь одна из них равна единице). Поэтому с узлов схемы (рис. 7) можно получить другие шесть наборов

$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6) = \{1, 0, 0, 0, 0, 0\}, \\ \{0, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0, 0\}, \\ \{0, 0, 0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 1\}, \quad (2.10)$$

каждый из которых соответствует определенному набору из (2.9).

V. Для ряда практических целей представляют интерес системы с десятью

стационарными состояниями, которые описываются системой уравнений вида (1.22), имеющей десять решений, т. е. либо системой с $n = 5, m = k = 3$, либо системой с $n = 5, m = k = 2$.

1. Рассмотрим случай $n = 5, m = k = 3$. Тогда $C_n^k = 10$ и $\bar{K}_l = \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$. (2.11)

Решениями системы являются наборы:

$$\begin{aligned} \{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0\} &= \{0, 0, 0, 1, 1\}, \{0, 0, 1, 0, 1\}, \{0, 0, 1, 1, 0\}, \\ &\quad \{0, 1, 0, 0, 1\}, \{0, 1, 0, 1, 0\}, \{0, 1, 1, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 0, 1\}, \{1, 0, 0, 1, 0\}, \\ &\quad \{1, 0, 1, 0, 0\}, \{1, 1, 0, 0, 0\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Схема модели показана на рис. 8а. Преобразовав эту схему, пользуясь теоремой 3, получим систему, схема модели которой изображена на рис. 8б.

При помощи рассмотренных уравнений можно получить большое число разнообразных новых схем. Приведенные примеры показывают, как в каждом конкретном случае могут быть составлены соответствующие уравнения, в случае необходимости произведено их преобразование, и построена схема их модели.

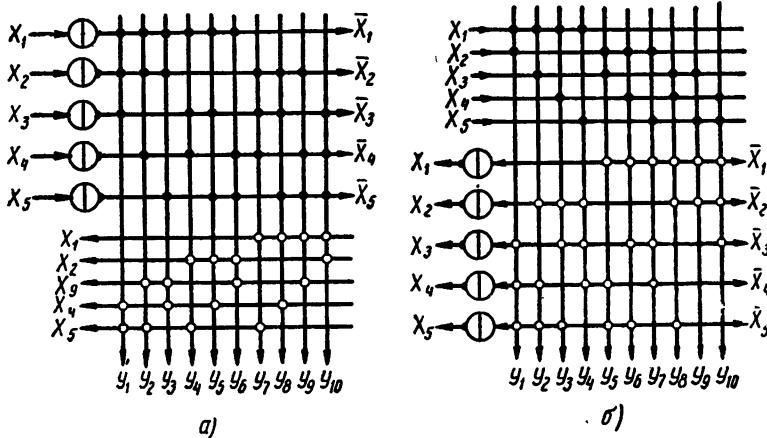


Рис. 8.

3. ВОПРОСЫ ЗАПУСКА

Пусть из схем моделей выполнены устройства, имеющие устойчивые стационарные состояния. Возникает вопрос, каким образом эти автономные системы переводить из одного стационарного состояния в другое, т. е. вопрос о запуске. Различают запуск в несчетные (несимметричные) и счетный (симметричный) входы. Рассмотрим запуск системы в несчетные входы однополярными импульсами. Для того, чтобы установить систему в заданное состояние, достаточно подать на нее информацию, полностью определяющую это состояние. Так, например, перевод системы в состояние, при котором $Y_1 = 1$, может быть выполнен путем подачи внешнего импульса через элементы дизъюнкции либо во все узлы схемы x_1, x_2, \dots, x_n , состояние которых определяется состоянием узла Y_1 , либо в один этот узел Y_1 . На рис. 9а показан запуск первым, а на рис. 9б — вторым способом. Соответствия между состоянием модели

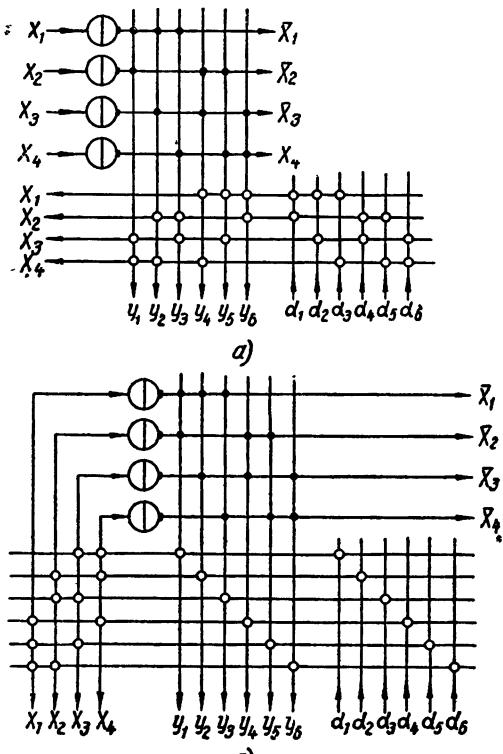


Рис. 9.

и входом, на который подан внешний импульс, указаны в таблице.

Вход запуска	Состояние модели
α_1	1, 1, 0, 0
α_2	1, 0, 1, 0
α_3	1, 0, 0, 1
α_4	0, 1, 0, 1
α_5	0, 0, 1, 1
α_6	0, 1, 1, 0

На рис. 10а показан запуск в несчетный вход модели, имеющей два устойчивых стационарных состояния.

Для работы рассматриваемых схем в счетном режиме полный набор логических элементов необходимо дополнить элементом задержки на время τ (см. рис. 1ж). Схемы модели системы (2.2) с различными счетными входами приведены на рис. 10б и 10в. В

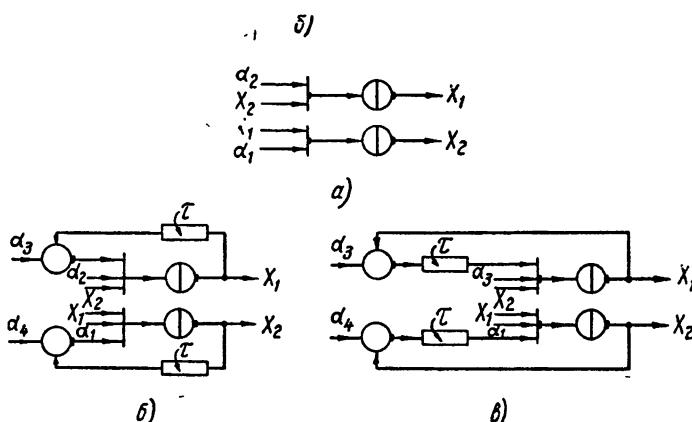


Рис. 10.

момент прихода внешнего импульса на входы α_3 и α_4 , которые могут быть соединены, схема рис. 10б сразу переходит в новое состояние, а схема рис. 10в — через время τ . Для нормальной работы схем необходимо, чтобы длительность запускающих импульсов τ' была меньше времени задержки τ . В этих схемах α_1 и α_2 — несчетные входы модели.

Аналогично могут быть построены схемы со счетными входами на большее число устойчивых состояний равновесия. На рис. 11 дана схема модели со счетным входом на шесть состояний равновесия, построенная по уравнениям (2.8). Если входы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ соединить и подавать на них импульсы длительности $\tau' < \tau$, то схема будет проходить циклически через все шесть состояний.

Если задать на входы α_3 и α_4 высокий потенциал, то схема рис. 10б превратится в схему, подобную мультивибратору. Длительность импульсов, генерируемых этим „мультивибратором“, зависит от величины задержек, включенных в его плечи. Таким же образом, задав высокий потенциал на входы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ схемы рис. 11, получим аналогичное устройство, но с более сложным периодом. Если подать высокий потенциал на вход α_3 схемы рис. 10б, то, при подаче импульса длительности $\tau' < \tau$ на вход α_4 , схема с выхода X_1 выдаст через время τ импульс длительности τ .

Таким образом получится схема, аналогичная кипп-реле. Если подать на некоторые входы α_i схемы рис. 11 высокие потенциалы, то получим схему, сходную со схемой кипп-реле, имеющего число устойчивых состояний, равное числу входов с низкими потенциалами.

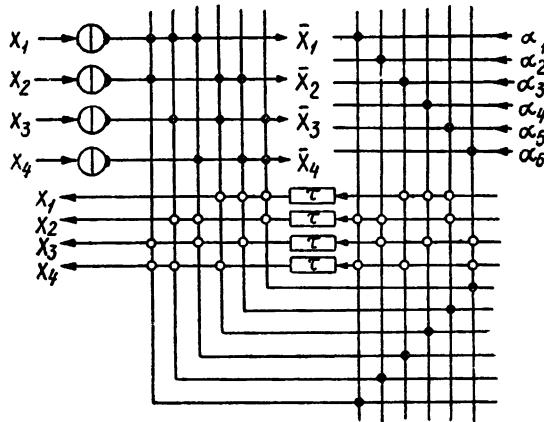


Рис. 11.

4. ОБОРУДОВАНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

На основе рассмотренного выше могут быть построены многие узлы дискретных управляющих устройств. Эти схемы дают значительную экономию деталей по сравнению со схемами, в которых используются обычные двоичные триггеры. Рассмотрим оборудование, необходимое для моделирования систем уравнений (1.22) или (1.23), если в качестве элементов дизъюнкции и конъюнкции взяты элементы, выполненные на диодах, а инверторы — на триодах. Для построения элемента дизъюнкции или конъюнкции на W входов требуется W диодов. Следовательно, число диодов, необходимое для построения модели уравнений (1.22) или (1.23), равно

$$N_1 = C_n^m m + C_{n-1}^m n, \quad (4.1)$$

где $C_n^m m$ — число диодов, необходимое для построения всех конъюнкций Y_l ($l = 1, 2, \dots, C_n^m$), а $C_{n-1}^m n$ — число диодов, необходимое для построения дизъюнкций.

В случае построения модели по уравнениям (1.22), преобразованным согласно теореме 3, число диодов равно

$$N_2 = C_n^{n-m} (n - m) + C_n^{n-m} n. \quad (4.2)$$

Наименьшее число диодов, необходимое для запуска модели, равно

$$N_3 = 2C_n^m. \quad (4.3)$$

Наименьшее число инверторов, необходимое для моделирования уравнений вида (1.22), равно

$$N_4 = n. \quad (4.4)$$

Наименьшее число задержек, необходимых для „триггера“ со счетным входом, „мультивибратора“ или „кипп-реле“, равно n . Наименьшее число активных элементов, необходимых для построения рассмотренных схем, равно числу обратных связей, т. е. n .

5. ЭКСПЕРИМЕНТ

Для экспериментальной проверки полученных результатов был построен один из полных наборов потенциальных логических элементов, состоящий из дизъюнкции, конъюнкции и инверсии. Элементы выполнены на электронных приборах. Для выбора схем и их режимов была принята положительная полярность рабочих импульсов и потенциалов. Кроме того, использовались активные элементы, обладающие усилием по амплитуде и мощности.

Принципиальные схемы логических элементов конъюнкции и дизъюнкции показаны, соответственно, на рис. 12а и 12б (они могут быть выполнены на число входов, большее, чем два).

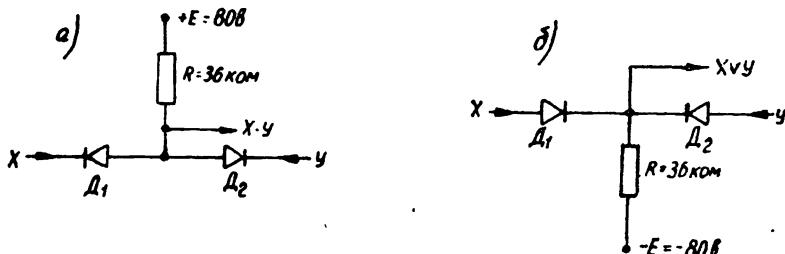


Рис. 12.

Принципиальные схемы и амплитудные характеристики инвертора, катодного повторителя и усилителя даны, соответственно, на рис. 13а и 13б, 14а и 14б, 15а и 15б. Нагрузочная характеристика любого из этих элементов при работе на элементы конъ-

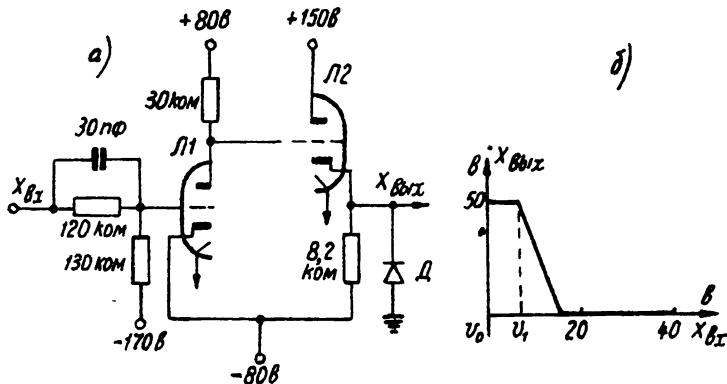


Рис. 13.

юнкции показана на рис. 16. По оси ординат отложено напряжение на выходе активного элемента, а по оси абсцисс — число элементов конъюнкции, на которое работает активный элемент. Во всех схемах применены лампы типа 6Н1П и германиевые диоды типа ДГ-Ц5. На этих элементах были выполнены некоторые модели уравнений (1.22) и (1.23) со следующими характеристическими числами n , m и k .

1. $n = 1$, $m = 1$, $k = 0$. Схема (рис. 2) была выполнена на усилителе с замыканием цепи положительной обратной связи через диод. Схема имела два состояния, которым соответствовали вы-

ходные напряжения $v_{\text{вых}_0} = 0$, $v_{\text{вых}_1} = 50 \text{ в}$, и не требовала специального подбора деталей и ламп.

2. $n = 2$, $m = 1$, $k = 1$. Схема модели с устройством запуска показана на рис. 10б. Функциональные свойства схемы совпадают со свойствами обычного триггера. Элементы задержки выполнены

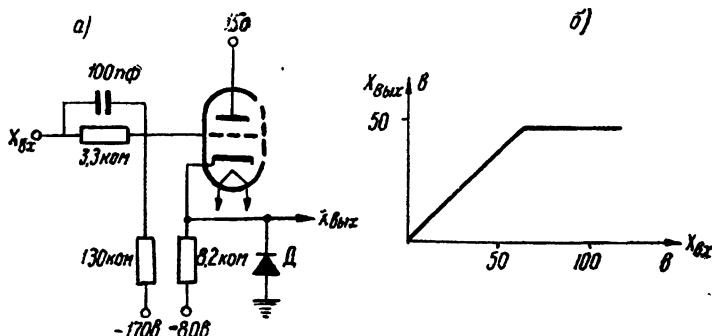


Рис. 14.

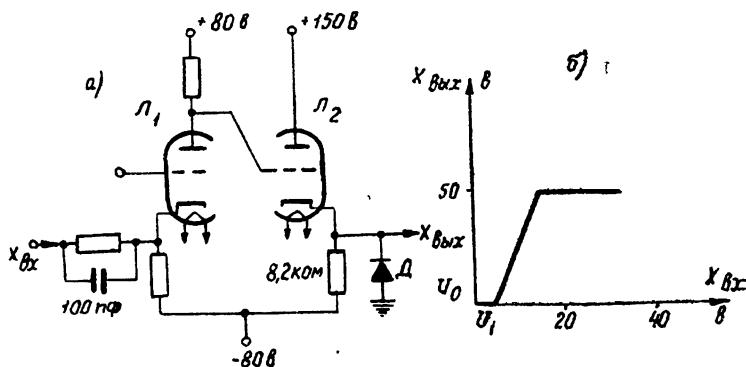


Рис. 15.

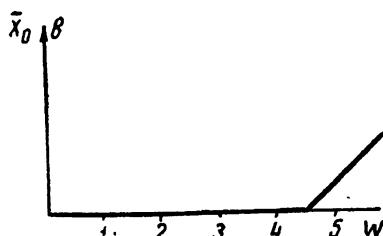


Рис. 16.

на RC -цепях с постоянной времени $\tau = 3 \text{ мксек}$ ($R = 10 \text{ ком}$, $C = 300 \text{ пФ}$). Схема имеет два устойчивых состояния равновесия, которым соответствуют выходные напряжения $v_{\text{вых}_0} = 0$, $v_{\text{вых}_1} = 60 \text{ в}$ (для выхода x_1 или x_2). Исследование схемы показало, что она работает более устойчиво в отношении помех, действующих по цепи питания, менее критична к параметрам запускающего импульса ($\tau' = 0,1 \div 3 \text{ мксек}$, $v_{\text{имп}} = 30 \div 120 \text{ в}$), чем обычный триггер. Работа схемы мало зависит от идентичности характеристик инверто-

ров и остальных деталей схемы. При малых амплитудах запускающих импульсов время перехода схемы из одного состояния в другое не более 0,3 мксек. Осциллограмма напряжения x_1 при работе схемы в счетном режиме показана на рис. 17.

3. $n=5$, $m=3$, $k=3$. Схема модели с устройством запуска показана на рис. 18. Схема имела 10 устойчивых состояний. Задержки выполнены на RC -цепях, $v_{\text{вых}_0}=0$, $v_{\text{вых}_1}=40$ в.

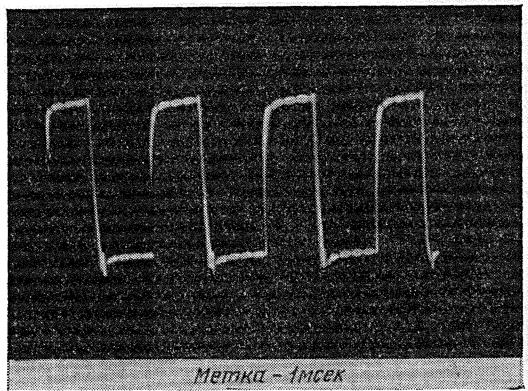


Рис. 17.

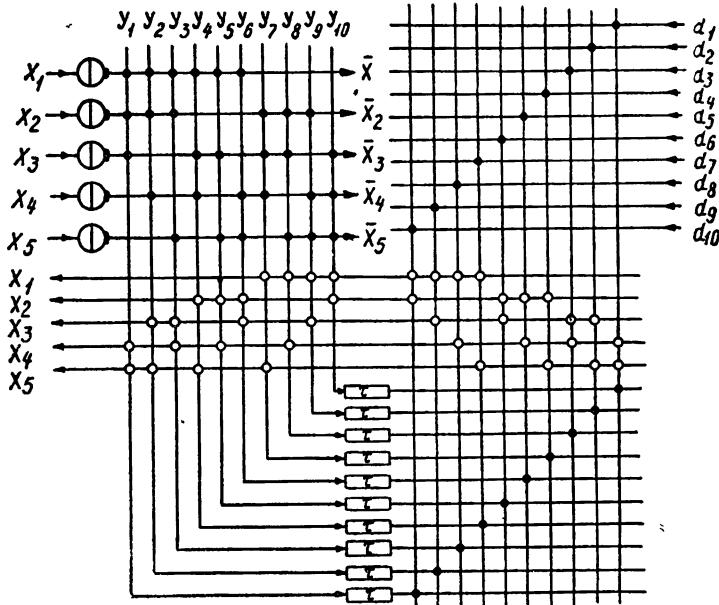


Рис. 18.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Х. Айкин, Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, изд. ИЛ, М., 1954.
- Н. Е. Кобринский, Б. А. Трахтенброт, О построении общей теории логических сетей (Доклад на межвузовской конференции по применению математических машин в автоматическом управлении).
- Д. Гильберт, В. Акерман, Основы теоретической логики, изд. ИЛ, М., 1947.