ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том I, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1958*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ФОКУСА, ЛЕЖАЩЕГО НА ЛИНИИ СКЛЕЙКИ

Г. В. Аронович

Определяется поведение динамической системы вблизи границы области устойчивости при условии, что особая точка дифференциальных уравнений возмущенного движения лежит на линии (поверхности) склейки, по обе стороны от которой дифференциальные уравнения отличаются друг от друга членами не ниже второго порядка.

1. При рассмотрении различного рода технических задач возникает практически важный вопрос о поведении динамических систем вблизи границы области устойчивости, иначе—вопрос о том, являются ли эти границы опасными или безопасными. Этот вопрос был поставлен и разрешен Баутиным (см. [1], а также дополнительно [2–6]) для систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с одинаковыми аналитическими правыми частями во всей области значений переменных. В настоящей заметке аналогичный вопрос рассматривается для динамических систем несколько отличных от тех, которые исследовали Баутин и другие авторы. А именно, рассматриваются системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями с кусочно-аналитическими правыми частями при условии, что особая точка (типа фокуса) этих дифференциальных уравнений, соответствующая исследуемому равновесному режиму, лежит на линии (поверхности) склейки, на которой дифференциальные уравнения меняют свой вид. Предполагается также, что правые части дифференциальных уравнений задачи, представленные в виде степенных рядов, отличаются друг от друга (по обе стороны от линии склейки) членами второго порядка и выше и что исследуются лишь простейшие из возможных негрубых состояний равновесия. Ниже показано, что в рассматриваемом частном случае наличие склейки (при некотором дополнительном предположении) упрощает выяснение вопроса об опасных и безопасных границах для случая, когда характеристическое уравнение задачи имеет два мнимых корня.

Сформулируем прежде всего это дополнительное предположение. Согласно Ляпунову [7], в случае, если характеристическое уравнение имеет два мнимых корня и n корней с отрицательными вещественными частями, дифференциальные уравнения возмущенного движения можно представить в форме:

$$\frac{dz}{d\varphi} = zZ,$$
$$\frac{dz_s}{d\varphi} = q_{s1}z_1 + q_{s2}z_2 + \dots + q_{sn}z_n + Z_s \quad (s = 1, 2, \dots n), \tag{1}$$

где уравнение

$$\Delta(\chi) = \begin{vmatrix} q_{11} - \chi, & q_{12}, \dots & q_{1n} \\ q_{21}, & q_{22} - \chi, \dots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ q_{n1}, & q_{n2}, \dots & q_{nn} - \chi \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

имеет все корни с отрицательной вещественной частью, а разложение голоморфных функций zZ, Z_s начинается с членов второго порядка. Здесь $z>0$.

Представим величину zZ в виде:

$$zZ = gz^m + P^{(1)}z + P^{(2)}z^2 + \ldots + P^{(m-1)}z^{m-1} + R, \tag{3}$$

где $P^{(j)}$ — линейные формы величины Z_s с периодическими относительно φ коэффициентами и R — голоморфная функция переменных z, Z_s, не содержащая членов ниже третьего порядка.

Если в соответствии с [7] построить функцию

$$V = z + W + U^{(1)}z + U^{(2)}z^2 + \ldots + U^{(m-1)}z^{m-1}, \tag{4}$$

где $U^{(j)}$ — линейные формы величин Z_s, а W — их квадратичная форма с неопределенными коэффициентами, то, как показал Ляпунов (см. [7] § 37), всегда можно определить функции $U^{(j)}$ и W так, чтобы производная $\frac{dV}{d\varphi}$ в силу уравнений (1) была знакоопределенной функцией.

Предположим теперь, что система уравнений (1) является склеенной, т. е. в уравнениях (1) zZ и Z_s различны в разных областях значений переменных. Достаточным условием возможности построения и в этом случае (по правилам, указанным Ляпуновым) функции V со знакоопределенной производной является непрерывность функции $P^{(j)}$ из (3) на линии склейки. Непрерывность членов $P^{(j)}z^j$ в разложении в степенной ряд функции zZ и является тем дополнительным условием, которое накладывается на правые части рассматриваемых нами дифференциальных уравнений. Особо отметим, что необходимость в этом дополнительном условии автоматически отпадает при $n=0$, т. е. в случае, если дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Ограничения, наложенные на дифференциальные уравнения возмущенного движения, позволяют непосредственно перенести на исследуемый случай динамических систем со склейкой теоремы 1 и 2 работы [1] об опасных и безопасных границах. При этом оказывается, что определение поведения конкретной динамической системы вблизи границы области устойчивости упрощается, так как первая ляпуновская величина совпадает (по крайней мере для $n=0$) с коэффициентом четного номера.

2. Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка ($n=0$):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + P'(x, y) \pm P''(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + Q'(x, y) \pm Q''(x, y). \end{aligned} \tag{5}$$

Без ограничения общности примем, что знак плюс следует брать при $y>0$, знак минус — при $y<0$.* Состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (5) $x=0$, $y=0$ лежит на линии склейки.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\chi^2 + p\chi + q = 0,$$

где $$p = -(a+d), \quad q = ad - bc.$$

* Если смена знака происходит на прямой $y=kx$, то задачу можно свести к предыдущей, заменив одно из переменных x или y новой переменной $u=y-kx$.

Система устойчива, если ($q>0$)

$$R\equiv p=-(a+d)>0.$$

Развертывая P и Q в ряды по степеням x и y, получим:

$$P'(x, y)\pm P''(x, y)=P_2'(x, y)\ \pm P_2''(x, y)+P_3'(x, y)\pm P_3''(x, y)+\dots,$$

$$Q'(x, y)\pm Q''(x, y)=Q_2'(x,y)\pm Q_2''(x, y)+Q_3'(x, y)\pm Q_3''(x, y)+\dots,$$

где

$$P_2'(x, y)=a_{20}'x^2+a_{11}'xy+a_{02}'y^2,$$
$$P_2''(x, y)=a_{20}''x^2+a_{11}''xy+a_{02}''y^2,$$
$$Q_2'(x, y)=b_{20}'x^2+b_{11}'xy+b_{02}'y^2,$$
$$Q_2''(x, y)=b_{20}''x^2+b_{11}''xy+b_{02}''y^2.$$

Для вычисления первой ляпуновской величины g, характеризующей устойчивость в критическом случае двух мнимых корней, приводим систему (5) подстановкой

$$\xi=x,\ \ \eta=-\frac{1}{\sqrt{q}}(ax+by),\ (a+d=0) \tag{6}$$

к каноническому виду:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=-\sqrt{q}\,\eta+\overline{P}'(\xi, \eta)\pm\overline{P}''(\xi, \eta),\\ \frac{d\eta}{dt}&=\sqrt{q}\,\xi+\overline{Q}'(\xi, \eta)\pm\overline{Q}''(\xi, \eta),\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\overline{P}'=A_{20}'\xi^2+A_{11}'\xi\eta+A_{02}'\eta^2+\dots,$$
$$\overline{P}''=A_{20}''\xi^2+A_{11}''\xi\eta+A_{02}''\eta^2+\dots,$$
$$\overline{Q}'=B_{20}'\xi^2+B_{11}'\xi\eta+B_{02}'\eta^2+\dots,$$
$$\overline{Q}''=B_{20}''\xi^2+B_{11}''\xi\eta+B_{02}''\eta^2+\dots.$$

Знак плюс в уравнениях (7) берется при $-\frac{1}{b}(\sqrt{q}\,\eta+a\,\xi)>0$, знак минус при $-\frac{1}{b}(\sqrt{q}\,\eta+a\,\xi)<0$.

Коэффициенты системы (7) связаны с коэффициентами системы (5) соотношениями:

$$\begin{aligned}A_{20}'&=\frac{1}{b^2}(b^2a_{20}'-ab_{11}'+a^2a_{02}'),\\ A_{11}'&=\frac{\sqrt{q}}{b^2}(2a\,a_{02}'-ba_{11}'),\\ A_{02}'&=\frac{q}{b^2}\,a_{02}',\\ A_{20}''&=\frac{1}{b^2}(b^2a_{20}''-ab_{11}''+a^2a_{02}''),\\ A_{11}''&=\frac{\sqrt{q}}{b^2}(2a\,a_{02}''-ba_{11}''),\\ A_{02}''&=\frac{q}{b^2}\,a_{02}'',\end{aligned} \tag{8}$$

$$B_{20}'=-\frac{1}{b^2\sqrt{q}}(a^3a_{02}'-a^2ba_{11}'+ab^2a_{20}'+b^3b_{20}'-b^2ab_{11}'+ba^2b_{02}'),$$

$$B'_{11} = \frac{1}{b^2}(aba'_{11} - 2a^2a'_{20} - 2abb'_{02} + b^2b'_{11}),$$

$$B'_{02} = -\frac{\sqrt{q}}{b^2}(aa'_{02} + bb'_{02}),$$

$$B''_{20} = -\frac{1}{b^2\sqrt{q}}(a^3a''_{02} - a^2ba''_{11} + ab^2a''_{20} + b^3b''_{20} - b^2ab''_{11} + ba^2b''_{02}),$$

$$B''_{11} = -\frac{1}{b^2}(aba''_{11} - 2a^2a''_{20} - 2abb''_{02} + b^2b''_{11}),$$

$$B''_{02} = -\frac{\sqrt{q}}{b^2}(aa''_{02} + bb''_{02}).$$

Перейдем теперь в уравнениях (7) к полярным координатам ρ и φ, положив $\xi = \rho\cos\varphi$, $\eta = \rho\sin\varphi$. Исключая время t, систему (7) сведем к уравнению

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho\left[(\overline{P}' \pm \overline{P}'')\cos\varphi + (\overline{Q}' \pm \overline{Q}'')\sin\varphi\right]}{\sqrt{q}\,\rho + (\overline{Q}' \pm \overline{Q}'')\cos\varphi - (\overline{P}' \pm \overline{P}'')\sin\varphi}. \qquad (9)$$

Знак плюс в уравнении (9) берется при $-\frac{1}{b}(\sqrt{q}\sin\varphi + a\cos\varphi) > 0$, знак минус при $-\frac{1}{b}(\sqrt{q}\sin\varphi + a\cos\varphi) < 0$. Представим (9) в виде:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{q}}\left[(\overline{P}' + \overline{P}'')\cos\varphi + (\overline{Q}' + \overline{Q}'')\sin\varphi\right]\left\{1 + \frac{(\overline{P}' + \overline{P}'')\sin\varphi - (\overline{Q}' + \overline{Q}'')\cos\varphi}{\rho\sqrt{q}} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{(\overline{P}' + \overline{P}'')\sin\varphi - (\overline{Q}' + \overline{Q}'')\cos\varphi}{\rho\sqrt{q}}\right)^2 + \ldots\right\}, \quad \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi + \varphi_1, \qquad (9')$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{q}}\left[(\overline{P}' - \overline{P}'')\cos\varphi + (\overline{Q}' - \overline{Q}'')\sin\varphi\right]\left\{1 + \frac{(\overline{P}' - \overline{P}'')\sin\varphi - (\overline{Q}' - \overline{Q}'')\cos\varphi}{\rho\sqrt{q}} + \ldots\right\},$$
$$\pi + \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi + \varphi_1,$$

где *
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{a}{\sqrt{q}},$$

и затем в виде:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R'_2(\varphi)\rho^2 + R'_3(\varphi)\rho^3 + \ldots \qquad (\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi + \varphi_1), \qquad (10)$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R''_2(\varphi)\rho^2 + R''_3(\varphi)\rho^3 + \ldots \qquad (\pi + \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi + \varphi_1). \qquad (11)$$

Здесь $R'_k(\varphi)$ и $R''_k(\varphi)$ — известные в силу уравнений движения периодические функции φ. Решение уравнения (9), определяемое начальными условиями $\rho = \rho_0 > 0$ при $\varphi = \varphi_1$, ищем в виде ряда

$$\rho = \rho_0 u'_1(\varphi) + \rho_0^2 u'_2(\varphi) + \rho_0^3 u'_3(\varphi) + \ldots, \qquad (12)$$

сходящегося для всех φ в промежутке $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi + \varphi_1$ и для всех достаточно малых значений ρ_0. Подставляя выражение (11) в уравнение (9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ_0, получим для определения функций $u'_j(\varphi)$ рекуррентные дифференциальные уравнения

$$\frac{du'_1}{d\varphi} = 0, \quad \frac{du'_2}{d\varphi} = R'_2(\varphi), \quad \frac{du'_3}{d\varphi} = 2u'_2R'_2(\varphi) + R'_3(\varphi)$$

с начальными условиями $u'_1(\varphi_1) = 1$, $u'_j(\varphi_1) = 0$ $(j \neq 1)$, из которых

* Если смена знака происходит на прямой $y = kx$, то $\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{a + kb}{\sqrt{q}}$.

последовательно определим $u'_1(\varphi)$, $u'_2(\varphi)$, $u'_3(\varphi)\ldots$. Для интервала $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi + \varphi_1$

$$u'_2(\varphi) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi} R'_2(\varphi)\, d\varphi,$$

$$\rho_1 = \rho(\varphi_1 + \pi) = \rho_0 u'_1(\varphi_1 + \pi) + \rho_0^2 u'_2(\varphi_1 + \pi) + \ldots \text{ при } \varphi = \varphi_1 + \pi. \quad (13)$$

Решение уравнения (10) для начальных условий (13) ищем также в виде ряда

$$\rho = \rho_1 u''_1(\varphi) + \rho_1^2 u''_2(\varphi) + \rho_1^3 u''_3(\varphi) + \ldots, \quad (14)$$

сходящегося для всех φ в промежутке $\pi + \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi + \varphi_1$ и для всех достаточно малых значений ρ_1. Подставляя (13) в уравнение (10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ_1, для определения функций $u''_j(\varphi)$ получим:

$$\frac{du''_1}{d\varphi} = 0, \quad \frac{du''_2}{d\varphi} = R_2(\varphi), \qquad \frac{du''_3}{d\varphi} = 2u''_2 R''_2(\varphi) + R''_3(\varphi)$$

с начальными условиями

$$u''_1(\pi + \varphi_1) = 1, \quad u''_j(\varphi_1 + \pi) = 0 \ (j \neq 1),$$

из которых последовательно определим $u''_1(\varphi)$, $u''_2(\varphi)$, $u''_3(\varphi)$. Для интервала $\pi + \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi + \varphi_1$

$$u''_2(\varphi) = \int\limits_{\pi+\varphi_1}^{\varphi} R''_2(\varphi)\, d\varphi.$$

При $\varphi = 2\pi + \varphi_1$, согласно (13),

$$\rho_2 = \rho(2\pi + \varphi_1) = \rho_1 u''_1(2\pi + \varphi_1) + \rho_1^2 u''_2(2\pi + \varphi_1) + \rho_1^3 u''_3(2\pi + \varphi_1) + \ldots. \quad (15)$$

Подставим теперь в (14) вместо ρ_1 его выражение из (12). Учитывая, что $u'_1(\pi + \varphi_1) = 1$ и $u''_1(2\pi + \varphi_1) = 1$, представим ρ_2 в виде:

$$\rho_2 = \rho_0 + \alpha_2 \rho_0^2 + \alpha_3 \rho_0^3 + \ldots \quad (16)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha_2 = u'_2(\varphi_1 + \pi) + u''_2(\varphi_1 + 2\pi) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} R'_2(\varphi)\, d\varphi + \int\limits_{\varphi_1+\pi}^{\varphi_1+2\pi} R''_2(\varphi)\, d\varphi,$$

$$\alpha_3 = u'_3(\varphi_1 + \pi) + 2u'_2(\varphi_1 + \pi)\, u''_2(\varphi_1 + 2\pi) + u''_3(2\pi + \varphi_1) =$$

$$= 2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} u'_2 R'_2 d\varphi + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} R'_3 d\varphi + 2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} R'_2 d\varphi \int\limits_{\varphi_1+\pi}^{2\pi+\varphi_1} R''_2 d\varphi +$$

$$+ 2\int\limits_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1} u''_2 R''_2 d\varphi + \int\limits_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1} R''_3 d\varphi.$$

Выражение (16) представляет собой „функцию последования" на отрезке $\varphi = \varphi_1$. Эта функция последования в данной задаче получена путем склейки двух „функций соответствия": одной, для которой φ меняется в интервале $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi + \varphi_1$, и другой, для которой φ меняется в интервале $\pi + \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi + \varphi_1$. Первая ляпуновская величина в данном случае совпадает с коэффициентом α_2 в выражении (16) (из-за склейки α_2 получается отличным от нуля).

Если $\alpha_2 > 0$, то граница области устойчивости будет опасной, если $\alpha_2 < 0$, то безопасной. Вычисление дает для α_2 следующее выражение через коэффициенты преобразований системы:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{q}} \left\{ A''_{20} \left(-3 \sin \varphi_1 - \frac{1}{3} \sin \varphi_1 \right) + \left(A''_{11} + B''_{20} \right) \left(\cos \varphi_1 + \frac{1}{3} \cos 3\varphi_1 \right) + \right.$$
$$\left. + \left(A''_{02} + B''_{11} \right) \left(- \sin \varphi_1 + \frac{1}{3} \sin 3\varphi_1 \right) + B''_{02} \left(3 \cos \varphi_1 - \frac{1}{3} \cos 3\varphi_1 \right) \right\}, \tag{16'}$$

где A''_{02}, A''_{11}, B''_{20}, A''_{02}, B''_{11}, B''_{02} выражаются через коэффициенты исходной системы с помощью формул (8).

Если смена знака происходит на аналитической кривой $y=f(x)$, проходящей через начало координат, то функция последования строится тем же путем, что и в случае, когда склейка имеет место на прямой $y=0$. При этом α_2 будет определяться выражением

$$\alpha_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R'_2(\varphi)\, d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} R''_2(\varphi)\, d\varphi.$$

Пределы интегрирования здесь являются корнями уравнения

$$-\frac{1}{b}\left(\sqrt{q}\,\eta + a\xi\right) - f(\xi) = 0 \tag{A}$$

или

$$-\frac{\rho}{b}\left(\sqrt{q}\sin\varphi + a\cos\varphi\right) - f(\rho\cos\varphi) = 0.$$

В общем случае φ_i здесь будут функциями ρ. Поэтому и α_2 в выражении (А)будет также функцией ρ. Разлагая $\alpha_2(\rho)$ в степенной ряд в окрестности $\rho = 0$

$$\alpha_2(\rho) = (\alpha_2)_0 + \left(\frac{d\alpha_2}{d\rho}\right)_0 \rho + \ldots$$

и подставляя этот ряд в выражение (16), убеждаемся, что следует принять при подсчетах $\alpha_2(\rho) = (\alpha_2)_0$. Последнее равносильно тому, что в окрестности начала координат линия склейки заменяется касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = 0$, $y = 0$.

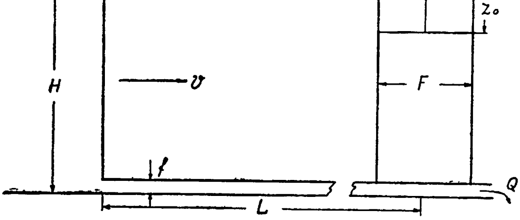

Рис. 1.

Указанные рассуждения распространяются и на случаи, когда $n \neq 0$.

Пример [8].

Исследуем устойчивость стационарных режимов ГЭС с уравнительным резервуаром с сопротивлением. Имеется система, состоящая из бассейна весьма больших размеров, напорной штольни и уравнительного резервуара с сопротивлением (рис. 1). На выходе системы установлен регулятор, поддерживающий мощность гидротурбины постоянной. Движение воды в системе описывается следующими уравнениями:

$$\frac{L}{g}\frac{dv}{dt} + z \pm Pv^2 \pm r\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 0, \tag{17}$$

$$fv = F\frac{dz}{dt} + Q.$$

Здесь z — высота горизонта в башне над статическим уровнем, Q — расход, v — скорость потока в штольне, Pv^2 — потеря напора в штольне, $r\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ — потеря напора в резервуаре, остальные обозначения ясны из чертежа. Индексом нуль будут обозначены величины, соответствующие новому равновесному режиму. Правило знаков следующее: при Pv^2 знак плюс следует брать, когда $v>0$, знак минус, когда $v<0$; при $r\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ знак плюс следует брать, когда $\frac{dz}{dt}>0$, знак минус, когда $\frac{dz}{dt}<0$. К этим уравнениям добавляется условие постоянства мощности

$$N=\gamma\eta Q\left[H+z\pm r\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\gamma\eta_0 Q_0(H+z_0), \tag{18}$$

из которого Q выражается через z и $\frac{dz}{dt}$. Коэффициент полезного действия в дальнейшем считаем постоянным $\eta=\eta_0=\text{const}$.

Введем безразмерные переменные

$$x=\frac{z}{Pv_0^2},\quad y=\frac{v}{v_0},\quad t_1=\varepsilon_1 t$$

и параметры

$$\beta=\frac{Pv_0^2}{H},\quad \varepsilon_0=\frac{gPv_0^2}{Lv_0},\quad \varepsilon_1=\frac{fv_0}{FPv_0^2},\quad \varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1},\quad \alpha=\frac{r}{P}\left(\frac{f}{F}\right)^2.$$

Тогда, учитывая, что

$$v_0 f=Q_0,\quad z_0=-Pv_0^2,$$

представим систему (17) в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt_1}=y-\frac{1-\beta}{1+\beta x\pm\alpha\beta\left(\frac{dx}{dt_1}\right)^2},\\ &\frac{dy}{dt_1}=-\varepsilon\left[x+y^2\pm\alpha\left(\frac{dx}{dt_1}\right)^2\right]\qquad \text{при } y>0,\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt_1}=y-\frac{1-\beta}{1+\beta x\pm\alpha\beta\left(\frac{dx}{dt_1}\right)^2}\qquad \text{при } y<0,\\ &\frac{dy}{dt_1}=-\varepsilon\left[x-y^2\pm\alpha\left(\frac{dx}{dt_1}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{20}$$

(из физических соображений здесь $1+\beta x>0$, $1+\beta x\pm\alpha\beta\left(\frac{dx}{dt_1}\right)^2>0$).

Непосредственное исследование систем (19) или (20) затруднительно, так как дифференциальные уравнения не разрешены относительно производных. Поэтому поступим следующим образом. Обозначим $\frac{dx}{dt_1}=u$. Тогда системы дифференциальных уравнений (19) и (20) запишутся в виде:

$$u=y-\frac{1-\beta}{1+\beta x\pm\alpha\beta u^2},\quad \frac{dy}{dt_1}=-\varepsilon[x\pm y^2\pm\alpha u^2]. \tag{21}$$

Дифференцируя первое из уравнений (21) по t_1 и исключая при помощи уравнений (21) y и $\frac{dy}{dt_1}$, сведем задачу к рассмотрению следующей системы дифференциальных уравнений*:

$$\frac{dx}{dt_1}=u,$$

$$\frac{du}{dt_1}=\frac{(1-\beta)\beta u-\varepsilon\{(x\pm\alpha u^2)(1+\beta x\pm\alpha\beta u^2)^2\pm[u(1+\beta x\pm\alpha\beta u^2)+1-\beta]^2\}}{(1+\beta x\pm\alpha\beta u^2)^2\mp 2\alpha\beta(1-\beta)u}. \qquad (22)$$

Ограничиваясь случаем прямого течения и вводя новое время, представим систему уравнений (22) в виде:

$$\frac{dx}{d\tau}=u[(1+\beta x\pm\alpha\beta u^2)^2\mp 2\alpha\beta(1-\beta)u], \qquad (23)$$

$$\frac{du}{d\tau}=(1-\beta)\beta u-\varepsilon\{(x\pm\alpha u^2)(1+\beta x\pm\alpha\beta u^2)^2+[u(1+\beta x\pm\alpha\beta u^2)+1-\beta]^2\}.$$

Здесь знак плюс при $u>0$ и знак минус при $u<0$. Полагая в (23) $x=-1+\xi$, легко найдем выражения для соответствующих коэффициентов через параметры исходной системы:

$$a=0,\ \ b=(1-\beta)^2,\ \ c=\varepsilon(1-\beta)(3\beta-1),\ \ d=(1-\beta)[\beta-2\varepsilon(1-\beta)],$$

$$a'_{20}=0,\ \ a'_{11}=2\beta(1-\beta),\ \ a'_{02}=0,$$

$$a''_{20}=0,\ \ a''_{11}=0,\ \ a''_{02}=-2\alpha\beta(1-\beta),$$

$$b'_{20}=\varepsilon\beta(3\beta-2),\ \ b'_{11}=-2\varepsilon\beta(1-\beta),\ \ b'_{02}=-\varepsilon(1-\beta)^2,$$

$$b''_{20}=0,\ \ b''_{11}=0,\ \ b''_{02}=\varepsilon\alpha(1-\beta)(3\beta-1).$$

Условия Раута — Гурвица будут следующими:

$$R=p=-(a+d)=(1-\beta)[2\varepsilon(1-\beta)-\beta]>0,\quad \text{откуда}\quad \varepsilon>\frac{\beta}{2(1-\beta)},$$

$$q=ad-bc=\varepsilon(1-\beta)^3(1-3\beta)>0,\quad \text{откуда}\quad \beta<\frac{1}{3}.$$

Характеристическое уравнение имеет два мнимых корня, когда $R=0$, т. е. когда $\varepsilon=\frac{\beta}{2(1-\beta)}$.

С помощью формул (8) находим:

$$A''_{20}=0,\quad A''_{11}=0,\quad A''_{02}=-\frac{\alpha\beta^2(1-3\beta)}{1-\beta},$$

$$B''_{20}=0,\quad B''_{11}=0,\quad B''_{02}=\frac{\sqrt{q}\,\alpha\varepsilon(1-3\beta)}{1-\beta}.$$

Далее, так как $a=0$, то $\varphi_1=0$. Тогда по формуле (16′) находим:

$$\alpha_2=\frac{4}{3}\frac{\alpha\beta(1-3\beta)}{(1-\beta)^2}>0.$$

Следовательно, граница области устойчивости является опасной.

ДОПОЛНЕНИЕ

Если характеристическое уравнение имеет один нулевой корень, то исследование устойчивости невозмущенного движения, согласно Ляпунову ([7] § 28, 29), сводится к задаче об устойчивости нулевого решения

$$x=0,\ x_1=0,\dots,\ x_n=0$$

* Здесь считаем $(1+\beta x\pm\alpha\beta u^2)^2\mp 2\alpha\beta(1-\beta)u>0$, что практически единственно важно.

следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = X, \tag{I}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s \quad (s = 1,2, \ldots n),$$

где коэффициенты p_{sk} таковы, что уравнение

$$\Delta(\chi) = \begin{vmatrix} p_{11} - \chi & p_{12}, \cdots & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22} - \chi \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots & p_{nn} - \chi \end{vmatrix} = 0$$

имеет все корни с отрицательными вещественными частями, а X, X_s суть голоморфные функции величин x, x_s, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. В простейшем случае функцию X можно представить в виде:

$$X = gx^2 + Px + Q + R, \tag{II}$$

где P — линейная форма и Q — квадратичная форма величин x_s, а R — голоморфная функция переменных x, x_s, разложение которой не содержит членов ниже третьей степени.

Согласно Ляпунову, если составить функцию

$$V = x + Ux + W,$$

где U — линейная, а W — квадратичная формы величин x_s с неопределенными коэффициентами, то всегда можно подобрать функции U и W так, чтобы производная $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений (I) была знакоопределенной функцией. Если система дифференциальных уравнений является склеенной, то в качестве дополнительного (достаточного) условия примем непрерывность членов Px и Q в выражении (II). На линии склейки тогда по-прежнему (несмотря на склейку) можно будет построить функцию V со знакоопределенной производной и распространить на склеенную систему теорему 3 работы [1], определяющую поведение динамической системы вблизи границы устойчивости в случае характеристического уравнения с одним нулевым корнем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, 1949.
2. А. И. Лурье, ПММ, 1950, 14, 371—382.
3. М. А. Айзерман, ПММ, 1950, 14, 444—448.
4. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, гл. IV, Гостехиздат, 1951.
5. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, 44, 74, Гостехиздат, 1952.
6. В. А. Троицкий, ПММ, 1953, 17, 6, 673— 684.
7. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.
8. Г. В. Аронович, Устойчивость колебаний горизонта в уравнительном резервуаре с сопротивлением, Сборник памяти А. А. Андронова, АН СССР, 1955.

Исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 23 декабря 1957 г.