

## О РАЗБИЕНИИ НА ТРАЕКТОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Л. Н. Белюстина

В работе даются некоторые предложения качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости применительно к случаю разбиения цилиндра на траектории. Указывается ряд приемов, облегчающих исследование конкретных систем с цилиндрической фазовой поверхностью.

Предположим, что рассматриваемая динамическая система описывается системой уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = Q(\varphi, y), \quad \frac{d\varphi}{dt} = P(\varphi, y), \quad (1)$$

где функции  $P(\varphi, y)$  и  $Q(\varphi, y)$  периодические по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , и фазовым пространством таких динамических систем является цилиндрическая поверхность. К системам такого вида приводит (см., например, [1]) ряд физических задач, представляющих существенный интерес: задача о колебаниях маятника, динамика синхронных машин, динамика полета самолета и др.

Будем считать  $\varphi$  и  $y$  прямоугольными координатами на цилиндрической фазовой поверхности, функции  $Q(\varphi, y)$  и  $P(\varphi, y)$  предполагаем аналитическими для всех значений  $\varphi$  и  $y$ . Наряду с системой (1) будем рассматривать одно уравнение

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{Q(\varphi, y)}{P(\varphi, y)}, \quad (2)$$

которое получается из системы (1) при исключении  $t$ . Основные теоремы о поведении траекторий, доказанные в [1] для фазовой плоскости, справедливы и на цилиндре. Эти теоремы позволяют установить характер возможных совокупностей предельных траекторий для одной полутраектории на цилиндрической фазовой поверхности.

На цилиндрической фазовой поверхности, помимо замкнутых кривых, лежащих на поверхности цилиндра и не охватывающих самого цилиндра (такие кривые вполне аналогичны замкнутым траекториям на фазовой плоскости), может существовать другой тип замкнутых кривых, охватывающих не состояние равновесия, а сам цилиндр.

Положительная полутраектория может иметь множество предельных точек одного из следующих четырех типов:

I—одно состояние равновесия;

II—одна замкнутая кривая, охватывающая состояние равновесия;

III—одна замкнутая кривая, охватывающая цилиндр;

IV—совокупность состояний равновесия и траекторий, соответствующих движениям, асимптотически стремящимся к состояниям равновесия как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ .

При этом совокупность предельных траекторий может охватывать либо не охватывать цилиндр. Характер предельных множеств определяет возможные виды положительных полутраекто-

рий. Такая полутраектория либо: 1) состояние равновесия; 2) замкнутая траектория, охватывающая состояние равновесия; 3) замкнутая траектория, охватывающая цилиндр; 4) асимптотическая к состоянию равновесия; 5) асимптотическая к замкнутой траектории, охватывающей состояние равновесия; 6) асимптотическая к замкнутой траектории, охватывающей цилиндр; 7) стремящаяся к предельному множеству типа IV, не охватывающему цилиндр; 8) стремящаяся к предельному множеству типа IV, охватывающему цилиндр.

Примеры полутраекторий вида 7) и 8) изображены на рис. 1 и рис. 2. На рис. 1 полутраектория  $L$  стремится к предельному множеству типа IV, не охватывающему цилиндр и состоящему из одного состояния равновесия (седла) и двух незамкнутых траекторий, асимптотически стремящихся к нему, как для  $t \rightarrow +\infty$ , так и для  $t \rightarrow -\infty$ . На рис. 2 полутраектория  $L$  стремится к предельному множеству типа IV, охватывающему цилиндр и состоящему из двух состояний равновесия (седел) и двух незамкнутых траекторий, асимптотических к этим состояниям равновесия, как для  $t \rightarrow +\infty$ , так и для  $t \rightarrow -\infty$ .

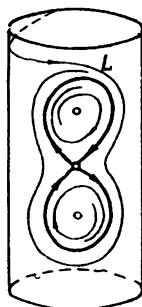


Рис. 1.

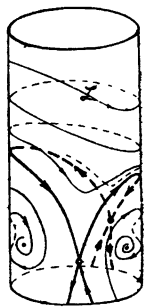


Рис. 2.

Качественную картину системы (1) на цилиндре, как и в случае фазовой плоскости, определяют орбитно-неустойчивые траектории [1, 2]: состояния равновесия, сепаратрисы и предельные циклы. Однако, при этом, предельным циклом на цилиндре, охватывающим состояние равновесия, так же как и на плоскости, соответствуют периодические движения по  $t$ . Предельным же циклом, охватывающим цилиндр, не соответствует периодических движений по  $t$ , так как для цикла  $y = y(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  с периодом  $T$ , охватывающего цилиндр,  $y(t + T) = y(t)$ , а  $\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi$ . Предельным циклом, охватывающим цилиндр, соответствуют периодические, с периодом  $2\pi$ , решения уравнения (2), т. е. решения  $y = y(\varphi)$ , для которых  $y(\varphi + 2\pi) = y(\varphi)$ .

## 1. ГРУБЫЕ СИСТЕМЫ НА ЦИЛИНДРЕ

Пусть мы имеем на цилиндрической фазовой поверхности область  $G$ , заключенную между двумя циклами без прикосновения, охватывающими цилиндр.

В области  $G$ , наряду с системой (1), рассмотрим измененную систему:

$$\frac{d\varphi}{dt} = P(\varphi, y) + p(\varphi, y) \equiv \bar{P}(\varphi, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(\varphi, y) + q(\varphi, y) \equiv Q(\varphi, y). \quad (3)$$

Определение „грубой“ системы, в отличие от систем „негрубых“, данное в работе [3] (см. также [1]) для области  $G$  фазовой плоскости, остается справедливым и на цилиндре.

Требование грубости накладывает ограничения на характер возможных траекторий в области  $G$ .

Сформулируем необходимые и достаточные условия грубости системы на цилиндре. Грубая система в области цилиндрической фазовой поверхности может иметь:

1. Только простые состояния равновесия, для которых действительные части корней характеристического уравнения отличны

от нулей. Или иначе: в области  $G$  система (1) не может иметь состояний равновесия  $(\varphi_0, y_0)$ , для которых

$$а) \quad \Delta = \begin{vmatrix} P'_\varphi(\varphi_0, y_0), & P'_y(\varphi_0, y_0) \\ Q'_\varphi(\varphi_0, y_0), & Q'_y(\varphi_0, y_0) \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

б) для которых при  $\Delta > 0$   $\sigma = [P'_\varphi(\varphi_0, y_0) + Q'_y(\varphi_0, y_0)] = 0$ .

2. Только простые предельные циклы, охватывающие состояния равновесия, т. е. только такие периодические движения, для которых характеристический показатель не равен нулю. Или иначе: в области  $G$  система (1) не может иметь периодических движений  $\varphi = \chi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\chi(t + \tau) = \chi(t)$ ,  $\psi(t + \tau) = \psi(t)$ , для которых

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{P'_\varphi[\chi(t), \psi(t)] + Q'_y[\chi(t), \psi(t)]\} dt = 0. \quad (5)$$

3. Только простые предельные циклы, охватывающие цилиндр, т. е. система (1) не может иметь движений  $\varphi = \chi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\chi(t + T) = \chi(t) + 2\pi$ ,  $\psi(t + \tau) = \psi(t)$ , для которых удовлетворяется равенство (5). Уравнение (2) не может иметь периодических решений  $y = f(\varphi)$ , для которых  $P(x, y) \neq 0$  и

$$h^* = \frac{\int_0^{2\pi} \{P'_\varphi[\varphi, f(\varphi)] + \theta'_y[\varphi, f(\varphi)]\} P^{-1}[\varphi, f(\varphi)] d\varphi}{\int_0^{2\pi} P^{-1}[\varphi, f(\varphi)] d\varphi}. \quad (6)$$

4. В области  $G$  не может быть сепаратрис (усов седла), идущих из седла в седло.

Таким образом, в грубой системе невозможны предельные движения типа IV, представленные на рис. 1 и рис. 2.

Предельными траекториями в грубой системе на цилиндре могут быть только простые состояния равновесия и простые предельные циклы, охватывающие либо состояние равновесия, либо цилиндр.

## 2. СИСТЕМЫ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ НЕГРУБОСТИ И ОСНОВНЫЕ БИФУРКАЦИИ НА ЦИЛИНДРЕ

Напомним, что значение  $\lambda = \lambda_0$  называется бифуркационным<sup>[1]</sup> значением параметра, если найдутся сколь угодно близкие к  $\lambda_0$  значения параметра  $\lambda$ , для которых качественная картина разбиения фазовой поверхности на траектории отлична от такой же картины, соответствующей  $\lambda = \lambda_0$ . Нетрудно видеть, что для бифуркационных значений параметра система не может быть грубой.

Консервативные системы представляют пример негрубых систем. При изменении параметра в динамической системе мы переходим от одной грубой системы к другой качественно отличной грубой системе через негрубые системы.

Рассмотрим на цилиндре простейший тип негрубых систем, именно, системы первой степени\* негрубости, определение которых для фазовой плоскости дано в работе [4]. Эти системы являются релятивно грубыми по отношению к множеству негрубых систем и на цилиндре имеют, с очевидными изменениями, те же аналитические характеристики, что и на плоскости.

\* Тип таких негрубых систем имеет фундаментальное значение при рассмотрении динамических систем во многих физических задачах.

Перечислим основные бифуркации на цилиндре при негрубости первой степени и проиллюстрируем их на рисунках. Аналитические характеристики  $\sigma$ ,  $\Delta$ ,  $h$ ,  $\alpha_3$ ,  $P_2(1, k)$ ,  $h_2$  негрубых орбитно-неустойчивых траекторий, приведенные ниже, даны в работе [4].

1) Сложный фокус первого порядка (рис. 3а). Геометрически, как это видно из рис. 3а, сложный фокус не отличается от простого, его особенность имеет аналитический характер, а именно, для сложного фокуса  $(\varphi_0, y_0)$  при  $\Delta > 0$

$$\sigma = [P'_\varphi(\varphi_0, y_0) + Q'_y(\varphi_0, y_0)] = 0$$

(см. (4)) и  $\alpha_3 \neq 0$ .

2) Двукратное сложное состояние равновесия типа седло-узел (рис. 4а, 5а). Особенность этого состояния равновесия имеет как геометрический характер (рис. 4а, 5а, 6а), так и аналитический, а именно, для него  $\Delta = 0$  (см. (4)),  $\sigma \neq 0$ ,  $P_2(1, k) \neq 0$ .

3) Двойной предельный цикл, охватывающий состояние равновесия (рис. 7а). Характеристический показатель цикла  $h$  (см. (5)) равен нулю,  $h_2 \neq 0$ .

4) Двойной предельный цикл, охватывающий цилиндр (рис. 8а). Для него характеристический показатель  $h$  равен нулю,  $h_2 \neq 0$ .

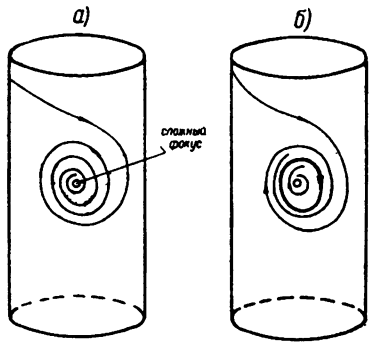


Рис. 3.

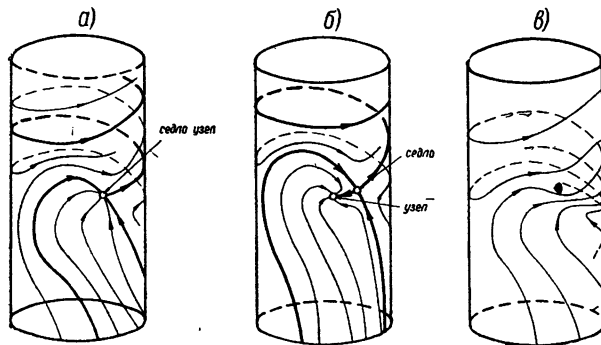


Рис. 4.

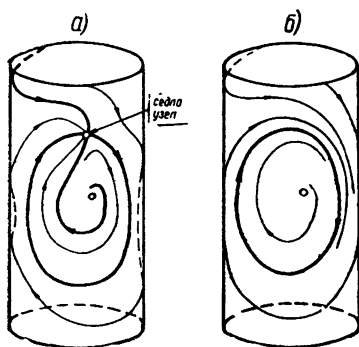


Рис. 5.

(рис. 4в). При исчезновении

5) Сепаратриса, идущая из седла в другое седло (рис. 9а).

6) Сепаратриса, идущая из седла в то же самое седло и образующая петлю, охватывающую состояние равновесия (рис. 11а).

7) Сепаратриса, идущая из седла в то же самое седло и образующая петлю, охватывающую цилиндр (рис. 10а).

Аналитическая характеристика случаев 6) и 7) заключается в том, что седловая величина  $\sigma$  седла  $(\varphi_0, y_0)$  отлична от нуля  $[\sigma = P'_\varphi(\varphi_0, y_0) + Q'_y(\varphi_0, y_0)]$ .

При переходе параметра [5] через бифуркационное значение система может опять сделаться грубой\*: сложный фокус может стать простым, изменяя при этом устойчивость и породив предельный цикл (рис. 3б). Сложное состояние равновесия типа седло-узел может или разбиться на два простых — седло и узел (рис. 4б), или исчезнуть

\* В пространстве параметров при этом мы имеем простое (некратное) пересечение множества бифуркационных значений параметров.

седло-узел, представленного на рис. 5а и 6а, может появиться единственный предельный цикл, охватывающий либо состояние равновесия (рис. 5б), либо цилиндр (рис. 6б) в зависимости от того, охватывает полусепаратриса седло-узла состояние равновесия или цилиндр\*. Двойной цикл может либо разделиться на два (рис. 7б, 8б), либо исчезнуть (рис. 7в, 8в). Сепаратриса, идущая из

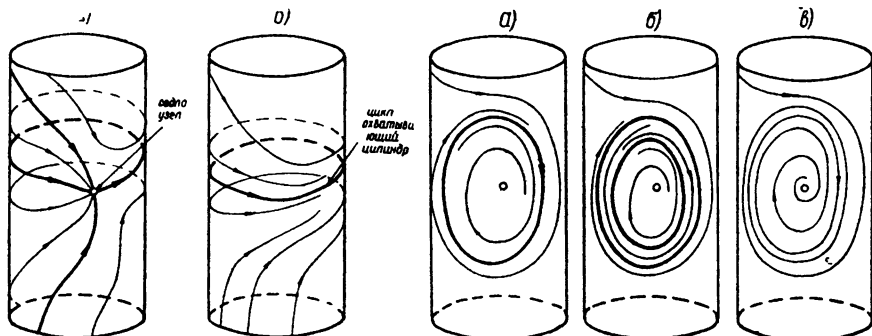


Рис. 6.

Рис. 7.

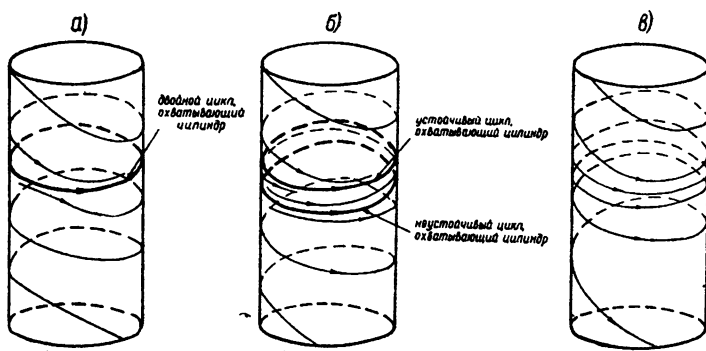


Рис. 8.

седла в другое седло, распадается на две полусепаратрисы, взаимное расположение которых определяет области различного поведения траекторий (рис. 9б, 9в). Из сепаратрисы, идущей из седла в то же седло (т. е. из петли сепаратрисы), может появиться единственный цикл, охватывающий состояние равновесия (рис. 10б), если петля сепаратрисы охватывала состояние равновесия, либо охватывающий цилиндр (рис. 10б), если петля сепаратрисы охватывала цилиндр\*\*.

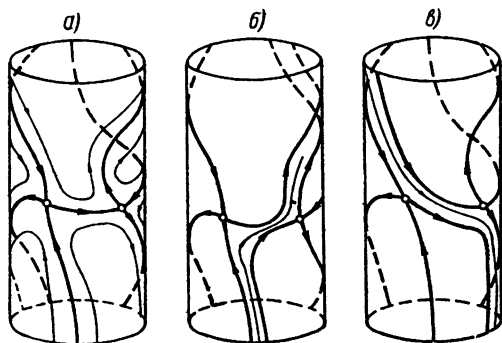


Рис. 9.

Остановимся более подробно на характере устойчивости цикла, появляющегося из петли сепаратрисы, поскольку это имеет существенное значение для приложений (см., например, [8]).

\* Согласно [5] предельный цикл может появиться при исчезновении сложного состояния равновесия типа седло-узел только в том случае, когда одна из полусепаратрис седло-узла стремится к нему как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$  (рис. 5а и 6а).

\*\* Рассмотрение перечисленных выше бифуркаций на цилиндре фундаментально способствовало исследованию конкретных систем в работах [6-10].

Устойчивость петли сепаратрисы определяется [11] знаком седловой величины

$$\sigma = P'_\varphi(\varphi_0, y_0) + Q'_y(\varphi_0, y_0) \quad (7)$$

седла  $(\varphi_0, y_0)$  следующим образом: при  $\sigma > 0$  — петля неустойчива, при  $\sigma < 0$  — петля устойчива. В случае негрубости системы порядка выше первого замкнутый контур, составленный из нескольких сепаратрис и седел системы (если такой контур допускается си-

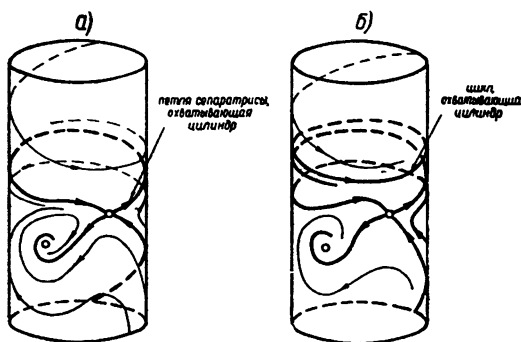


Рис. 10.

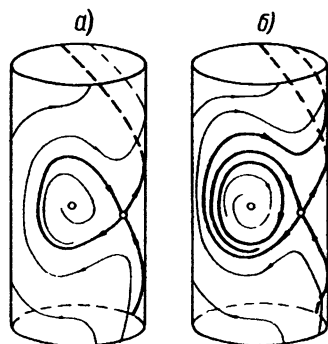


Рис. 11.

стемой), неустойчив, когда седловые величины (см. [7]) *всех* седел, входящих в контур, положительны, устойчив, когда седловые величины *всех* седел отрицательны. Если при разрушении петли сепаратрисы или замкнутого контура, составленного из сепаратрис, родится предельный цикл, то, как это следует из работы [7], он будет единственным, если седловые величины *всех* седел, входящих в контур, отличны от нуля и одного знака. При этом, из неустойчивого контура родится неустойчивый цикл, из устойчивого контура устойчивый цикл. Из петли сепаратрисы седла  $(\varphi_0, y_0)$  может родиться два или более циклов, если седловая величина этого седла равна нулю.

### 3. ПРИЕМЫ, ОБЛЕГЧАЮЩИЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Согласно результатам [12] для фазовой плоскости, исследование конкретных систем на цилиндре сводится к определению схемы, определяющей качественную картину траекторий этой системы, т. е. к изучению определяющих ее орбитно-неустойчивых траекторий. При таком изучении наибольшую трудность представляет определение расположения предельных циклов и сепаратрис.

Рассмотрение перечисленных выше бифуркаций системы в ряде случаев позволяет найти как возможные качественные картины траекторий системы, так и границы соответствующих им областей пространства параметров. Бифуркации системы, связанные с появлением предельного цикла, охватывающего состояние равновесия, из сложного фокуса, могут быть детально изучены на основании результатов работ [5, 13] (см. также [1, 14]). При этом, в тех случаях, когда координаты  $(\varphi_0, y_0)$  сложного фокуса системы (1) представлены в явном виде как функции параметров системы, равенство  $\sigma = [P'_\varphi(\varphi_0, y_0) + Q'_y(\varphi_0, y_0)] = 0$ , означающее, что фокус  $(\varphi_0, y_0)$  меняет устойчивость, выделяет в пространстве параметров множество искомых бифуркационных значений. Прием рассмотрения последовательности бифуркаций системы наиболее эффективен

в тех случаях, когда с возрастанием (уменьшением) одного из параметров системы векторное поле\* системы (1) в исследуемой области фазовой поверхности поворачивается в одном направлении. В таких случаях (см., например, [8, 10]) удается установить все бифуркации системы и определить соответствующие им значения параметров.

Для отыскания и оценки расположения предельных циклов, охватывающих цилиндр, так же как для предельных циклов на плоскости, не существует сколь-нибудь общих методов. Однако в конкретных случаях для этой цели могут служить некоторые частные соображения, позволяющие однозначно решить поставленный вопрос. Приведем некоторые из этих соображений. Начнем с наиболее элементарных из них.

Равенства нулю правых частей системы (1)  $Q(\varphi, y) = 0$  или  $P(\varphi, y) = 0$  дают соответственно уравнения изоклины горизонтальных и изоклины вертикальных наклонов.

Рассмотрим случай, когда ординаты изоклины горизонтальных наклонов  $Q(\varphi, y) = 0$  ограничены. В силу периодичности по  $\varphi$  правых частей системы (1), кривая  $Q(\varphi, y) = 0$  будет иметь по крайней мере одну точку максимума или минимума.

Пусть точки максимума изоклины горизонтальных наклонов имеют ординаты  $y_i = M_i$  и точки минимума — ординаты  $y_i = m_i$ . Обозначим через  $M$  наибольшее из  $M_i$  и через  $m$  наименьшее из  $m_i$ . Ординаты предельных циклов, охватывающих цилиндр, а также ординаты циклов, охватывающих состояние равновесия, необходимо удовлетворяют неравенствам:  $m \leq y \leq M$ .

Действительно, в частях  $y > M$ ,  $y < m$  фазовой поверхности (на рис. 12 поверхность цилиндра представлена развернутой на плоскость) замкнутая траектория не может иметь точек, так как в этих частях цилиндра для всех  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) траектория не имеет ни максимума, ни минимума и, следовательно, не может замкнуться.

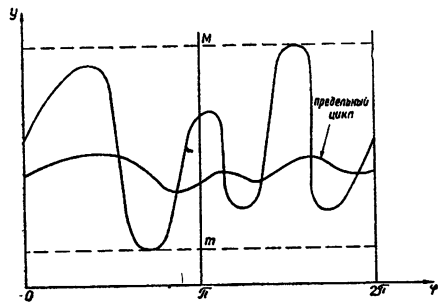


Рис. 12.

Отсюда следует, что предельный цикл может существовать и в том случае, когда система не имеет ни одного состояния равновесия. Таким образом, критерий отсутствия предельных циклов на фазовой плоскости, заключающийся в том, что не существует замкнутых фазовых траекторий системы, если у системы нет состояний равновесия, справедлив на цилиндре только для циклов, охватывающих состояние равновесия. Для того, чтобы обнаружить наличие периодических решений,

охватывающих цилиндр, можно, например, воспользоваться следующим признаком. Если существуют два таких частных решения  $y_1(\varphi)$  и  $y_2(\varphi)$ , что при любом  $\varphi_0$  выполняются неравенства

$$y_1(\varphi_0 + 2\pi) \geq y_1(\varphi_0), \quad y_2(\varphi_0 + 2\pi) \leq y_2(\varphi_0),$$

и если между интегральными кривыми, соответствующими этим решениям, нет состояний равновесия, то в силу непрерывной зависимости решений от начальных условий можно утверждать, что между  $y_1(\varphi)$  и  $y_2(\varphi)$  существует периодическое решение, для которого  $y_1(\varphi_0 + 2\pi) = y_2(\varphi_0)$ .

\* О повороте векторного поля системы см. ниже.

При рассмотрении вопроса о существовании предельных циклов системы оказываются весьма полезными некоторые приемы, связанные с критерием Бендиксона — Дюляка.

#### 4. КРИТЕРИЙ БЕНДИКСОНА — ДЮЛЯКА НА ЦИЛИНДРЕ

Для доказательства отсутствия у конкретного уравнения вида (2) предельных циклов, охватывающих состояния равновесия, а также для установления единственности предельного цикла, охватывающего цилиндр, может быть использован критерий Бендиксона — Дюляка [15].

Этот критерий для цилиндрической фазовой поверхности может быть применен следующим образом. Для дифференциального уравнения (2) составляем выражение

$$I \equiv \int_C FPdy - FQd\varphi = \iint_D \left[ \frac{\partial(FP)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(FQ)}{\partial y} \right] d\varphi dy,$$

где  $F(\varphi, y)$  — некоторая однозначная и дифференцируемая функция и  $C$  — произвольная кусочно-гладкая кривая, ограничивающая односвязную область  $D$ , и пусть при этом в области  $G$  фазовой поверхности

$$I \equiv \iint_D \left[ \frac{\partial(FP)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(FQ)}{\partial y} \right] d\varphi dy \neq 0. \quad (8)$$

Тогда уравнение (2) в области  $G$  не имеет предельных циклов, охватывающих состояния равновесия, и не может иметь более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр. Действительно, если бы уравнение (2) имело замкнутые интегральные кривые, лежащие на поверхности цилиндра, но не охватывающие цилиндр, то криволинейный интеграл обращался бы в нуль на этих кривых, что невозможно в силу (8), если бы уравнение (2) имело более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр, то мы имели бы замкнутый контур  $C$ , составленный из пары циклов и проходимо дважды (в различных направлениях) отрезка между ними на некоторой прямой  $\varphi = \varphi_0$ . Криволинейный интеграл  $I$  по этому контуру должен быть равен нулю, что невозможно в силу (8).

Очевидно, что неравенство (8) выполняется, если в области  $G$

$$B \equiv \frac{\partial(FP)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(FQ)}{\partial y} \neq 0. \quad (9)$$

В работах [9, 10], посвященных исследованию уравнений синхронных машин, доказано отсутствие предельных циклов, охватывающих состояния равновесия, и единственность предельного цикла, охватывающего цилиндр, исходя из выполнения неравенства (9) на всей фазовой поверхности. Единственность предельного цикла, охватывающего цилиндр, у уравнения Трикоми (доказательство этого имеется в работе [16]) следует при этом как частный случай.

В отдельных задачах критерий Бендиксона — Дюляка может быть использован для выделения областей тех значений параметров, при которых на цилиндре не существует предельных циклов, охватывающих состояния равновесия, и не может быть более одного цикла, охватывающего цилиндр.

Действительно, пусть из некоторых соображений, вытекающих из расположения орбитно-неустойчивых траекторий, следует, что предельные циклы рассматриваемой системы могут лежать лишь в



некоторой области  $g$  цилиндрической поверхности, и при параметрах, удовлетворяющих некоторым неравенствам ( $A$ ), в этой области  $g$  выполняется неравенство (9) (а, стало быть, и неравенство (8)). Тогда, при значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам ( $A$ ) (эти неравенства и выделяют соответствующие области в пространстве коэффициентов), рассматриваемая система на всей фазовой поверхности не имеет предельных циклов, охватывающих состояния равновесия, и не может иметь более одного цикла, охватывающего цилиндр.

Этот прием использования критерия Бендиксона—Дюляка неоднократно применен в задаче о симметричном полете самолета [21, 8].

В [8], при значениях параметров, удовлетворяющих некоторым неравенствам, функция  $B$  (см. (9)) обращается в нуль на прямой, которая расположена в той части цилиндра, где не может быть циклов. Эти неравенства определяют область пространства параметров, для которых система не имеет циклов, ибо там, где можно было ожидать их существование, выполнено условие (9), а следовательно, и условие (8).

### 5. ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СРАВНЕНИЯ

Для оценки расположения орбитно-неустойчивых траекторий весьма существенное значение имеют приемы, использующие топографические системы и дифференциальные уравнения сравнения. Для оценки расположения предельных циклов может быть использован метод контактной кривой, являющейся геометрическим местом точек прикосновения кривых топографической системы с интегральными кривыми.

Топографическая система  $F(\varphi, y) = C$  на цилиндре может быть системой замкнутых непересекающихся кривых, либо охватывающих, либо не охватывающих цилиндр. Предположим, что топографическая система выбрана так, что кривая контактов замкнута; проведем наибольшую и наименьшую кривые топографической системы (кривые с наибольшей и наименьшей ординатой в том случае, когда кривые охватывают цилиндр), касающиеся кривой контактов. Все кривые топографической системы, лежащие вне (выше) такой наибольшей (наивысшей) кривой и внутри (ниже) наименьшей (наинизшей) кривой, будут, очевидно, циклами без контакта. Следовательно, если предельные циклы существуют, то они расположены в кольцеобразной области, ограниченной двумя кривыми. Достаточным условием существования по крайней мере одного цикла будет условие, чтобы вектор скорости на обеих кривых был направлен или везде наружу, или везде внутрь соответствующей кольцеобразной области. В методах, использующих дифференциальные уравнения сравнения, роль кривых без контакта для системы (1) могут выполнять траектории определенных систем сравнения. Системы

$$\dot{\varphi} = P_1(\varphi, y), \quad \dot{y} = Q_1(\varphi, y)$$

и

$$\dot{\varphi} = P_2(\varphi, y), \quad \dot{y} = Q_2(\varphi, y),$$

на всей фазовой поверхности или на ее части сравнимые с системой (1), удовлетворяют там неравенствам:

$$\frac{Q_1(\varphi, y)}{P_1(\varphi, y)} < \frac{Q(\varphi, y)}{P(\varphi, y)} < \frac{Q_2(\varphi, y)}{P_2(\varphi, y)}. \quad (10)$$

Эти неравенства могут быть использованы для оценки расположения не только предельных циклов, но и сепаратрис системы.

Таким образом могут быть оценены области притяжения предельных траекторий. В зависимости от типа конкретной задачи и цели исследования, которая при этом ставится, может оказаться полезным как сравнение с определенным уравнением, выбранным из каких-либо соображений, так и сравнение с уравнениями, которые строятся для исследуемого уравнения определенным способом. Для уравнения

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\Phi(\varphi, y)}{y},$$

к которому сводится неполное дифференциальное уравнение второго порядка, систему сравнения можно строить методом Чаплыгина [17], подставляя в правую часть функции  $y_i = f_i(\varphi)$  мажорирующие искомые кривые, а также методом Ельшина [18, 19], где система сравнения получается путем построения (в отдельных частях плоскости) линейных или других интегрируемых систем, удовлетворяющих условиям сравнения.

Таким образом, путем элементарного построения траекторий системы сравнения можно заключить сепаратрисы системы (1) в вилки из соответствующих траекторий систем сравнения.

Однако построение этими методами более точных приближений требует хотя и элементарных, но громоздких вычислений. Сравнение с определенным уравнением\*, ограничивая, как правило, степень получаемого для траекторий приближения, имеет свои преимущества при установлении зависимости характера фазовых траекторий от параметров системы. В частности, приемы, использующие сравнения с определенным уравнением, могут быть использованы для определения в пространстве параметров областей с различными качественными картинами\*\*.

## 6. МЕТОДЫ, СВЯЗАННЫЕ С НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ ПОВОРОТА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим некоторые частные случаи добавок к правым частям системы (1). Синус угла  $\alpha$  между направлением векторного поля системы (1) и направлением векторного поля системы (3) определяется выражением

$$\sin \alpha = \frac{Q\bar{P} - P\bar{Q}}{\sqrt{P^2 + Q^2} \sqrt{\bar{P}^2 + \bar{Q}^2}}.$$

Очевидно, что в точках, где  $Q\bar{P} - P\bar{Q} > 0$ , угол  $\alpha$  положителен, в точках, где  $Q\bar{P} - P\bar{Q} < 0$ , этот угол отрицателен и в точках, где  $Q\bar{P} - P\bar{Q} = 0$ , направления полей рассматриваемых систем либо совпадают ( $\alpha = 0$ ), либо прямо противоположны ( $\alpha = \pi$ ) так, что в этих точках траектории рассматриваемых систем касаются друг друга. Рассмотрим добавки следующего вида:

$$p = \mu Q, \quad q = \mu P,$$

где  $\mu$  — параметр.

В этом случае, в каждой точке направление поля измененной

\* Для сравнения не на всей фазовой поверхности могут быть использованы системы, не удовлетворяющие всем условиям, указанным в [18].

\*\* Методом сравнения с определенным уравнением в [8, 9, 10] в пространстве параметров определены области, для точек которых существуют, а также области, для точек которых не существуют предельные циклы системы.

системы образует с направлением поля системы (1) один и тот же постоянный угол, синус которого

$$\sin \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Таким образом, рассмотренные добавки дают поворот поля на постоянный угол, при этом измененная система имеет состояния равновесия в тех, и только тех, точках, что и система (1). В конкретных задачах большое применение имеет рассмотрение поворота векторного поля системы в зависимости от изменения параметров системы. Пусть система (1) зависит от параметра  $\lambda$ . Пусть с изменением параметра  $\lambda$  векторное поле системы (1) поворачивается. Направление поворота поля, соответствующее изменению параметра  $\lambda$  от  $\lambda = \lambda_1$  до  $\lambda = \lambda_2$ , определяется знаком выражения:

$$R = \left( \frac{dy}{d\varphi} \right)_{\lambda=\lambda_1} - \left( \frac{dy}{d\varphi} \right)_{\lambda=\lambda_2} = \frac{Q_1 P_2 - Q_2 P_1}{P_1 P_2}, \quad (11)$$

где  $P_1$ ,  $Q_1$  и  $P_2$ ,  $Q_2$  — правые части системы (1) соответственно при  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$ .

В точке  $(\varphi, y)$  направление поля системы при  $\lambda = \lambda_1$  образует с направлением поля системы при  $\lambda = \lambda_2$  угол  $z$ , для которого

$$\operatorname{tg} z = \frac{Q_1 P_2 - P_1 Q_2}{P_1 P_2 + Q_1 Q_2}.$$

Угол  $z$  является функцией координат точки и параметров системы и может быть непостоянным как по знаку, так и по величине. Будем говорить, что векторное поле системы (1) поворачивается по часовой стрелке, если разность, определяемая равенством (11), удовлетворяет неравенству  $R < 0$ , и против часовой стрелки, если  $R$  удовлетворяет неравенству  $R > 0$ .

Система (1) при  $\lambda = \lambda_1$  может быть принята за сравнимую систему для системы (1) при  $\lambda = \lambda_2$  при рассмотрении качественной картины в той части фазовой поверхности, где выполняется одно из неравенств для  $R$ . Сравнение полей при разных значениях параметра может дать указание на бифуркации системы, которые имеют место при непрерывном изменении этого параметра.

Пусть при изменении параметра  $\lambda$  координаты седла системы (1) остаются неизменными, а поле поворачивается по часовой стрелке. Пусть, далее, на некотором отрезке без контакта  $l$  расстояние  $r_1$  между сепаратрисами  $S_1$  и  $S_2$  при  $\lambda = \lambda_1$  удовлетворяет неравенству  $r_1 > 0$ , а при  $\lambda = \lambda_2$  удовлетворяет неравенству  $r_1 < 0$ . Расположение сепаратрис в этих случаях представлено соответственно на рис. 13а и рис. 13в. Тогда, в силу непрерывности изменения поля системы при непрерывном изменении параметра  $\lambda$  от значения  $\lambda = \lambda_1$  до значения  $\lambda = \lambda_2$ , необходимо найдется единственное бифуркационное значение параметра  $\lambda^*$ , при котором  $r_1 = 0$ , т. е. сепаратрисы  $S_1$  и  $S_2$  совпадают. Расположение сепаратрис при этом представлено на рис. 13б. Такой прием сравнения полей при разных значениях параметра используется, например, при установлении бифуркаций системы в [8, 9, 10].

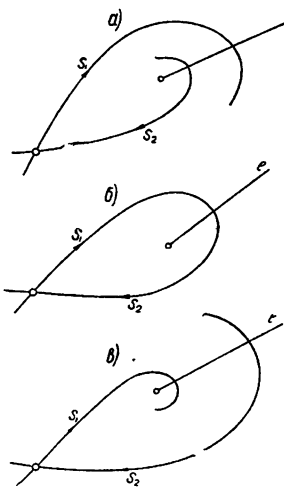


Рис. 13.

## 7. О СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ

При изучении систем, близких к консервативным (Гамильтоновым), большой интерес представляет вопрос о существовании предельных циклов. Для отыскания предельных циклов систем, близких к линейным консервативным системам, существует метод Пуанкаре (см. [1]).

Следуя Пуанкаре, Л. С. Понтрягин дал формулы для отыскания предельных циклов систем, близких к нелинейным консервативным системам [20].

Результаты Понтрягина могут быть перенесены на случай системы дифференциальных уравнений на цилиндрической фазовой поверхности. Рассмотрим систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial H(\varphi, y)}{\partial y} + p(\varphi, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(\varphi, y)}{\partial \varphi} + q(\varphi, y, \mu), \quad (12)$$

где  $\mu$  — параметр и  $p(\varphi, y, 0) = q(\varphi, y, 0) = 0$ . Правые части системы (9) периодические по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Соответствующая консервативная система ( $\mu = 0$ ) имеет интеграл  $H(\varphi, y) = h$ . Согласно [20], значения константы  $h = h_0$ , соответствующие замкнутым кривым консервативной системы, охватывающим состояния равновесия, в непосредственной близости к которым существуют предельные циклы системы для достаточно малых  $\mu \neq 0$ , даются уравнением

$$\psi(h_0) = \iint \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) d\varphi dy = 0,$$

где двойной интеграл распространен на площадь, ограниченную замкнутой кривой  $C_{h_0}$  консервативной системы, охватывающей состояние равновесия. Предельный цикл будет устойчив, если  $\mu\psi'_h(h_0) < 0$ , и неустойчив, если  $\mu\psi'_h(h_0) > 0$ .

Пусть  $H(\varphi, y) = h$  — система замкнутых кривых, охватывающих цилиндр. Будем рассматривать  $\varphi$  и  $y$  как полярные координаты на плоскости. Тогда замкнутые кривые на цилиндре будут также замкнутыми кривыми на плоскости. Однако, замкнутым кривым на цилиндре, пересекающим линию  $y = 0$ , в плоскости будут соответствовать замкнутые кривые, для которых начало координат может быть весьма сложным состоянием равновесия, так как при изменении угла  $\varphi$  от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = 2\pi$   $y$  может несколько раз принимать значение нуль. Во избежание этого, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что  $y > N$ , где  $N > 0$ . Действительно, пусть для интересующих нас  $h$  ( $h_1 < h < h_2$ ) мы имеем  $y > -a$ , где  $a > 0$ , тогда полагаем  $y_1 = y + 2a$ . Уравнение  $H(\varphi, y) = h$  примет вид  $H(y_1 - 2a, \varphi) = h$ . Кривые, данные последним уравнением при  $h_1 < h < h_2$ , будут целиком находиться над кривой  $y_1 = a$ , а следовательно, и над кривой  $y_1 = 0$ . Константы  $h_0$  предельных циклов, близких к замкнутым кривым консервативной системы, охватывающим цилиндр, даются уравнением\*

$$\psi(h_0) = \int [p(\varphi, y) dy - q(\varphi, y) d\varphi] = 0,$$

где криволинейный интеграл взят по замкнутому контуру кривой консервативной системы, охватывающей цилиндр.

Предельный цикл при  $y > 0$  будет устойчив, если  $\mu\psi'_h(h_0) < 0$ , и неустойчив, если  $\mu\psi'_h(h_0) > 0$ . Указанный метод используется, например, в работах [6, 7] при установлении бифуркаций систем с цилиндрической фазовой поверхностью.

\* Доказательство утверждений относительно предельных циклов, охватывающих цилиндр, являющееся непосредственным развитием результатов Понтрягина, выполнено Н. С. Бочаровой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ч. 1, ОНТИ, 1937.
2. Е. А. Леонтович и А. Г. Майер, ДАН СССР, 1937, 14, 5.
3. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 1937, 14, 5.
4. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 1938, 21, 9.
5. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, Ученые записки Горьковского университета, 1937, вып. 6.
6. Н. П. Власов, Ученые записки Горьковского университета, 1939, вып. 12.
7. Н. Н. Баутин, Ученые записки Горьковского университета, 1947, вып. 13.
8. Л. Н. Белюстина, Известия АН СССР, ОТН, 1956, 11.
9. Л. Н. Белюстина, Об одном уравнении из теории электрических машин, Сборник памяти А. А. Андропова, АН СССР, 1955, 175—186.
10. Л. Н. Белюстина, Известия АН СССР, ОТН, 1954, 10.
11. Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 1951, 78, 4.
12. Е. Леонтович и А. Майер, ДАН СССР, 1955, 103, 4.
13. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, 1949.
14. А. А. Андронов, Собрание трудов, АН СССР, 188, 1956.
15. H. Dulac, Comptes Rendus, 1937, 204, 23.
16. L. Amerio, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. 3, 1950.
17. С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, 1950.
18. М. И. Ельшин, Математический сборник, 1954, 34 (76), 2.
19. М. И. Ельшин, Успехи математических наук, 1951, 6, вып. 4 (44).
20. Л. С. Понтрягин, ЖЭТФ, 1934, 4, 3.
21. Ikonnikov, Technical Physics of the USSR, 1937, 4, 6.

Исследовательский  
физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 января 1958 г.