ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 1 РАДИОФИЗИКА 1958

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В БОЛЬШОМ СИСТЕМЫ ИЗ n ГИДРАВЛИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРОВ

Я. К. Любимцев

В работе [1] методом D-разбиения Ю. И. Неймарка найдены условия устойчивости в малом для одномерной системы из n гидравлических резервуаров. В предлагаемой статье при помощи второй методы Ляпунова: 1) находятся достаточные условия устойчивости в большом для аналогичной системы в случае прямого течения; 2) показывается неустойчивость обратного течения, могущего иметь место в одном или нескольких резервуарах. При этом дополнительно учитывается, что в n—1 первых уравнительных резервуарах имеются сосредоточенные сопротивления.

В частном случае двух уравнительных резервуаров указывается предельный переход к дифференциальному уравнительному резервуару, вопрос об условиях устойчивости которого в большом был рассмотрен ранее в [2].

1. Пусть имеется система питания турбинной установки, состоящая из бассейна постоянного уровня и n уравнительных резервуаров, соединенных между собой общей штольней, причем первые n—1 резервуара имеют сосредоточенные сопротивления (см. рисунок).

Найдем достаточные условия устойчивости в большом такой гидравлической системы в предположении, что все звенья системы различны и что на выходе ее регулятором турбины поддерживается постоянство мощности *. Уравнения движения системы в данном случае будут следующими:

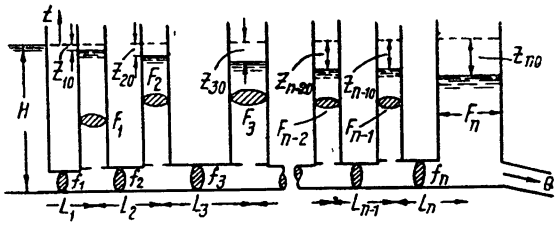

Рис. 1

$$\frac{L_1}{g}\frac{dv_1}{dt}+z_1\pm P_1v_1^2\pm k_1\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2=0,$$

$$\frac{L_2}{g}\frac{dv_2}{dt}+z_2-z_1\pm P_2v_2^2\pm k_2\left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\mp k_1\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2=0,$$

. . . . . .

$$\frac{L_{n-1}}{g}\frac{dv_{n-1}}{dt}+z_{n-1}-z_{n-2}\pm P_{n-1}v_{n-1}^2\pm k_{n-1}\left(\frac{dz_{n-1}}{dt}\right)^2\mp k_{n-2}\left(\frac{dz_{n-2}}{dt}\right)^2=0,$$

$$\frac{L_n}{g}\frac{dv_n}{dt}+z_n-z_{n-1}\pm P_nv_n^2\mp k_{n-1}\left(\frac{dz_{n-1}}{dt}\right)^2=0, \qquad (1.1)$$

* Если часть резервуаров рассматривается как каптажные колодцы с постоянным притоком воды, то это приведет лишь к смещению положения равновесия и не скажется на условиях устойчивости стационарного режима.

$$f_1 v_1 = F_1 \frac{dz_1}{dt} + f_2 v_2,$$

$$f_2 v_2 = F_2 \frac{dz_2}{dt} + f_3 v_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n-1} v_{n-1} = F_{n-1} \frac{dz_{n-1}}{dt} + f_n v_n,$$

$$f_n v_n = F_n \frac{dz_n}{dt} + Q. \tag{1.1}$$

К этим уравнениям добавим условие постоянства мощности

$$N = \gamma\eta Q(H + z_n) = \gamma\eta_0 Q_0 (H + z_{no}) = \text{const}. \tag{1.2}$$

Знак плюс перед членами $P_i v_i^2$ берется в случае течения воды от питающего резервуара к турбинной установке, знак минус — в противоположном случае. Верхний знак при $k_i \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2$ берется, когда $\frac{dz_i}{dt} > 0$, и нижний знак,—когда $\frac{dz_i}{dt} < 0$.

В системе (1.1) и (1.2) введены следующие обозначения: z_i — высота горизонта в i-том уравнительном резервуаре над статическим уровнем; Q—расход жидкости, v_i и $P_i v_i^2$ — соответственно скорость потока и потеря напора на i-том участке гидравлической системы. Значок 0 соответствует новому равновесному режиму. Остальные обозначения ясны из рассмотрения рис. 1.

Введем в уравнениях (1.1) и (1.2) новые, безразмерные переменные $y_i = \frac{v_i}{v_{10}} \equiv \frac{v_i}{v_0}$ и $x_i = \frac{z_i}{P_1 v_{10}^2} \equiv \frac{z_i}{P_1 v_0^2}$, где v_0—скорость потока при новом установившемся течении на первом участке.

Полагаем $v > 0$. Объединяя условие (1.2) с уравнениями (1.1), получим, что система дифференциальных уравнений может быть записана следующим образом:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\varepsilon b_1 [x_1 + c_1 y_1^2 \pm k_1' (d_1 y_1 - d_2 y_2)^2],$$

$$\frac{dy_2}{dt_1} = -\varepsilon b_2 [x_2 - x_1 + c_2 y_2^2 \pm k_2' (d_2 y_2 - d_3 y_3)^2 \mp k_1' (d_1 y_1 - d_2 y_2)^2],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dt_1} = -\varepsilon b_{n-1} [x_{n-1} - x_{n-2} + c_{n-1} y_{n-1}^2 \pm k_{n-1}' (d_{n-1} y_{n-1} - d_n y_n)^2 \mp$$

$$\mp k_{n-2} (d_{n-2} y_{n-2} - d_{n-1} y_{n-1})^2],$$

$$\frac{dy_n}{dt_1} = -\varepsilon b_n [x_n - x_{n-1} + c_n y_n^2 \mp k_{n-1}' (d_{n-1} y_{n-1} - d_n y_n)^2], \tag{1.3}$$

$$\frac{dx_1}{dt_1} = a_1 [d_1 y_1 - d_2 y_2],$$

$$\frac{dx_2}{dt_2} = a_2 [d_2 y_2 - d_3 y_3],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt_1} = a_{n-1} [d_{n-1} y_{n-1} - d_n y_n],$$

$$\frac{dx_n}{dt_1}=a_n\left[d_n y_n-\frac{1-\beta}{1+\beta x_n}\right].$$

В системе (1.3) введены следующие обозначения:

$$\varepsilon=\frac{gP_1^2 v_0^4 \cdot F_1}{L_1 f_1 v_0^2};\quad b_i=\frac{L_1}{L_i};\quad c_i=\frac{P_i}{P_1};\quad a_i=\frac{F_1}{F_i};\quad d_i=\frac{f_i}{f_1};$$

$$k_i'=k_i P_1 v_0^2 \varepsilon_1^2 a_1^2; \tag{1.4}$$

$$\beta=\frac{P_1 v_0^2}{H},\ \text{а также новое время}\ t_1=\varepsilon_1 t\ \left(\varepsilon_1=\frac{f_1 v_0}{F_1 P_1 v_0^2}\right).$$

В уравнениях (1.3) ограничиваемся рассмотрением случая $1+\beta x_n>0$, так как для случая $1+\beta x_n<0$ задача теряет физический смысл [3]. Все параметры системы (1.3) положительны.

Перейдем от уравнений (1.3) к уравнениям в возмущениях, полагая $y_i=y_{i0}+u_i$ и $x_i=x_{i0}+\xi_i$, где y_{i0} и x_{i0} находятся из условия равновесного режима и равны

$$y_{i0}=\frac{d_1}{d_i}(y_{10}=1);\quad x_{i0}=-c_1 y_{10}^2-c_2 y_{20}^2-\ldots-c_i y_{i0}^2. \tag{1.5}$$

Тогда система (1.3) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dt_1}=-\varepsilon b_1\left[\xi_1+2c_1 y_{10}u_1+c_1 u_1^2\pm k_1'(d_1u_1-d_2u_2)^2\right],\\
&\frac{du_2}{dt_1}=-\varepsilon b_2\left[\xi_2-\xi_1+2c_2 y_{20}u_2+c_2 u_2^2\pm k_2'(d_2u_2-d_3u_3)^2\mp\right.\\
&\qquad\left.\mp k_1'(d_1u_1-d_2u_2)^2\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{du_{n-1}}{dt_1}=-\varepsilon b_{n-1}\left[\xi_{n-1}-\xi_{n-2}+2c_{n-1}y_{n-10}u_{n-1}+c_{n-1}u_{n-1}^2+\right.\\
&\qquad\left.+k_{n-1}'(d_{n-1}u_{n-1}-d_nu_n)^2\mp k_{n-2}'(d_{n-2}u_{n-2}-d_{n-1}u_{n-1})^2\right].\\
&\frac{du_n}{dt_1}=-\varepsilon b_n\left[\xi_n-\xi_{n-1}+2c_n y_{n0}u_n+c_n u_n^2\mp k_{n-1}'(d_{n-1}u_{n-1}-d_nu_n)^2\right],\\
&\frac{d\xi_1}{dt_1}=a_1(d_1u_1-d_2u_2),\\
&\frac{d\xi_2}{dt_1}=a_2(d_2u_2-d_3u_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\xi_{n-1}}{dt_1}=a_{n-1}(d_{n-1}u_{n-1}-d_nu_n),\\
&\frac{d\xi_n}{dt_1}=a_n\left(d_nu_n+\frac{c\xi_n}{1+c\xi_n}\right),\ \text{где}\quad c=\frac{\beta}{1-\beta}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Униформизируем систему (1.3), полагая $\xi_i=u_{n+i}$; $a_i=b_{n+i}$ и $d_i=c_{n+i}$. Получим:

$$\dot{u}_1=-\varepsilon b_1\left[u_{n+1}+2c_1y_{10}u_1+c_1u_1^2\pm k_1'(d_1u_1-d_2u_2)^2\right],$$

$$\dot{u}_i = -\varepsilon b_i [u_{n+i} - u_{n+i-1} + 2c_i y_{i0} u_i + c_i u_i^2 \pm$$

$$\pm k_i^1 (d_i u_i - d_{i+1} u_{i+1})^2 \pm k_{i-1}' (d_{i-1} u_{i-1} - d_i u_i)^2] \qquad (1.7)$$

$$i = 2, 3, \ldots, n \quad k_n' = 0,$$

$$\dot{u}_j = b_j [c_j u_{j-n} - c_{j+1} u_{j-n+1}] \quad (j = n+1, n+2, \ldots, 2n-1),$$

$$u_{2n} = b_{2n} \left[c_{2n} u_n + \frac{c u_{2n}}{1 + c u_{2n}} \right].$$

2. Рассмотрим сначала случай, когда все уравнительные резервуары не имеют сосредоточенных сопротивлений, т. е. параметры $k_i' = 0$.

Достаточные условия устойчивости в большом такой системы найдем, используя вторую методу Ляпунова. Для этого возьмем функцию Ляпунова в виде

$$2V = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} A_{ij} u_i u_j. \qquad (2.1)$$

Квадратичная форма (2.1) будет знакоопределенной положительной, если ее коэффициенты удовлетворяют условиям теоремы Сильвестра:

$$1)\ A_{11} > 0, \quad 2) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad 3) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots$$

$$\ldots, 2n) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots & A_{12n} \\ A_{21} & A_{22} \ldots & A_{22n} \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ A_{2n1} & A_{2n2} \ldots & A_{2n2n} \end{vmatrix} > 0. \qquad (2.2)$$

Найдем производную от функции (2.1), используя дифференциальные уравнения (1.7), в которых $k_i' = 0$.

$$\dot{V} = \varepsilon \sum_{j=1}^{2n} b_1 (A_{1j} + A_{j1}) u_j [u_{n+1} + 2c_1 y_{10} u_1 + c_1 u_1^2] -$$

$$- \varepsilon \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{2n} b_i (A_{ij} + A_{ji}) u_j [u_{n+i} - u_{n+i-1} + 2c_i y_{i0} u_i + c_i u_i^2] +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{2n} b (A_{ij} + A_{ji}) u_j [c_i u_{i-n} - c_{i+1} u_{i-n+1}] +$$

$$+ b_{2n} \left[c_{2n} u_n + \frac{c u_{2n}}{1 + c u_{2n}} \right] \sum_{j=1}^{2n} (A_{2nj} + A_{j2n}) u_j.$$

Потребуем, чтобы коэффициенты A_{ij} квадратичной формы (2.1) удовлетворяли, во-первых, следующим $2n-1$ условиям:

$$A_{n1} + A_{1n} = \frac{b_{n+1} c_{n+1} (A_{n+12n} + A_{2nn+1}) + (c b_{2n} - 2\varepsilon b_1 c_1 y_{10}) (A_{2n1} + A_{12n})}{\varepsilon b_n},$$

$$A_{ni}+A_{in}=\frac{c_{i+n}[b_{i+n}(A_{i+n2n}+A_{2ni+n})-b_{i+n-1}(A_{i+n}+A_{2ni+n-1})]}{\varepsilon b_n}+$$

$$+\frac{(cb_{2n}-2\varepsilon b_i c_i y_{i0})(A_{2ni}+A_{i2n})}{\varepsilon b_n};\quad i=2,\ 3,\ \ldots,\ n. \tag{2.3}$$

$$A_{ni}+A_{in}=\frac{\varepsilon[b_{i-n+1}(A_{i-n+12n}+A_{2ni-n+1})-b_{i-n}(A_{i-n2n}+A_{2ni-n})]}{\varepsilon b_n}+$$

$$+\frac{cb_{2n}(A_{2ni}+A_{i2n})}{\varepsilon b_n};\quad i=n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n-1,$$

и, во-вторых, условиям:

$$2\varepsilon(b_1c_1y_{10}+b_ic_iy_{i0})(A_{1i}+A_{i1})-b_{n+1}c_{n+1}(A_{n+1i}+A_{in+1})+$$

$$+c_{n+i}[b_{n+i}(A_{n+i1}+A_{1n+i})-b_{n+i-1}(A_{i+n-11}+A_{1i+n-1})]=0,$$

$$i=2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

$$\varepsilon[b_{i-n}(A_{i-n1}+A_{1i-n})-b_{i-n+1}(A_{i-n+11}+A_{1i+n-1})]+$$

$$+2\varepsilon b_1c_1y_{10}(A_{1i}+A_{i1})-b_{n+1}c_{n+1}(A_{n+1i}+A_{in+1})=0,$$

$$i=n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n-1, \tag{2.4}$$

$$2\varepsilon b_ic_iy_{i0}(A_{ij}+A_{ji})-c_{n+i}[b_{n+i}(A_{n+ij}+A_{jn+i})-b_{n+i-1}(A_{n+i-1j}+A_{ju+i-1})]=0,$$

$$i=2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

$$j=2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ j\neq i,$$

$$2\varepsilon b_ic_iy_{i0}(A_{ij}+A_{ji})-c_{n+i}[b_{n+i}(A_{n+ij}+A_{jn+i})-b_{i+n-1}+A_{i+n-1j})A_{ji+n-1})]-$$

$$-\varepsilon[b_{j-n}(A_{j-ni}+A_{ij-n})-b_{j-n+1}(A_{i-n+1i}+A_{ij-n+1})]=0,$$

$$i=2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

$$j=n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Всего условий (2.4) будет

$$2(n-1)+(n-1)(n-2)+(n-1)^2=(n-1)(2n-1).$$

При выполнении соотношений (2.3) и (2.4) (всего их будет $n(2n-1)$ производная от функции Ляпунова упростится следующим образом:

$$\dot V=-u_1^2\Big\{\varepsilon c_1b_1\sum_{j=1}^{2n}(A_{1j}+A_{j1})u_j+4\varepsilon b_1c_1y_{10}A_{11}-b_{n-1}c_{n+1}(A_{n+11}+$$

$$+A_{1n+1})\Big\}-\sum_{i=2}^{n}u_i^2\Big\{\varepsilon c_ib_i\sum_{j=1}^{2n}(A_{ij}+A_{ji})u_j+4\varepsilon b_ic_iy_{i0}A_{ii}-$$

$$-b_{n+i}c_{n+i}(A_{n+ii}+A_{in+i})+b_{n+i-1}c_{n+i}(A_{n+i-1i}+A_{in+i-1})\Big\}-$$

$$-\varepsilon\sum_{i=n+1}^{2n-1}u_i^2[b_{i-n}(A_{i-ni}+A_{ii-n})-b_{i+1-n}(A_{i-n+1i}+A_{ii-n+1})]-$$

$$-\varepsilon \sum_{i=n+1}^{2n-1} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j\neq i}}^{2n-1} [b_{i-n}(A_{i-nj}+A_{ji-n}) - b_{i-n+1}(A_{i-n+1j}+A_{ji-n+1})]\, u_i u_j -$$

$$-\frac{u_{2n}^2}{1+cu_{2n}}\left\{c\left[cb_{2n}\sum_{j=1}^{2n-1}(A_{2nj}+A_{j2n})u_j+\varepsilon b_n(A_{n2n}+A_{2nn})u_{2n}\right]+\right.$$

$$\left.+\varepsilon b_n(A_{n2n}+A_{2nn})2cb_{2n}A_{2n2n}\right\}. \qquad (2.5)$$

$\dot{V}$ будет удовлетворять теореме Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения при выполнении $n+1$ условия

$$4\varepsilon b_1 c_1 y_{10} A_{11} - b_{n+1}c_{n+1}(A_{n+11}+A_{1n+1}) > 0, \qquad (2.6)$$

$$4\varepsilon b_i c_i y_{i_0} A_{ii} - b_{n+i}c_{n+i}(A_{n+ii}+A_{in+i}) + b_{n+i-1}c_{n+i}(A_{n+i-1i}+A_{in+i-1}) > 0,$$

$$i=2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

$$\varepsilon b_n(A_{n2n}+A_{2nn}) - 2cb_{2n}A_{2n2n} > 0$$

и знакоотрицательности квадратичной формы

$$B = -\sum_{i=n+1}^{2n-1}[b_{i-n}(A_{i-ni}+A_{ii-n}) - b_{i-n+1}(A_{i-n+1i}+A_{ii-n+1})]\,u_i^2 -$$

$$-\sum_{i=n+1}^{2n-1}\sum_{j=n+1}^{2n-1}[b_{i-n}(A_{i-nj}+A_{ji-n}) -$$

$$-b_{i-n+1}(A_{i-n+1j}+A_{ji-n+1})]\,u_i u_j \qquad (j\neq i),$$

что дает $n-1$ условие. Таким образом получаем еще $2n$ условий.

Общее число условий, которое нужно наложить на коэффициенты A_{ij} квадратичной формы (2.2), при учете соотношений (2.3) и (2.4) и параметры системы для того, чтобы была применима теорема Ляпунова об устойчивости возмущенного движения, в нашем случае равно

$$2n+2n+2n-1+(n-1)(2n-1) = 2n^2+3n.$$

Число коэффициентов A_{ij} в (2.1) при учете их парности равно $n(2n-1)$, а число параметров в системе (1.7) равно $2(2n-1)$ $(k_i'=0)$.

Сравнивая число условий $2n^2+3n$ с числом коэффициентов A_{ij} $[n(2+1)]$, мы видим, что на параметры системы (1.7) нужно наложить $2n$ ограничений. Это всегда можно сделать $[2(2n-1)-2n\geqslant 0]$. Чтобы выделить область устойчивости в большом системы гидравлических резервуаров, строим семейство гиперповерхностей $V=C$ и гиперповерхность $\dot{V}=0$. Из условия касания гиперповерхностей $V=C$ и $\dot{V}=0$ находим $C=C_0$. Область, расположенная внутри поверхности $V=C_0$, будет областью устойчивости в большом. Определение значения C_0 из условия касания гиперповерхностей $V=C$ и $\dot{V}=0$ является весьма трудоемкой операцией. Для его вычисления эффективно могут быть применены современные быстродействующие электронные вычислительные машины.

3. В качестве примера рассмотрим гидравлическую систему, содержащую только один простой цилиндрический резервуар ($n=1$). В этом случае условия (2.3) и (2.4) сводятся к одному

$$A_{11} = \frac{A_{22}+(c-2\varepsilon)A_{12}}{\varepsilon} \qquad (3.1)$$

(учитывая, что $b_1=c_1=b_2=c_2=y_{10}=1$ и полагая $A_{12}=A_{21}$). Функция Ляпунова в случае $n=1$ будет следующей:

$$2V=\frac{A_{22}+(c-2\varepsilon)A_{12}}{\varepsilon}u_1^2+2A_{12}u_1u_2+A_{22}u_2^2. \tag{3.2}$$

Она будет знакоопределенная положительная при выполнении двух условий:

$$1)\ A_{22}+(c-2\varepsilon)A_{12}>0,$$

$$2)\ \begin{vmatrix} \frac{A_{22}+(c-2\varepsilon)A_{12}}{\varepsilon} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix}=\frac{A_{22}^2+(c-2\varepsilon)A_{12}A_{22}-\varepsilon A_{12}^2}{\varepsilon}>0.$$

Производная от функции Ляпунова, согласно (2.5), запишется в виде (учитывая, что $b_1=b_2=c_1=c_2=y_{10}=1$):

$$2\dot V=-u_1^2[\varepsilon(2A_{11}u_1+2A_{12}u_2)+4\varepsilon A_{11}-2A_{12}]-$$

$$-\frac{u_2^2}{1+cu_2}[c(2A_{12}cu_1+2\varepsilon A_{12}u_2)+2\varepsilon A_{12}-2cA_{22}]= \tag{3.3}$$

$$=-u_1^2\left[2\varepsilon\left(\frac{A_{22}+(c-2\varepsilon)A_{12}}{\varepsilon}u_1+A_{12}u_2\right)+4\varepsilon\frac{A_{22}+(c-2\varepsilon)A_{12}}{\varepsilon}-\right.$$

$$\left.-2A_{12}\right]-\frac{u_2^2}{1+cu_2}(2c^2A_{12}u_1+2\varepsilon cA_{12}u_2+2\varepsilon A_{12}-$$

$$-2cA_{22})=-2u_1^2\{[A_{22}+(c-2\varepsilon)A_{12}]u_1+\varepsilon A_{12}u_2+2A_{22}+$$

$$+(2c-4\varepsilon-1)A_{12}\}-\frac{2u_2^2}{1+cu_2}(c^2A_{12}u_1+\varepsilon cA_{12}u_2+\varepsilon A_{12}-cA_{22}).$$

Чтобы $\dot V$ удовлетворяла условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, в данном случае достаточно на коэффициенты квадратичной формы наложить два следующих ограничения:

$$3)\quad A_{22}>\frac{1+4\varepsilon-2c}{2}A_{12},$$

$$4)\quad A_{22}<\frac{\varepsilon}{c}A_{12}.$$

Условия 3) и 4) будут совместны при выполнении соотношения

$$(1-2c)(2\varepsilon-c)>0.$$

Сравнивая условия 1) и 3), видим, что условие 1) автоматически выполняется при выполнении 3), а условие 2) удовлетворяется, если взять $c<\frac{1}{2}$. Таким образом, если для случая $n=1$ выполнены два условия

$$c<\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\varepsilon>\frac{c}{2}, \tag{3.4}$$

то можно построить такую функцию Ляпунова, которая выделит на фазовой плоскости область устойчивости в большом стационарного режима ГЭС.

Условия (3.4) совпадают с условиями Тома для устойчивости в малом стационарного режима ГЭС с цилиндрическим уравнительным резервуаром *.

4. При учете в $n-1$ первых уравнительных резервуарах сосредоточенных сопротивлений функцию Ляпунова берем вновь в виде (2.1), но в этом случае производная $\dot{V}$ будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}_0 - \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{2n} k_i' \left[b_i (A_{ij} + A_{ji}) - b_{i+1} (A_{i+1j} + A_{ji+1})\right] \left[c_{n+i} u_i - \right.$$
$$\left. - c_{n+i+1} u_{i+1}\right]^2 u_j. \tag{4.1}$$

где $\dot{V}_0$ совпадает с выражением (2.5).

$\dot{V}_0$ — функция, содержащая члены второго и третьего порядка, причем члены второго порядка представляют собой знакоопределенную квадратичную форму [при выполнении соответствующих условий (2.3), (2.4), (2.6) и (2.7)]. Добавки, получающиеся при учете сопротивлений в $n-1$ первых резервуарах, являются членами третьего порядка и поэтому в определенной окрестности состояния равновесия они не изменяют характера функции $\dot{V}_0$. Условия, накладываемые на параметры системы, сохраняются, хотя область устойчивости в фазовом пространстве изменяется.

В частном случае двух последовательно включенных резервуаров, из которых первый имеет сосредоточенное сопротивление, система (1.7) запишется следующим образом:

$$\dot{u}_1 = -\varepsilon b_1 \left[u_3 + 2c_1 y_{10} u_1 + c_1 u_1^2 \pm k_1' (c_3 u_1 - c_4 u_2)^2\right],$$
$$\dot{u}_2 = -\varepsilon b_2 \left[u_4 - u_3 + 2c_2 y_{20} u_2 + c_2 u_2^2 \mp k_1' (c_3 u_1 - c_4 u_2)^2\right], \tag{4.2}$$
$$\dot{u}_3 = b_3 \left[c_3 u_1 - c_4 u_2\right],$$
$$\dot{u}_4 = b_4 \left[c_4 u_2 + \frac{c u_4}{1 + c u_4}\right],$$

где

$$b_1 = c_1 = y_{10} = b_3 = c_3 = 1.$$

При стремлении параметра b_2 к $+\infty$ и c_2 к нулю (это равносильно тому, что в системе (1.1) к нулю стремится L_2 — длина напорной штольни второго звена) получим следующую систему уравнений:

$$\dot{u}_1 = -\varepsilon \left[u_4 + 2u_1 + u_1^2\right],$$
$$\dot{u}_3 = \pm k_1'' \sqrt{|u_4 - u_3|}, \tag{4.3}$$
$$\dot{u}_4 = b_4 \left[u_1 + \frac{c u_4}{1 + c u_4}\right] \mp b_4 k_1'' \sqrt{|u_4 - u_3|}.$$

Система дифференциальных уравнений (4.3) описывает гидравлическую систему с дифференциальным уравнительным резервуаром, если не учитывается переливание через верх центрального стояка. Уравнения (4.3) совпадают с соответствующими уравнениями работы [2], отличаясь

* Отметим, что функция Ляпунова для гидравлической системы с простым цилиндрическим резервуаром получается так же, как частный случай из функции Ляпунова, построенный Н. А Картвелишвили для системы с пневматическим уравнительным резервуаром (см. [4]) и функции Ляпунова, построенной для системы с дифференциальным уравнительным резервуаром (см. [2]).

лишь обозначениями. Поэтому функции V и V, взятые для двух уравнительных резервуаров, из которых первый имеет сосредоточенное сопротивление, можно переписать для дифференциального уравнительного резервуара, если положить в них $b_2 \to \infty$, а $c_2 \to 0$. В этом случае коэффициенты A_{jl} должны будут удовлетворять следующим условиям получающимся из (2.3) и (2.4):

$$A_{11} = \frac{[b_4 c - 2\varepsilon(1+b_4)](A_{14}+A_{41}) + b_4(A_{34}+A_{43}+2A_{44})}{2\varepsilon},$$

$$A_{12} + A_{21} \to 0, \text{ как } b_2^{-1},$$

$$A_{13} + A_{31} = b_4(A_{14} + A_{41}),$$

$$A_{22} \to 0, \text{ как } b_2^{-1},$$

$$A_{23} + A_{32} \to A_{24} + A_{42} \to 0, \text{ как } b_2^{-1},$$

$$A_{33} = (b_4 - 1)(A_{34} + A_{43}) + 2b_4 A_{44}.$$

Замечание. Отметим, что для системы (1.7) аналогичным путем можно найти достаточные условия неустойчивости невозмущенного движения. Для этого достаточно потребовать, чтобы в условиях (2.6) сменился знак неравенства и квадратичная форма (2.7) стала бы знакоопределенной положительной.

5. Рассмотрим случай, когда хотя бы одно $y_i < 0$ (случай обратного течения).

Полагая $y_i = u_i$; $x_i = u_{n+1}$, а также $a_i = b_{n+1}$; $d_i = c_{n+1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, перепишем систему (1.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_1 = -\varepsilon b_1 [u_{n+1} \pm c_1 u_1^2 \pm k_1'(c_{n+1}u_1 - c_{n+2}u_2)^2],\\
&\dot{u}_i = -\varepsilon b_i [u_{n+i} - u_{n+i-1} \pm c_i u_i^2 \pm k_i'(c_{n+i}u_i - c_{n+i+1}u_{i+1})^2 \mp k_{i-1}(c_{n+i-1}u_{i-1} -\\
&\quad - c_{n+i}u_i)^2], \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1),\\
&\dot{u}_n = -\varepsilon b_n [u_{2n} - u_{2n-1} \pm c_n u_n^2 \mp k_{n-1}^1 (c_{2n-1}u_{n-1} - c_{2n}u_n)^2],\\
&\dot{u}_i = b_i [c_i u_{i-n} - c_{i+1}u_{i-n+1}], \quad (i = n+1, n+2, \ldots, 2n-1)\\
&\dot{u}_{2n} = b_{2n}\left[c_{2n}u_n - \frac{1}{b + m u_{2n}}\right],
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\text{где } l = \frac{1}{1-\beta} \quad \text{и} \quad m = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

(Знак плюс перед c_i берем при $u_i > 0$, знак минус—при $u_i < 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$; верхний знак перед k_i' при $c_{n+i}u_i - c_{n+i+1}u_{i+1} > 0$, нижний знак — при $c_{n+i}u_i - c_{n+i+1}u_{i+1} < 0$.)

Рассмотрим семейство гиперповерхностей:

$$V = \frac{m^2 b_{2n}}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{c_{n+1}}{b_i}u_i^2 + \frac{m^2 b_{2n}}{2}\sum_{i=n+1}^{2n-1}\frac{(u_i + D_i)^2}{b_i} + \frac{(l + m u_{2n})^2}{2} = C. \tag{5.2}$$

При $C \to 0$ это семейство стягивается в точку M с координатами

$$u_i = 0 \, (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

$$u_{n+i} = -D_{n+i} \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1),$$

$$u_{2n} = -\frac{l}{m}.$$

Найдем $\frac{dV}{dt}$, используя систему уравнений (5.1)

$$\dot{V} = mb_{2n}\left\{-m\sum_{i=1}^{n} c_i c_{n+i} |u_i|^3 - m\sum_{i=1}^{n-1} k'_i |c_{n+i}u_i - c_{n+i+1}u_{i+1}|^3 - \right.$$

$$-1 + m\left[c_{n+1}D_{n+1}u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} c_{n+i}(D_{n+i} - D_{n+i-1})u_i + \right.$$

$$\left.\left. + c_{2n}\left(\frac{l}{m} - D_{2n-1}\right)u_n\right]\right\}.$$

Первые три члена в (5.3) отрицательны. Выясним условия отрицательности выражения, стоящего в квадратной скобке. Здесь возможны два случая:

1) все $u' < 0$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), тогда выберем D_{n+i} так, чтобы коэффициенты при u_i были положительными,

2) некоторые из u_i — положительны. В этом случае подберем D_{n+i} так, чтобы коэффициенты при положительных u_i равнялись нулю.

При выполнении этих условий $\dot{V}$ будет знакопостоянная отрицательная.

Изображающая точка, двигаясь по фазовым траекториям в $2n$-мерном пространстве, будет пересекать гиперповерхности $V = C$ от больших C к меньшим. В результате изображающая точка либо попадает в область, где все u_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) положительны (т. е. возвращаемся к прямому течению), либо в область, где система дифференциальных уравнений (5.1) несправедлива (нарушается условие $1 + \beta x_n > 0$). Таким образом, обратное течение «неустойчиво».

Полученный результат, в частности, непосредственно относится и к случаю дифференциального уравнительного резервуара.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. В. Аронович у и Н. А. Картвелишвили за ряд замечаний, сделанных при прочтении данной заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Аронович, Я. К. Любимцев. Инженерный сборник, 1955, *21*.
2. Я. К. Любимцев. Известия АН СССР, ОТН, 1957, № 1.
3. И. В. Егиазаров. «Гидравлические силовые установки», ч. III, изд. 2-е, ОНТИ, 1937.
4. Н. А. Картвелишвили. Инженерный сборник, 1954, *20*.

Исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 21 апреля 1957 г.