

**ПРОСТЕЙШАЯ РЕЛЕЙНАЯ СИСТЕМА РЕГУЛИРОВАНИЯ
НЕУСТОЙЧИВОГО ОБЪЕКТА**

С. Д. Киняпин

Рассматривается задача о релейном регулировании неустойчивого объекта с одной степенью свободы методом точечных отображений. Приводится разбиение пространства параметров системы и в фазовом пространстве выделяется область притяжения к устойчивому предельному циклу или к устойчивому «состоянию равновесия в условиях переключения».

В простейшем случае задача о релейном регулировании неустойчивого объекта с одной степенью свободы приводится к исследованию дифференциального уравнения

$$a\ddot{z} + b\dot{z} - cz = \mp f(z + k'\dot{z}), \tag{1}$$

которое в безразмерных переменных $x = cz$; $\tau = \sqrt{\frac{c}{a}} t$ записывается в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - x = -f(x + k\dot{x}) \tag{2'}$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - x = f(x + k\dot{x}), \tag{2''}$$

где

$$k = k' \sqrt{\frac{c}{a}}; \quad 2\delta = \frac{b}{\sqrt{ac}},$$

$$f(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u > \sigma \text{ и } -\sigma < u < \sigma, \text{ если раньше было } u > \sigma, \\ -1 & \text{при } u < -\sigma \text{ и } -\sigma < u < \sigma, \text{ если раньше было } u < -\sigma. \end{cases}$$

Случай системы релейного регулирования с устойчивым объектом с одной степенью свободы рассматривался в ряде работ [3, 4]. Случай же неустойчивого объекта остался нерассмотренным, несмотря на то, что он существенно отличается от первого. Можно лишь указать на работу Е. К. Круга и О. М. Мининой [2], где на примере системы регулирования с неустойчивым объектом, описывающейся уравнением, являющимся частным случаем уравнения (1), показывается, что она обладает особенностью, не позволяющей изучать ее методом гармонического баланса. В настоящей работе системы (2') и (2'') исследуются методом точечных отображений. При этом оказывается, что всякое решение уравнения (2'') неограниченно возрастает, а пространство параметров системы (2') разбивается на две области.

1. Область абсолютной неустойчивости, когда изображающая точка системы при любых начальных условиях уходит в бесконечность.

2. Область существования устойчивого периодического режима, имеющего ограниченную область притяжения. Изображающая точка системы при начальных условиях, не принадлежащих области притяжения, уxo-

дит в бесконечность. В частном случае, при $\sigma=0$ и $k \geq 0$, устойчивый предельный цикл вырождается в устойчивую особую точку, в которую изображающая точка системы приходит в режиме скольжения.

1. Фазовое пространство системы и точечное преобразование*. Фазовое пространство системы—две полуплоскости $x + ky > -\sigma (\pi_1)$ и $x + ky < \sigma (\pi_2)$ (рис. 1), частично наложенные друг на друга. На π_1 имеем согласно (2'),

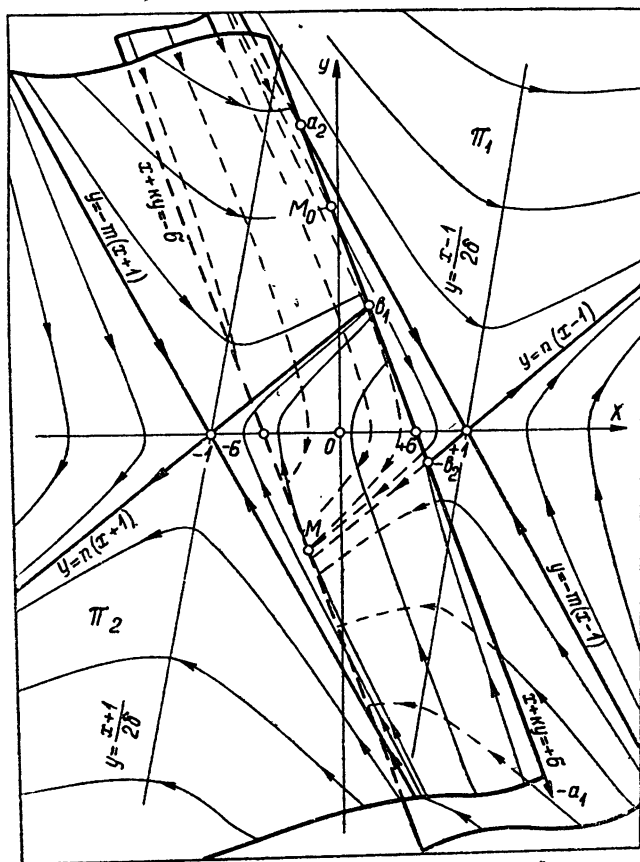


Рис 1

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\delta y + x - 1, \end{cases} \quad (3')$$

а на π_2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\sigma y + x + 1. \end{cases} \quad (3'')$$

Фазовое пространство системы (2') симметрично относительно начала координат, поэтому достаточно рассмотреть лишь одну полуплоскость (π_1). На π_1 имеется одна седловая точка (1,0) с сепаратрисами $y=-m(x-1)$ (Γ_1) и $y=n(x-1)$ (Γ_2), где $m=\sqrt{1+\delta^2}+\delta$ и $n=\sqrt{1+\delta^2}-\delta$.

Исследование системы (3') сводится к исследованию точечного отображения отрезка прямой $x+ky=\sigma$ (L_0) в отрезок прямой $x+ky=-\sigma$ (L_1).

* Все дальнейшее изложение, если это не оговорено особо, относится к исследованию дифференциального уравнения (2').

Пусть изображающая точка выходит из точки $M_0(x_0, y_0)$ прямой L_0 и через некоторое время приходит в точку $M_1(x_1, y_1)$ прямой L_1 . Тогда, после интегрирования (3') и исключения времени перехода, получим

$$[\bar{y}_1 + m(\bar{x}_1 - 1)]^m [\bar{y}_1 - n(\bar{x}_1 - 1)]^n = [y_0 + m(x_0 - 1)]^m [y_0 - n(x_0 - 1)]^n. \quad (4)$$

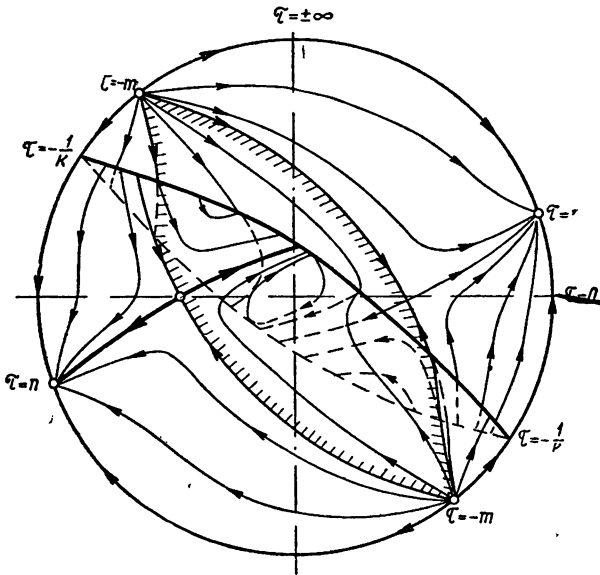


Рис. 2

Изображающая точка, начав движение в области правее сепаратрисы Γ_1 уходит без переключений в бесконечность, если $k > -m$, и после одного переключения, если $k < -m$. Следовательно, можно ограничиться частью π_1 , лежащей левее сепаратрисы Γ_1 . Это налагает на y_0 следующее условие:

$$y_0(n - k) < 1 - \sigma. \quad (5)$$

Кроме того, переход с π_1 на π_2 происходит в тех точках прямой L_1 , где

$$\left. \frac{d}{dt}(x + ky) \right|_{L_1} = \bar{y}_1(k + m)(n - k) - k(1 + \sigma) < 0. \quad (6)$$

Из этого условия определяется область значений \bar{y}_1 , соответствующих переключениям реле.

Если с помощью уравнений прямых L_0 и L_1 исключить x_0 и x_1 в уравнении (4) и заменить $(-y_1)$ на y_1 , то получится следующее преобразование прямой L_0 в себя:

$$(y_1 + a_1)^m (b_1 - y_1)^n = (a_2 - y_0)^m (y_0 + b_2)^n, \quad (7)$$

где

$$a_1 = \frac{1 + \sigma}{n - k}, \quad b_1 = \frac{1 + \sigma}{k + m}, \quad a_2 = \frac{1 - \sigma}{n - k}, \quad b_2 = \frac{1 - \sigma}{k + m}.$$

Фазовая картина системы (2') для бесконечно удаленных точек на сфере Пуанкаре (рис. 2) определяется наличием четырех особых точек: двух устойчивых ($z=0, \tau=n$) и двух неустойчивых узлов ($z=0, \tau=-m$). (На рис. 2 штриховкой показана область притяжения к предельному циклу.)

2. Исследование точечного преобразования (7) проводится графически, для чего на одной плоскости строятся функции

$$\begin{aligned} z_1(y_1) &= m \ln [(y_1 + a_1)^m (b_1 - y_1)^n], \\ z_0(y_0) &= m \ln [(a_2 - y_0)^m (y_0 + b_2)^n], \end{aligned} \quad (8)$$

$b < 1, \kappa = 0$ $b < 1, \kappa = 0$

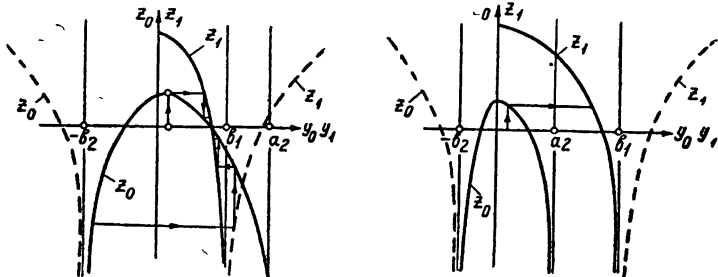


Рис. 3, а и б

причем по оси абсцисс откладывается y_0 и y_1 , а по оси ординат — z_0 и z_1 .

а) $\sigma < 1$. Случаи $k=0, a_2 > b_1$ и $k=0, a_2 < b_1$ изображены на рис. 3, а и б соответственно. Из условий (5) и (6) $z_1(y_1)$ определена лишь для $y_1 > 0$, а $z_0(y_0)$ — для $y_0 < a_2$. Если $y_0 < -b_2$, то ему соответствующие y_1 будут больше b_1 . Эти ветви кривых $z_1(y_1)$ и $z_0(y_0)$ изображены пунктирными линиями. Если $y_0 > -b_2$, то ему соответствующие y_1 будут меньше b_1 . В этом случае ветви кривых $z_1(y_1)$ и $z_0(y_0)$ изображены сплошными линиями.

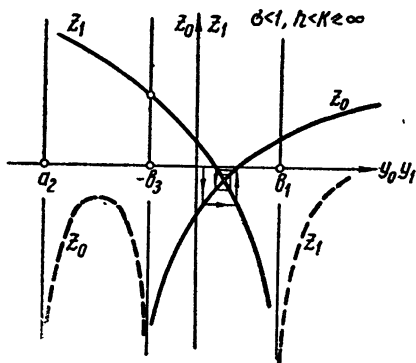


Рис. 4

Исследование показывает, что в случае $b_1 < a_2$ имеется одна устойчивая инвариантная точка, а в случае $b_1 > a_2$ все движения уходят в бесконечность (см. приложения I, II). В случае $b_1 < a_2$ при $0 < k < n$ (кривые $z_0(y_0)$ и $z_1(y_1)$ отличаются от кривых рис. 3, а только тем что максимум кривой $z_0(y_0)$ смещен вправо, а максимум кривой $z_1(y_1)$ смещен влево относительно оси ординат) имеется единственная устойчивая инвариантная точка (см. приложение II). При $k=n$ кривые $z_0(y_0)$ и $z_1(y_1)$ вырождаются в две пересекающиеся прямые, пересечение которых соответствует инвариантной устойчивой точке. При $n < k$ (рис. 4) кривые $z_0(y_0)$ и $z_1(y_1)$ также пересекаются в одной точке (в интервале $-b_2 < y < b_1$). Сжатость точечного преобразования и отсутствие устойчивых состояний равновесия обеспечивают устойчивость этой инвариантной точки. При $k < 0$ существует единственная устойчивая инвариантная точка для $|k| < m$. Кривые $z_0(y_0)$ и $z_1(y_1)$ отличаются от кривых рис. 3, а и б только сдвигом максимумов в стороны, противоположные случаю $k > 0$. Таким образом, при $k > -m$ в системе имеется единственный устойчивый предельный цикл.

б) $\sigma \geq 1$. Для $k < 0$ и $n \geq k \geq 0$ все движения уходят в бесконечность. Для $k > n$ (графики, аналогичные рис. 4) имеется один устойчивый предельный цикл.

В предельном случае $\sigma = 0$, когда нет пространственного запаздывания, при $k \geq 0$ вместо устойчивого предельного цикла имеется устойчивое

состояние равновесия на отрезке скользящего режима. При $k=0$ скользящий режим вырождается в устойчивое состояние равновесия $(0,0)$ в условиях переключения. При $k<0$ имеется один устойчивый предельный цикл.

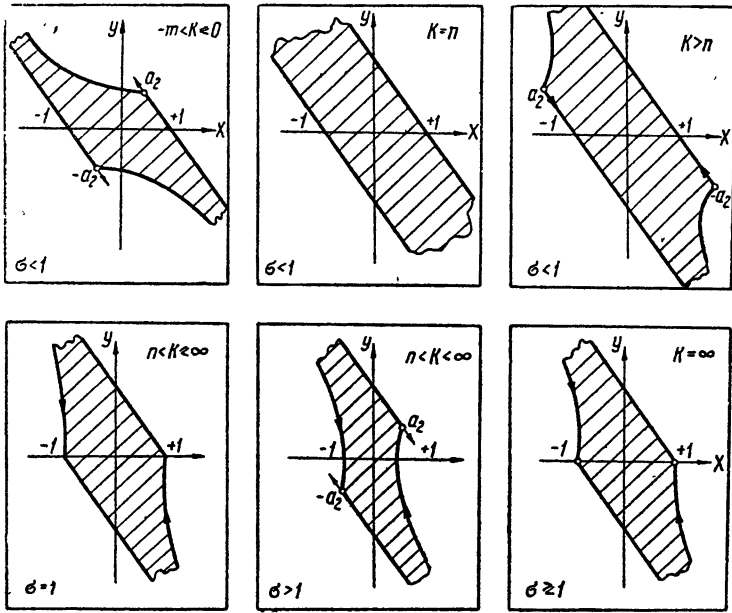


Рис. 5

3. Область притяжения устойчивого элемента ограничена сепаратрисами Γ_1 и Γ_2 и фазовыми траекториями, проходящими через точки a_2 и $-a_2$ на прямых L_0 и L_1 соответственно. На рис. 5 показаны области притяжения для разных k и σ .

4. Разбиение пространства параметров δ , σ и k системы (2') приведено на рис. 6. Поверхность

$$\sigma = \frac{2k + m - n}{m + n}, \quad (9)$$

соответствующая случаю $b_1 = a_2$, делит все пространство на две области: область A , расположенную между поверхностью (9) и плоскостью $\sigma=0$, и область B . В области B все траектории системы уходят в бесконечность. В области A часть траекторий уходит в бесконечность и часть стремится к одному устойчивому предельному циклу. Плоскость $\sigma=0$, примыкающая к области A , делится прямой $k=0$ на две области: область A_1 ($k>0$), в которой у системы имеется устойчивое состояние равновесия в скользящем режиме, и область A_2 ($k<0$), в которой она имеет один устойчивый предельный цикл. Прямой $k=0$ соответствует устойчивое состояние равновесия в условии переключения. При переходе из области A в область B через поверхность (9) предельный цикл сливается с параллелограммом, образованным сепаратрисами седла $(1,0)$ и $(-1,0)$, а затем пропадает. При этом период автоколебаний увеличивается и на самой поверхности (9) становится бесконечным. Точке $k = \delta = \sigma = 0$ соответствует фазовый портрет, приведенный на рис. 7.

5. Исследование уравнения (2'') проводится аналогично и также сводится к исследованию точечного преобразования прямой L_0 в себя. На рис. 8 дан вид фазового пространства. В случае $\sigma < 1$, $k < -m$ (рис. 9) так же, как и в случае $\sigma \geq 1$, $k < -m$, имеется один неустойчивый пре-

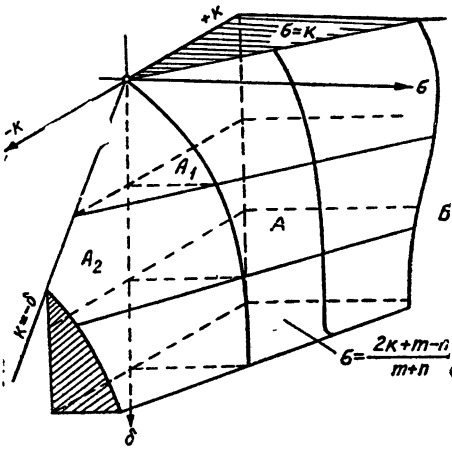


Рис. 6

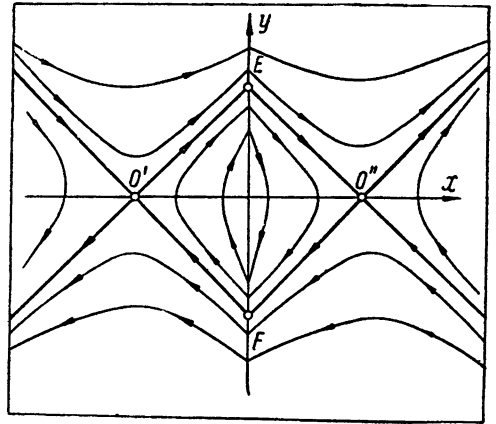


Рис. 7

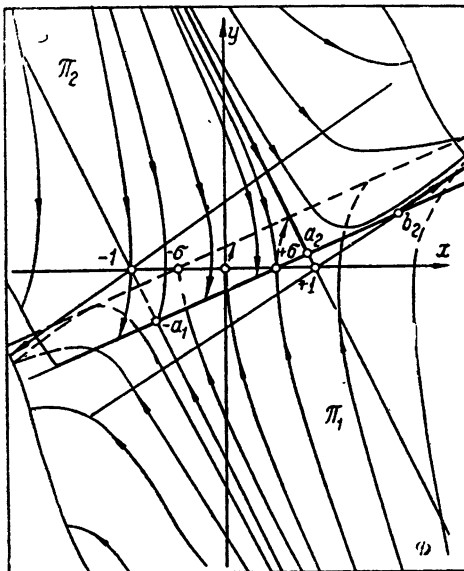


Рис. 8

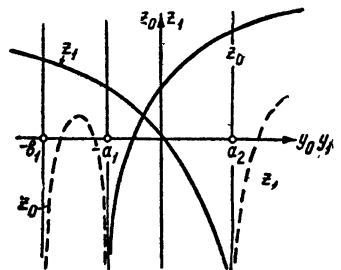


Рис. 9

дельный цикл. Все движения системы ($k \neq -\infty$) уходят в бесконечность либо без переключений, либо после ряда переключений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рабочими режимами системы (2') могут служить устойчивые автоколебания и при отсутствии пространственного запаздывания устойчивое состояние равновесия. Пространственное запаздывание отрицательно влияет на регулирование. Это проявляется в том, что с увеличением пространственного запаздывания область притяжения устойчивого предельного цикла уменьшается, а размеры его увеличиваются. При этом предельный цикл приближается к границе области притяжения, уменьшая тем самым запас устойчивости системы.

Приложение I. В случае $b_1 > a_2$ будет $a_1 > b_1 > a_2 > b_2$. При учете, что $y_1 = y_0 \in [0, a_2]$, имеет место $(b_1 - y_1) > (a_2 - y_0) > 0$, $(y_1 + a_1) > (y_0 + b_2) > 0$. Следовательно, $(y_1 + a_1)(b_1 - y_1) > (a_2 - y_0)(y_0 + b_2)$, но так как $(y_1 + a_1) > (a_2 - y_0)$, то $(y_1 + a_1)^{m^2-1} > (a_2 - y_0)^{m^2-1}$ и окончательно $(y_1 + a_1)^{m^2}(b_1 - y_1) > (a_2 - y_0)^{m^2}(y_0 + b_2)$, откуда следует, что $z_1(y_1) > z_0(y_0)$, т. е. кривые $z_1(y_1)$ и $z_0(y_0)$ (см. рис. 3, б) не пересекаются.

Приложение II. (случай $\sigma < 1$; $0 < k < n$; $b_1 < a_2$). Точечное преобразование (7) таково, что для $y_1 = y_0 \in [0, b_1]$ имеют место неравенства

$$z_0(y_0) < (z_1(y_1))_{y_1=y_0=0} \quad | \quad z_0(y_0) > z_1(y_1)_{y_1=y_0=b_1}.$$

Производные $z_1'(y_1)$ и $z_0'(y_0)$ равны соответственно

$$z_1'(y_1) = - \frac{(m^2 + 1) \left(y_1 + \frac{ka_1}{k+m} \right)}{(b_1 - y_1)(y_1 + a_1)}; \quad z_0'(y_0) = - \frac{(m^2 + 1) \left(y_0 - \frac{a_2 k}{k+m} \right)}{(a_2 - y_0)(y_0 + b_2)}. \quad (II)$$

Точки, в которых производные (II) равны, получаются из уравнения

$$y^2(k + m - n) - 2\sigma y + \frac{k(1 - \sigma^2)}{(k + m)(n - k)} = 0, \quad (III)$$

корни которого

$$y_{1,2} = \frac{\sigma \pm \omega}{k + m - n}, \quad \omega = [\sigma^2 - k(k + m - n)]^{1/2} [(k + m)(n - k)]^{-1/2}.$$

При $k = 0$ для $y_0 = y_1 \in (0, b_1)$: а) имеется только одна точка, в которой $z_1'(y_1) = z_0'(y_0)$; б) $z_1(y_1)$ и $z_0'(y_0)$ монотонные функции y_1 и y_0 соответственно; в) при малых y_1 и y_0 $|z_0'(y_0)| > |z_1'(y_1)|$. Следовательно, кривые $z_1(y_1)$ и $z_0(y_0)$ пересекаются только в одной точке.

При $k \neq 0$ имеется две точки, в которых $z_1'(y_1) = z_0'(y_0)$. Поэтому существует логическая возможность как одного, так и трех пересечений кривых $z_1(y_1)$ и $z_0(y_0)$. Граничный случай соответствует касанию кривых

$$z_0(y_0) = z_1(y_1) \quad \text{и} \quad z_0'(y_0) = z_1'(y_1) \quad (IV)$$

Подставив в $z_1(y_1)$ и $z_0(y_0)$ наименьший корень уравнения (III), получим, что они равны соответственно:

$$z_1^*(y_1) = m^2 \ln A + \ln B - \Phi,$$

$$z_0^*(y_0) = m^2 \ln C + \ln D - \Phi,$$

где

$$A = k + m - n + m\sigma - (n - k)W; \quad C = k + m - n - [m\sigma - (n - k)W]$$

$$B = k + m - n - [n\sigma - (k + m)W]; \quad D = k + m - n + n\sigma - (k + m)W;$$

$$\Phi = m^2 \ln(k + m - n)(n - k) + \ln(k + m - n)(m + k).$$

Так как $A > D > 0$; $B > C > 0$ и $m\sigma - (n - k)W > 0$ при любых σ , то имеют место неравенства: $AB > DC$, $A^{m^2-1} > C^{m^2-1}$ ($m^2 > 1$), откуда следует, что $A^{m^2}B > C^{m^2}D$ или окончательно

$$m^2 \ln A + \ln B - \Phi > m^2 \ln C + \ln D - \Phi, \quad (V)$$

т. е. $z_1^*(y_1) > z_0^*(y_0)$

Аналогичные рассуждения для наибольшего корня уравнения (III) в силу выполнения условия $m\sigma + (n - k)W > n\sigma + (k + m)W$, приводят опять к неравенству

$$z_1^{**}(y_1) > z_0^{**}(y_0). \quad (VI)$$

Из (V), (VI) следует, что условие (IV) не выполняется и кривые $z_1(y_1)$ и $z_0(y_0)$ пересекаются только в одной точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, С. Э. Хайкин. Теория колебаний, ч. 1, ОНТИ, 1937.
2. Е. К. Круг, О. М. Минина. Автоматика и телемеханика, 1955, 16, 6, 536.
3. J. Flugge Lotz. Discontinuous automatic controls Princeton (1953).
4. Н. Н. Леонюв, В. С. Бояринов. К теории одной релейной следящей системы (в печати).

Исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 июня 1957 г