ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 1 РАДИОФИЗИКА 1958

К ТЕОРИИ ОДНОЙ ПРОСТЕЙШЕЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С СЕРВОМОТОРОМ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ И ЗОНОЙ НАСЫЩЕНИЯ

Г. В. Аронович

В статье методом точечного преобразования исследуется динамика простейшей системы регулирования при сервомоторе переменной скорости с ограниченным изменением выходной величины.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую (в безразмерных переменных) следующим дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + x = F(\psi). \tag{1}$$

Здесь x — отклонение от стационарного режима, $\psi = x + k\dot{x}$, а вид функции $F(\psi)$ изображен на рис. 1.

Принимаем, что $h>0$, $k \gtreqless 0$*

К подобной задаче при соответствующей идеализации сводится исследование динамики ряда релейных систем регулирования второго порядка, у которых с целью улучшения сходимости процесса регулирования в схему введена коррекция не только по координате, но и по скорости. В соответствии с видом функции $F(\psi)$ фазовая плоскость x, y (где $y \equiv \dot{x}$) разбивается прямыми $x + ky = \delta$ и $x + ky = -\delta$ на три области G_1, G_2, G_3, в каждой из которых уравнение (1) линейно. В области G_1 движение системы определяется дифференциальным уравнением

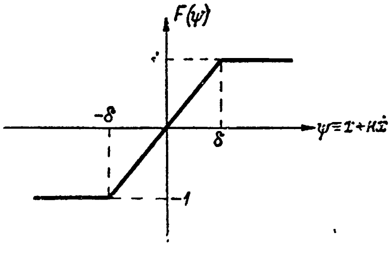

Рис. 1

$$\left.\begin{array}{ll} \ddot{x} + 2h\dot{x} + x = 1, & \psi > \delta, \\ \text{в области } G_2 \quad \ddot{x} + \left(2h - \frac{k}{\delta}\right)\dot{x} + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)x = 0, & |\psi| < \delta, \\ \text{в области } G_3 \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + x = -1, & \psi < -\delta \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Считаем, что на всей фазовой плоскости x и y являются непрерывными функциями времени t и, следовательно. фазовые траектории непрерывны при переходе через эти прямые. Уравнения (2) инвариантны относительно замены x, y на $-x$, $-y$, вследствие чего фазовые траектории симметричны относительно начала координат. Изоклиной вертикальных касательных является ось абсцисс $y=0$, а изоклиной горизонтальных касательных—ломаная

$$-2hy - x + F(x + ky) = 0.$$

---

* Случай $\psi \equiv k\dot{x}\left(k = 2h > \frac{1}{2}\right)$ рассмотрен методом точечных преобразований Н. А. Железцовым [1].

Если $\delta<1$, то рассматриваемая динамическая система имеет три состояния равновесия в точках (1,0), (0,0), (—1,0); если $\delta>1$, то состояние равновесия будет единственным в начале координат (0,0). Состояния равновесия (1,0) и (—1,0) могут быть или устойчивыми фокусами, или устойчивыми узлами. Состояние равновесия (0,0) в зависимости от значений параметров h, k, δ седло, фокус или узел (устойчивый или неустойчивый). Отметим, что бесконечность фазовой плоскости всегда неустойчива.

Для исследования поведения системы сведем задачу к точечному преобразованию прямой в прямую [2]. В качестве отрезка без контакта возьмем полупрямую L_0 с уравнением $\psi=\delta$ при значениях $y>y_B=\frac{\delta-1}{c}k$, где $c\equiv1-2hk+k^2$ (рис. 2). Величина y_B находится из условия касания интегральной кривой области G_1 с прямой $\psi=\delta$. Найдем точечное преобразование этой полупрямой в себя, осуществляемое траекториями системы (2). Пусть изображающая точка начинает $(t=0)$ движение из точки (x_0, y_0) полупрямой L_0 и через $t=\tau_1$ приходит в точку (x_1, y_1) полупрямой L_1, уравнение которой $\psi=\delta$ при значениях $y<y_B$ (преобразование S). Из решения первого из уравнений (2) легко находим обычными приемами выражение для функции соответствия. При $h<1$ последняя имеет вид (в параметрической форме)

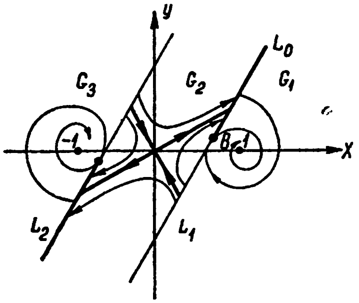

Рис. 2

$$\left.\begin{aligned} y_0&=\frac{1-\delta}{c}\left(\frac{\cos\omega\tau_1-e^{h\tau_1}}{\sin\omega\tau_1}\,\omega+h-k\right),\\ y_1&=\frac{1-\delta}{c}\left(\frac{-\cos\omega\tau_1+e^{-h\tau_1}}{\sin\omega\tau_1}\,\omega+h-k\right)\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

$$(\omega=\sqrt{1-h^2}).$$

Здесь τ_1 меняется в интервалах

$$\pi<\omega\tau_1<\omega\bar{\tau}_1 \quad \text{при } \delta<1;$$
$$0<\omega\tau_1<\pi \qquad \delta>1.$$

Уравнение для $\bar{\tau}_1$ имеет вид

$$h\sin\omega\bar{\tau}_1-\omega\cos\omega\bar{\tau}_1+\omega e^{-h\bar{\tau}_1}=0.$$

При $h>1$

$$\left.\begin{aligned} y_0&=\frac{1-\delta}{c}\left(\frac{\operatorname{ch}\omega_1\tau_1-e^{h\tau_1}}{\operatorname{sh}\omega_1\tau_1}\,\omega_1+h-k\right)\\ y_1&=\frac{1-\delta}{c}\left(\frac{-\operatorname{ch}\omega_1\tau_1+e^{-h\tau_1}}{\operatorname{sh}\omega_1\tau_1}\,\omega_1+h-k\right)\end{aligned}\right\}. \tag{3'}$$

$$(\omega_1=\sqrt{h^2-1}).$$

Если $h>1$ и $\delta<1$, то преобразование S к точкам полупрямой L_0 неприменимо, ибо все выходящие из L_0 траектории попадают в область притяжения устойчивого узла. Если $h>1$ и $\delta>1$, то $0\leqslant\tau_1<\infty$. Пусть далее изображающая точка выходит (в момент $t=0$) из точки (x_1, y_1) полупрямой L_1 и через $t=\tau_2$ приходит в точку (x_2, y_2) полупрямой L_2 по траекториям области G_2 (преобразование E). Функция соответствия запишется в зависимости от знака выражения $\Delta\equiv h_1^2-k_1$ в виде.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{\delta}{c}\left(\frac{\operatorname{ch}\omega_2\tau_2 + e^{h_1\tau_2}}{\operatorname{sh}\omega_2\tau_2}\,\omega_2 + h_1 - kk_1\right) \\ y_2 &= -\frac{\delta}{c}\left(\frac{\operatorname{ch}\omega_2\tau_2 + e^{-h_1\tau_2}}{\operatorname{sh}\omega_2\tau_2}\,\omega_2 + kk_1 - h_1\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$0 < \tau_2 < \infty$$

$\left(\text{здесь введены обозначения } h_1 \equiv h - \frac{k}{2\delta};\ k_1 \equiv 1 - \frac{1}{\delta} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{h_1^2 - k_1}\right)$

или в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{\delta}{c}\left(\frac{\cos\omega_3\tau_2 + e^{h_1\tau_2}}{\sin\omega_3\tau_2}\,\omega_3 + h_1 - kk_1\right) \\ y_2 &= -\frac{\delta}{c}\left(\frac{\cos\omega_3\tau_2 + e^{-h_1\tau_2}}{\sin\omega_3\tau_2}\,\omega_3 + kk_1 - h_1\right) \end{aligned}\right\}. \tag{4'}$$

Здесь $\omega_3 = \sqrt{k_1 - h_1^2}$, $0 \leqslant \omega_3\tau_2 \leqslant \omega_3\bar{\tau}_2 < \pi$, а $\bar{\tau}_2$ является корнем урав нения

$$(1 + e^{h_1\bar{\tau}_2} + \cos\omega_3\bar{\tau}_2)\,\omega_3 - h_1 e^{h_1\bar{\tau}_2}\sin\omega_3\bar{\tau}_2 = 0, \text{ если } h_1 > 0$$

$\left(\text{т. е. } y_2(\bar{\tau}_2) = -\frac{\delta k k_1}{c}\right)$,

или уравнения

$$(e^{h_1\bar{\tau}_2} + \cos\omega_3\bar{\tau}_2)\,\omega_3 + h_1\sin\omega_3\bar{\tau}_2 = 0, \text{ если } h_1 < 0$$

$\left(\text{т. е. } y_1(\bar{\tau}_2) = \frac{\delta k k_1}{c}\right)$.

В силу симметрии фазовых траекторий относительно начала координат для нахождения точечного преобразования полупрямой L_0 в себя достаточно определить преобразование полупрямой L_0 в полупрямую L_2, так как всякий раз, когда точка по преобразованию $T = SE$ попадает на полупрямую L_2, можно рассматривать вместо нее симметричную ей точку, принадлежащую L_0.

Исследуем преобразование S. Если $h<1$, то особая точка (1,0) является устойчивым фокусом, траектории в области G_1 — скручивающимися спиралями, а сама функция соответствия изображается соотношениями (3). Отметим, что чем меньше в этих соотношениях параметр преобразования τ_1, т. е. приведенное время пробега изображающей точки в области G_1, тем больше y_0 и y_1 (по траекториям с большими y изображающая точка движется быстрее). Для исследования функции соответствия $y_1(y_0)$ найдем:

$$\frac{dy_1}{dy_0} = \frac{-\omega + (h\sin\omega\tau_1 + \omega\cos\omega\tau_1)\,e^{-h\tau_1}}{\omega + (h\sin\omega\tau_1 - \omega\cos\omega\tau_1)\,e^{h\tau_1}} \equiv \frac{f_1}{f_2}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2y_1}{dy_0^2} = \frac{c\sin^3\omega\tau_1}{\omega(1-\delta)}\cdot\frac{2(h\sin\omega\tau_1 - \omega\operatorname{sh}h\tau_1)}{[\omega + (h\sin\omega\tau_1 - \omega\cos\omega\tau_1)\,e^{h\tau_1}]^3} \equiv \frac{c\sin^3\omega\tau_1}{\omega(1-\delta)}\cdot\frac{f_3}{f_2^3}. \tag{6}$$

В интервале $0 < \tau_1 \leqslant \bar{\tau}_1$: $f_1 < 0$, $f_2 > 0$, $f_3 < 0$, т. е. $\frac{dy_1}{dy_0} < 0$, $\frac{d^2y_1}{dy_0^2} > 0$. Кривая $y_1(y_0)$ при $\tau_1 = \frac{\pi}{\omega}$ имеет асимптоту

$$y_1 = -e^{-\frac{\pi h}{\omega}}y_0 + \frac{1-\delta}{c}(2h - k)\left(1 + e^{-\frac{\pi h}{\omega}}\right). \tag{7}$$

При $\tau_1 = \bar{\tau}_1 : \frac{dy_1}{dy_0} = \infty$.

Если $h > 1$, то особая точка (1,0) является устойчивым узлом. Выражения для $\frac{dy_1}{dy_0}$ и $\frac{d^2y_1}{dy_0^2}$ в этом случае будут следующими:

$$\frac{dy_1}{dy_0} = \frac{-\omega_1 + (h \operatorname{sh} \omega_1\tau_1 + \omega_1 \operatorname{ch} \omega_1\tau_1)\, e^{-h\tau_1}}{\omega_1 + (h \operatorname{sh} \omega_1\tau_1 - \omega_1 \operatorname{ch} \omega_1\tau_1)\, e^{h\tau_1}} \equiv \frac{f_1}{f_2}, \tag{5'}$$

$$\frac{d^2y_1}{dy_0^2} = \frac{c \operatorname{sh}^3\omega_1\tau_1}{\omega(1-\delta)} \cdot \frac{2(h \operatorname{sh} \omega_1\tau_1 - \omega_1 \operatorname{sh} h\tau_1)}{[\omega_1 + (h \operatorname{sh} \omega_1\tau_1 - \omega_1 \operatorname{ch} \omega_1\tau_1)\, e^{h\tau_1}]^3} \equiv \frac{c \operatorname{sh}^3 \omega_1\tau_1}{\omega(1-\delta)} \cdot \frac{f_3}{f_2^3}. \tag{6'}$$

Легко видеть, что $\left(\frac{dy_1}{dy_0}\right) < 0$, причем $\left(\frac{dy_1}{dy_0}\right)_{\tau_1=0} = -1$; $\left(\frac{dy_1}{dy_0}\right)_{\tau_1=\infty} = 0$. Далее, так как $f_2 > 0$, $h \operatorname{sh} \omega_1\tau_1 - \omega_1 \operatorname{sh} h\tau_1 < 0$ и, как указано выше, $\delta > 1$, то знак $\frac{d^2y_1}{dy_0^2}$ зависит от знака c: если $c > 0$, то $\frac{d^2y_1}{dy_0^2} > 0$, если $c < 0$, то $\frac{d^2y_1}{dy_0^2} < 0$.

Исследуем преобразование E. Если $\delta < 1$, то $k_1 = 1 - \frac{1}{\delta} < 0$ и особая точка (0,0) будет седлом. Если $\delta > 1$, то особая точка (0,0) будет узлом или фокусом, устойчивым при $h_1 \equiv h - \frac{k}{2\delta} \geq 0$ и неустойчивым при $h_1 < 0$. Найдем выражения для $\frac{dy_2}{dy_1}$ и $\frac{d^2y_2}{dy_1^2}$. Если $\Delta \equiv$ $\equiv h_1^2 - k_1 > 0$, то

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\omega_2 + e^{-h_1\tau_2}(\omega_2 \operatorname{ch} \omega_2\tau_2 + h_1 \operatorname{sh} \omega_2\tau_2)}{\omega_2 + e^{h_1\tau_2}(\omega_2 \operatorname{ch} \omega_2\tau_2 - h_1 \operatorname{sh} \omega_2\tau_2)} \equiv \frac{f_4}{f_5}, \tag{8}$$

$$\frac{d^2y_2}{dy_1^2} = \frac{ck_1 \operatorname{sh}^3 \omega_2\tau_2}{\delta\omega_2} \cdot \frac{2(\omega_2 \operatorname{sh} h_1\tau_2 + h_1 \operatorname{sh} \omega_2\tau_2)}{[\omega_2 + e^{h_1\tau_2}(\omega_2 \operatorname{ch} \omega_2\tau_2 - h_1 \operatorname{sh} \omega_2\tau_2)]^3} \equiv$$

$$\equiv \frac{ck_1 \operatorname{sh}^3\omega_2\tau_2}{\delta\omega_2} \cdot \frac{f_6}{f_5^3}. \tag{9}$$

Если $\Delta \equiv h_1^2 - k_1 < 0$, то

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\omega_3 + e^{-h_1\tau_2}(\omega_3 \cos \omega_3\tau_2 + h_1 \sin \omega_3\tau_2)}{\omega_3 + e^{h_1\tau_2}(\omega_3 \cos \omega_3\tau_2 - h_1 \sin \omega_3\tau_2)} \equiv \frac{f_4}{f_5}, \tag{8'}$$

$$\frac{d^2y_2}{dy_1^2} = \frac{ck_1 \sin^3 \omega_3\tau_2}{\delta\omega_3} \cdot \frac{2(\omega_3 \operatorname{sh} h_1\tau_2 + h_1 \sin \omega_3\tau_2)}{[\omega_3 + e^{h_1\tau_2}(\omega_3 \cos \omega_3\tau_2 - h_1 \sin \omega_3\tau_2)]^3} \equiv$$

$$\equiv \frac{ck_1 \sin^3 \omega_3\tau_2}{\delta\omega_3} \cdot \frac{f_6}{f_5^3}. \tag{9'}$$

Знаки $\frac{dy_2}{dy_1}$ и $\frac{d^2y_2}{dy_1^2}$ указаны в табл. 1. Случай $h > 1$, $\delta < 1$ в табл. 1 не приведен, так как для него отсутствует преобразование S. При $\tau_2 = 0$ кривая $y_2 = f(y_1)$ имеет асимптоту

$$y_2 = y_1 + \frac{2\delta}{c}(2h - k). \tag{10}$$

Рассмотрим возможные виды диаграмм Кенигса—Лемерея и соответствующие им разбиения фазовой плоскости на траектории.

Таблица 1

	$0<h<1$									$h>1$				
	$\delta<1\ (k_1<0)$			$\delta>1\ (k_1>0)$						$\delta>1\ (k_1>0)$				
	$k<0$ $(h_1>0)$	$k>0$, $h_1>0$	$k>0$, $h_1<0$	$k<0$ $(h_1>0)$		$k>0$, $h_1>0$		$k>0$, $h_1<0$		$k<0$ $(h_1>1)$	$k>0$, $h_1>0$		$k>0$, $h_1<0$	
	$\Delta>0$	$\Delta>0$	$\Delta>0$	$\Delta>0$	$\Delta<0$	$\Delta>0$	$\Delta<0$	$\Delta>0$	$\Delta<0$	$\Delta>0$	$\Delta>0$	$\Delta<0$	$\Delta>0$	$\Delta<0$
$\frac{dy_2}{dy_1}$	>0	>0	>0	$\gtrless 0$	>0	$\gtrless 0$	>0	$\gtrless 0$	>0	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$	>0	$\gtrless 0$	>0
$\frac{d^2y_2}{dy_1^2}$	<0	<0	>0	$\gtrless 0$	>0	$\gtrless 0$	>0	<0	<0	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$	>0 $(c>0)$, <0 $(c<0)$	<0 $(c>0)$, >0 $(c<0)$	<0 $(c>0)$, >0 $(c<0)$

1) $h<1$, $\delta<1$, $k<0$. В этом случае $k_1<0$, $h_1>0$ и $\Delta>0$. Начало координат (0,0)—особая точка типа седла. Обозначим

$$\lambda_1 \equiv -h_1+\sqrt{\Delta}=-h_1+\omega_2,\quad \lambda_2\equiv -h_1-\omega_2.$$

Очевидно, в данном случае $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$. Отметим, что $c=1-2hk+k^2=(1+k\lambda_1)(1+k\lambda_2)>0$. Так как $1+k\lambda_2>0$, то $1+k\lambda_1>0$, что означает, что наклон усов седла в точке (0,0) меньше наклона прямых $\psi=\pm\delta$. Для функции соответствия $y_2(y_1)$ найдем, что при $\tau_2=0$: $y_1=-\infty$, $y_2=-\infty$, а при $\tau_2=\infty$ $y_1=\frac{\delta\lambda_2}{1+k\lambda_2}$, $y_2=-\frac{\delta\lambda_1}{1+k\lambda_1}$. Кроме того, $\left(\frac{dy_2}{dy_1}\right)_{\tau_2=\infty}=0$. Вид диаграммы Кенигса — Лемерея приведен на рис. 3. Положение асимптот на рис. 3 определяется величинами Δ_1 и Δ_2. Легко видеть, что

$$\Delta_1=\frac{1-\delta}{c}(2h-k)\left(1+e^{-\frac{\pi h}{\omega}}\right)>0, \qquad (11)$$

$$\Delta_2=-\frac{2\delta}{c}(2h-k)<0. \qquad (12)$$

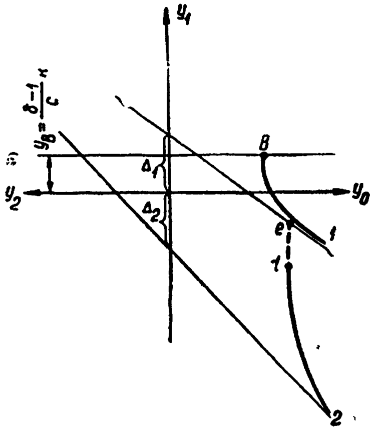

Рис. 3

Если в уравнение асимптоты (7) вместо y_0 подставить значение $(y_2)_{\tau_2=\infty}$, то определится ордината точки $(y_1)_e$ (см. рис. 3). Разность ординат

$$(y_1)_e-(y_1)_{\tau_2=\infty}=$$

$$=\frac{1-\delta}{c}2h\left(1+e^{-\frac{\pi h}{\omega}}\right)+\frac{\delta}{c}h_1\left(1+e^{-\frac{\pi h}{\omega}}\right)+$$

$$+\frac{\delta}{c}\sqrt{h_1^2-k_1}\left(1-e^{-\frac{\pi h}{\omega}}\right)>0. \qquad (13)$$

Поэтому кривые $y_1(y_0)$ и $y_2(y_1)$, как это изображено на рис. 3, не пересекаются, т. е. предельные циклы (автоколебания) отсутствуют. Система в зависимости от начальных условий стремится или к состоянию равновесия (1,0), или к состоянию равновесия (—1,0). Разбиение фазовой плоскости на траектории приведено на рис. 2.

2) $h<1$, $\delta<1$, $k>0$. В этом случае $k_1<0$, $\Delta>0$. Примем $h_1>0$. Начало координат (0,0)—особая точка типа седла. По-прежнему

$\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$. Так как $c>0$ и $1+k\lambda_1>0$, то $1+k\lambda_2>0$. Диаграмма Кенигса—Лемерея приведена на рис 4. Так как по предположению $h_1=h-\frac{k}{2\delta}>0$ и $\delta<1$, то, следовательно, $2h-k>0$. Отсюда вытекает, что $\Delta_1>0$ и $\Delta_2<0$ (см. рис. 4). Поэтому пересечения кривых $y_1(y_0)$ и $y_2(y_1)$, как и в предыдущем случае, не будет, т. е. автоколебания отсутствуют. Разбиение фазовой плоскости на траектории приведено на рис. 5.

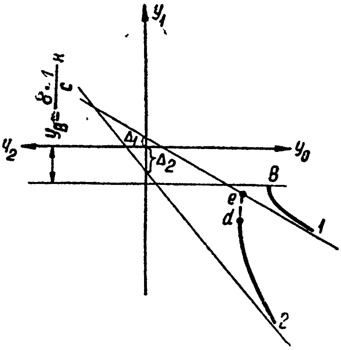

Рис. 4

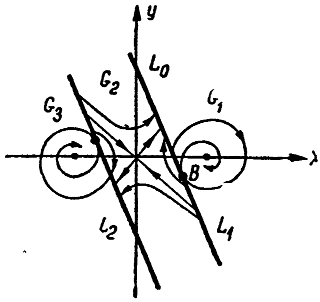

Рис. 5

3) $h<1$, $\delta<1$, $k>0$ ($k_1<0, \Delta>0$), но $h_1<0$. Начало координат (0,0)—особая точка типа седла. $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$, $\left(\frac{dy_2}{dy_1}\right)_{\tau_2=\infty}=\infty$. Диаграммы Кенигса—Лемерея приведены на рис. 6. Из рис. 6 видно, что возможны две точки пересечения кривых $y_1(y_0)$ и $y_2(y_1)$, одна точка пересечения или отсутствие точек пересечения. Иначе, в зависимости от соотношений параметров имеет место абсолютная

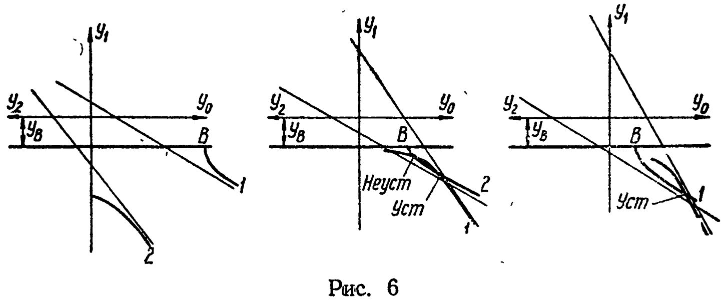

Рис. 6

стойчивость (система стремится к состоянию равновесия 1,0 или —1,0), или два предельных цикла (внешний устойчивый, внутренний неустойчивый), возникающих из уплотнения фазовых траекторий, или один (устойчивый) предельный цикл (второй предельный цикл слился с зоной притяжения* особых точек 1,0 и —1,0).

4) $h<1$, $\delta>1$, $k<0$. В этом случае $k_1>0$, $h_1>0$, $a\Delta \gtreqless 0$. Система имеет лишь одно состояние равновесия в начале координат (0,0) типа устойчивого узла (фокуса). Для построения диаграммы Кенигса—Лемерея отметим, что $\left(\frac{dy_1}{dy_0}\right)_{\tau_1=0}=-1$, т. е. совпадает с на-

* Если начальные условия принадлежат зоне притяжения особых точек, то система будет стремиться к устойчивому состоянию равновесия (1,0) или (—1,0) без переключения реле.

клоном асимптоты к кривой $y_2(y_1)$ при $\tau_2=0$. Далее выясним знак величины $\Delta_3=(y_1)_a-(y_1)_c$, определяющей взаимное расположение асимптот (см. рис. 7)

$$\Delta_3=\frac{2h-k}{c}\left[1+e^{-\frac{\pi h}{\omega}}+\delta\left(1-e^{-\frac{\pi h}{\omega}}\right)\right]. \qquad (14)$$

Из выражения (14) видно, что $\Delta_3>0$. Разность Δ_4 (см. рис. 7) также положительна

$$\Delta_4\equiv(y_0)_{\tau_1=0}-y_2^*=\frac{4\delta h_1}{c}>0. \qquad (15)$$

Учитывая, что кривая $y_2(y_1)$ обращена вогнутостью вниз, убеждаемся в отсутствии точек пересечения кривых $y_1(y_0)$ и $y_2(y_1)$, т. е. в отсутствии автоколебаний.

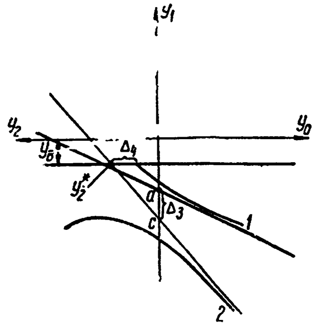

Рис. 7

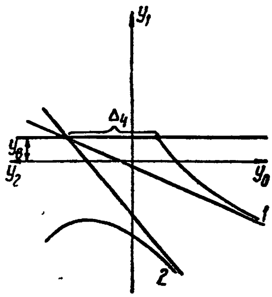

Рис. 8

5) $h<1$, $k>0$, $\delta>1$ $(k_1>0)$. Состояние равновесия—устойчивый фокус или узел в точке (0,0). Положим $h_1\gtrless 0$. Так как при любом знаке Δ—величина $\Delta_4>0$, то, учитывая знак $\frac{dy_2}{dy_1}$ и $\frac{d^2y_2}{dy_1^2}$, убеждаемся в отсутствии предельных циклов (см. рис. 8).

6) $h<1$, $k>0$, $\delta>1$ $(k_1>0)$, но $h_1<0$. Состояние равновесия в точке (0,0)—неустойчивый узел или фокус. Отметим, что в данном случае $\Delta_4=\frac{4\delta h_1}{c}<0$, т. е. точка $(y_1)_{\tau_1=0}=(y_0)_{\tau_1=0_4}=\frac{\delta-1}{c}k$ лежит сле-

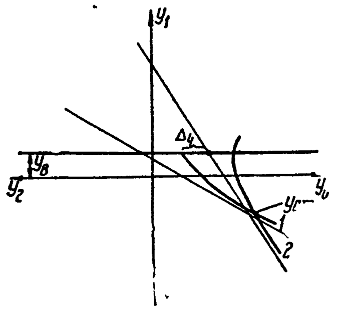

Рис. 9

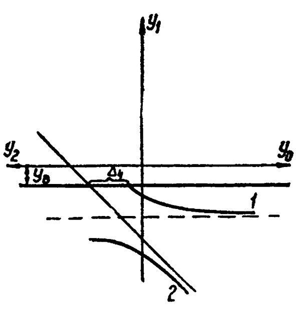

Рис. 10

ва от асимптоты (10). Так как кривая $y_2(y_1)$ обращена вогнутостью вверх, то кривая $y_2(y_1)$, в частности, не может пройти через точку $y_0)_{\tau_1=0}=(y_1)_{\tau_1=0}$. Заметим, что если $(y_1)_{\tau_1=0}=y_1(\tau_2)$, то

$$-[y_2(\tau_2)+(y_0)_{\tau_1=0}]=\frac{\delta-}{c}\left(\frac{\operatorname{ch}\omega_2\tau_2+e^{-h_1\tau_2}}{\operatorname{sh}\omega_2\tau_2}\,\omega_2-h_1\right)>0.$$

Следовательно, имеет место лишь одна точка пересечения, т. е один (устойчивый) предельный цикл (см. рис. 9).

7) $h>1$, $k<0$, $\delta\gtrless 1$ $(k_1>0)$. Здесь $h_1>1$ и $\Delta>0$. Начало координат—устойчивый узел. Так как $\Delta_4=\frac{4\delta h_1}{c}>0$ (считая $c>0$) и кривая $y_2(y_1)$ обращена вогнутостью вниз, то точек пересечения нет (см. рис. 10) (при $c<0$ результат тот же самый, так как $y_2(y_1)|_{c>0}=-y_2(y_1)|_{c<0}$ и $y_1(y_0)|_{c>0}=-y_1(y_0)|_{c<0}$).

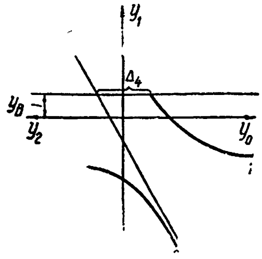

Рис 11

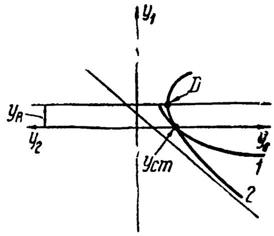

Рис. 12

8) $h>1$, $k>0$, $\delta>1$ $(k_1>0)$. Положим $h_1>0$. Начало координат — устойчивый узел или фокус. При $c>0$ величина $\Delta_4>0$, и так как кривая $y_2(y_1)$ обращена вогнутостью вниз, то точек пересечения нет (см. рис. 11) (то же при $c<0$).

9) $h>1$, $k>0$, $\delta>1$ $(k_1>0)$. Положим $h_1<0$. Начало координат — неустойчивый узел или фокус. Найдем координаты точки D, в которой кривая $y_2(y_1)$ имеет горизонтальную касательную. Получим, считая $c>0$ и Δ любого знака,

$$(y_1)_D=\frac{\delta k k_1}{c}>0,\quad (y_2)_D=-\frac{\delta}{c}\left(-2\omega_2\frac{\operatorname{sh}h_1\tau_2}{\operatorname{sh}\omega_2\tau_2}-2h_1+kk_1\right)<0.$$

Легко видеть, что

$$-[(y_2)_D+(y_0)_D]>0.$$

На диаграмме Кенигса — Лемерея имеет место только одна точка пересечения (см. рис. 12); тот же результат имеет место при $c<0$.

Из вышеприведенного анализа следует, что предельные циклы существуют лишь при $h_1<0$. Если $h<1$ и $\delta<1$, то в пространстве параметров граница между областью отсутствия предельных циклов и областью существования двух предельных циклов определяется из условий:

$$y_0(\tau_1)=-y_2(\tau_2),$$

$$y_1(\tau_1)=y_1(\tau_2),$$

$$\frac{dy_1}{dy_0}(\tau_1)=-\frac{dy_1}{dy_2}(\tau_2),$$

а граница между областью существования двух предельных циклов и областью существования одного предельного цикла из условий:

$$y_2(\tau_2)=-y_0(\bar{\tau}_1),$$

$$y_1(\tau_2)=y_1(\bar{\tau}_1).$$

Если $\delta > 1$, то имеется лишь граница между областью отсутствия предельных циклов и областью существования одного предельного цикла. Ее уравнение $h_1 = 0$. На рис. 13 приведено разбиение пространства параметров на области одинаковой топологической структуры фазовой плоскости.

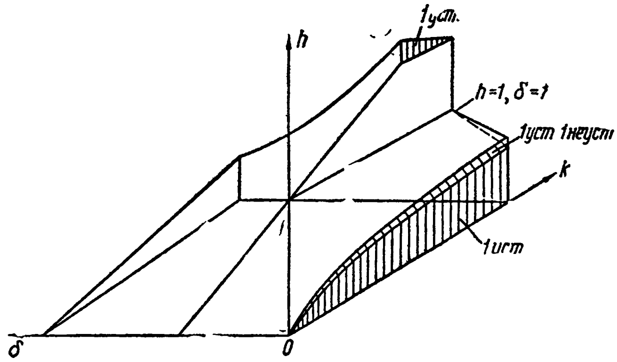

Рис. 13

Период автоколебаний равен

$$\tau = 2(\tau_1^* + \tau_2^*),$$

где τ_1^*, τ_2^* ($0 < \tau_1^* < \bar{\tau}_1$, $0 < \tau_2^* < \infty$)—значения τ_1 и τ_2, соответствующие неподвижной точке и определяемые из системы соотношений

$$y_2(\tau_2^*) = -y_0(\tau_1^*),$$

$$y_1(\tau_2^*) = y_1(\tau_1^*).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Железцов. Труды ГИФТИ и Радиофака ГГУ, 1957, *35*, 220.
2 А. А. Андронов, С. Э. Хайкин. Теория колебаний, ч. 1, 1937.

Исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете.

Поступила в редакцию 28 мая 1957 г.