

К ТЕОРИИ РАЗРЫВНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

H. A. Железцов

Доказывается теорема о существовании единственного и устойчивого предельного цикла системы: $\mu \dot{x} = F(x, y)$, $\dot{y} = G(x, y)$ в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности разрывного предельного цикла при малых значениях положительного параметра μ .

1. ВВЕДЕНИЕ. РАЗРЫВНЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

Рассмотрим автономную динамическую систему второго порядка, поведение которой определяется системой дифференциальных уравнений вида

$$\mu \dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (1)$$

(μ — малый положительный параметр) и в которой, следовательно, возможны разрывные колебания (при малых значениях параметра μ , соответствующих малым величинам паразитных параметров реальной физической системы [1, 2, 3]). Ниже мы будем полагать, что $F(x, y)$ и $G(x, y)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные, и что фазовой поверхностью рассматриваемой системы является обычная (декартова) плоскость x, y .

Для получения разбиения фазовой плоскости на траектории системы (1) при достаточно малых значениях положительного параметра μ выпишем уравнение интегральных кривых

$$\frac{dy}{dx} = \mu \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad (2)$$

и построим на плоскости x, y линию (F) , определяемую уравнением

$$F(x, y) = 0 \quad (3)$$

и являющуюся фазовой линией «вырожденной» системы, т. е. системы, получаемой из (1) при $\mu=0$. Мы будем полагать, что в точках линии (F) производные F'_x и F'_y не обращаются одновременно в нуль; тогда линия (F) будет непрерывной и простой, т. е. не будет иметь особых точек.

Из уравнений (1) следует, что при $\mu \rightarrow +0$ фазовая скорость изображающей точки (т. е. и x и y) остается ограниченной только в малых $O(\mu)$ -окрестностях линии* (F) , где $|F(x, y)| \ll 0(\mu)$. Наоборот, вне малых

* Здесь и ниже через $0[f(\mu)]$ обозначены функции, которые ведут себя при малых μ как $f(\mu)$; запись $g(x, y, \mu) = 0[f(\mu)]$ означает, что существует

$$\lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{g(x, y, \mu)}{f(\mu)} = g^*(x, y) \neq 0.$$

Далее, под ϵ -окрестностью той или иной линии понимается множество точек, лежащих на расстояниях, меньших или равных ϵ , от точек этой линии.

Очевидно, $O(\mu)$ -окрестность линии (F) стягивается к (F) при $\mu \rightarrow +0$ и в ней $|\dot{x}| < 0(1)$. Но вне любой $O(\mu^a)$ -окрестности этой линии ($0 < a < 1$), также стремящейся к (F) при $\mu \rightarrow +0$, $0(\mu^a) < |F(x, y)| < 0(1)$, вследствие чего $0(\mu^{-1}) > |\dot{x}| > \gg 0(\mu^{a-1}) \rightarrow \infty$ и $|\frac{dy}{dx}| \ll 0(\mu^{1-a}) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +0$; $\dot{x} \rightarrow \infty$, $-\dot{a} \frac{dy}{dx} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +0$ также

и вне $O(\mu \ln 1/\mu)$ -окрестности линии (F) , $y = G(x, y)$ и остается ограниченной при $\mu \rightarrow +0$ всюду (в любой ограниченной части плоскости x, y).

окрестностей этой линии (например, вне окрестностей с размерами порядка $\sqrt{\mu}$) $x \rightarrow \infty$, а $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$, т. е. там фазовые траектории системы (1) при достаточно малых μ столь угодно близки к прямым $y = \text{const}$, и по ним изображающая точка двигается сколь угодно быстро. Так как $\mu > 0$, то изображающая точка двигается вправо ($x \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$) в области, где $F(x, y) > 0$, и влево ($x \rightarrow -\infty$ при $\mu \rightarrow +0$) — в области, где $F(x, y) < 0$. Поэтому траектории этих «быстрых», скачкообразных движений системы идут к тем участкам (F^+) линии (F), на которых

$$F'_x(x, y) < 0, \quad (4)$$

и отходят от остальной части (F^-) этой линии, на которой

$$F'_x(x, y) \geq 0.$$

Следовательно, «медленные» движения системы, т. е. движения с ограниченными x и y в течение конечных, не стремящихся к нулю интервалов времени при $\mu \rightarrow +0$, будут происходить только в малых $O(\mu)$ -окрестностях участков (F^+), стягивающихся к (F^+) при $\mu \rightarrow +0$ и будут приближенно (тем точнее, чем меньше μ) отображаться уравнениями:

$$F(x, y) = 0, \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (5)$$

— уравнениями «вырожденной» системы (с $\mu = 0$). В свою очередь, траектории «медленных» движений системы переходят в траектории «быстрых» движений в малых окрестностях тех точек A линии (F), которые являются граничными точками участков (F^+) и к которым изображающая точка подходит в соответствии с уравнениями (5) (эти точки будут называться ниже точками «смысла»). В этих точках, очевидно, в силу непрерывности $F'_x(x, y)$

$$F'_x(x, y) = 0 \quad (6)$$

и касательная к линии (F) горизонтальна *.

Таким образом, разбиение фазовой плоскости x, y на траектории системы (1) при достаточно малых положительных μ будет сколь угодно близким к следующему предельному (при $\mu \rightarrow +0$) разбиению: вся плоскость вне линии (F) заполнена траекториями «быстрых», скачкообразных движений (с $x \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$), — траекториями $y = \text{const}$, идущими к линии (F^+):

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) < 0$$

или, возможно, в бесконечность, а сама линия (F^+) является траекториями «медленных» движений системы [вдоль нее изображающая точка двигается «медленно», с ограниченными x и y при $\mu \rightarrow +0$ в соответствии с уравнениями (5)].

* В точках A линии (F) $F'_y \neq 0$; мы будем полагать также, что в них и $F''_{xx} \neq 0$, тогда ордината y точек линии (F) будет достигать в точках A максимума или минимума.

Дифференцируя $F(x, y) = 0$ по t и используя дифференциальное уравнение (5), мы получим для «медленного» движения:

$$F'_x \dot{x} + F'_y G = 0 \text{ или } \dot{x} = - \frac{F'_y G}{F'_x}.$$

Поэтому для «вырожденной» системы точки A ее фазовой линии (F) являются точками, в которых \dot{x} обращается в бесконечность. Эти точки всегда являются точками «стыка» траекторий «вырожденной» системы, так как при переходе через них \dot{x} изменяет знак. Последнее справедливо и в тех случаях, когда $F'_x(x, y)$ имеет разрыв непрерывности в точках A , что обычно получается при кусочно-линейных уравнениях системы.

Пусть на линии (F) имеются как участки (F^+) , так и участки (F^-) и пусть при достаточно больших x знак функции $F(x, y)$ противоположен знаку x^* . Тогда, если изображающая точка, «медленно» двигаясь по (F^+) , приходит в одну из точек A , то далее она «срывается» в область «быстрых» движений и двигается «быстро», скачком по выходящей из этой точки траектории «быстрого» движения $y=\text{const}$ до тех пор, пока не вернется снова на линию «медленных» движений (F^+) . В этом случае в системе будут происходить разрывные колебания, т. е. колебания, состоящие из чередующихся «медленных» (с ограниченными x и y при $\mu \rightarrow +0$) и «быстрых», скачкообразных (с $x \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$) изменений состояния системы. Несколько примеров разбиений фазовой плоскости системы (1) на траектории в предельном случае $\mu \rightarrow +0$ приведено на рис. 1. На рис. 1, а изображен тот случай, когда на линии «медленных» движений [на линии (F_2^+)] имеется устойчивое состояние равновесия системы, которое и устанавливается после нескольких колебаний. Фазовые портреты, изображенные на рис. 1, б и г, содержат разрывные предельные циклы, т. е. такие замкнутые кривые, которые состоят из кусков траекторий «медленных» движений [на линии (F^+)] и кусков траекторий «быстрых» движений, скачков ($y=\text{const}$) и пробегающихся изображающей точкой периодически. Эти разрывные предельные циклы, очевидно, соответствуют периодическим разрывным колебаниям системы (разрывным автоколебаниям)**.

2. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА СИСТЕМЫ (1)

Пусть на фазовой плоскости x, y системы уравнений (1) имеется (в предельном случае $\mu \rightarrow +0$) разрывный предельный цикл (C_0) : $A_1B_1A_2B_2\dots A_mB_mA_1$, состоящий из чередующихся m отрезков траекторий «быстрых» движений ($y=\text{const}$): $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_mB_m$ и m отрезков траекторий «медленных» движений [на линии (F^+)]: $B_1A_2, B_2A_3, \dots, B_mA_1$. По самому смыслу определения разрывного предельного цикла: 1) на этом цикле нет состояний равновесия системы, т. е. на нем функции $F(x, y)$ и $G(x, y)$ не обращаются одновременно в нуль; 2) на каждом из его участков «быстрых» движений A_kB_k (точки A_k и B_k исключаются)

$$y = \text{const} \text{ и } \dot{x} = \frac{1}{\mu} F(x, y) \rightarrow \infty \text{ при } \mu \rightarrow +0,$$

т. е.

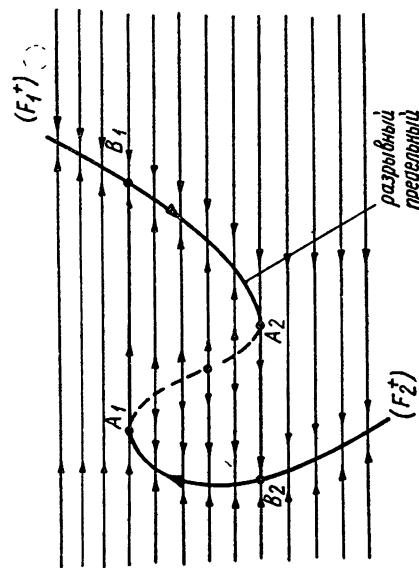
$$F(x, y) \neq 0, \quad (7)$$

причем знак функции $F(x, y)$ на интервале A_kB_k таков, что изображающая точка «перепрыгивает» из точки A_k в точку B_k ; 3) на каждом из участков «медленных» движений B_kA_{k+1} (за исключением точек A_{k+1})

$$F(x, y) = 0, F'_x(x, y) < 0, \dot{y} = G(x, y) \quad (8)$$

* Точнее, мы предполагаем, что существует такое $\bar{x} = \bar{x}(y) > 0$, что при всех $x |> \bar{x}$ $x F(x, y) < 0$. Тогда, поскольку $\mu > 0$, при этих значениях $x \ddot{x} = 1/2 \frac{d}{dt} (x^2) < 0$, т. е. $|x|$ будет уменьшаться (при увеличении t) и на фазовой плоскости не будет траекторий «быстрых» движений, уходящих в бесконечность.

** На рис. 1, г изображено разбиение фазовой плоскости на траектории в случае жесткого режима возбуждения разрывных автоколебаний, когда на фазовой плоскости наряду с (устойчивым) разрывным предельным циклом $A_1B_1A_2B_2A_1$ имеется еще и устойчивое состояние равновесия (на участке (F_2^+) линии «медленных» движений). Замкнутая линия $a_1b_1a_2b_2a_1$ является неустойчивым предельным циклом и делит фазовую плоскость на области притяжения состояния равновесия и предельного цикла $A_1B_1A_2B_2A_1$.



разрывной
предельный
цикла $A_1 B_1 A_2 B_2 A_1$

Рис. 1.6

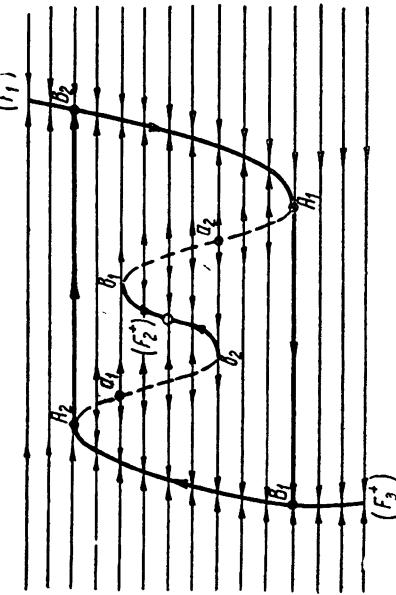


Рис. 1.7

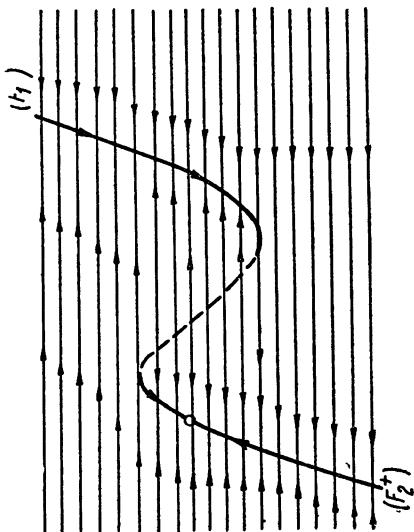
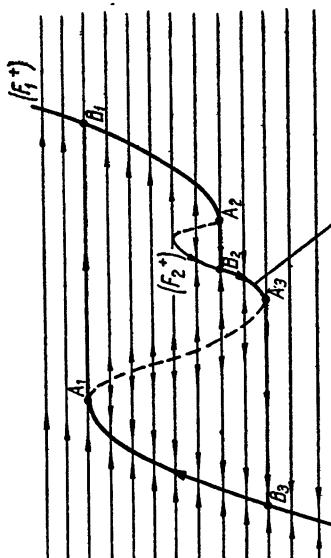


Рис. 1.8



разрывной предельный
цикла $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_1$

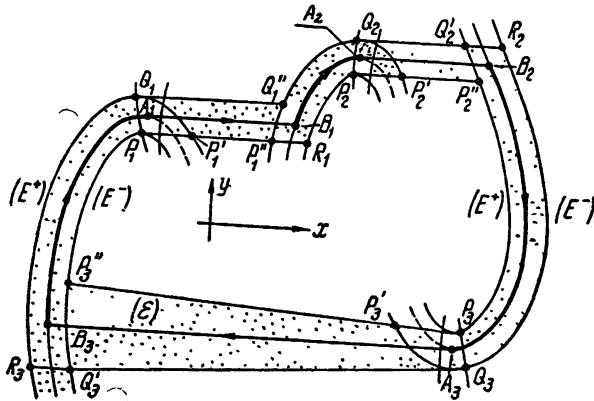
Рис. 1.9

и знак функции $G(x, y)$ на отрезке $B_k A_{k+1}$ таков, что изображающая точка движется из точки B_k в точку A_{k+1} . В точках A_k — в точках перехода «медленных» движений изображающей точки в «быстрые», скачкообразные:

$$F(x, y) = 0, F'_x(x, y) = 0, \text{ но } G(x, y) \neq 0; \quad (9)$$

мы полагали дополнительно, что в этих точках «срыва» F'_y и F''_{xx} существуют и отличны от нуля *.

Для примера на рис. 2 изображен разрывный предельный цикл $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_1$, для которого $F(x, y) > 0$ (т. е. $x \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow +0$) — на участке «быстрого» движения $A_1 B_1$, $G(x, y) > 0$ (т. е. $\dot{y} > 0$) — на участке



той двусвязной области (ε) со следующими свойствами: 1) в области (ε) нет состояний равновесия системы (1); 2) область (ε) лежит внутри некоторой $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности разрывного предельного цикла (C_0) и, следовательно, стягивается к (C_0) при $\mu \rightarrow +0$ и 3) траектории системы (1) при заданном значении параметра μ входят (при возрастании t) в область (ε). Очевидно, эта область (согласно известной теореме качественной теории дифференциальных уравнений [4]) будет содержать внутри себя, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл системы уравнений (1) при заданном значении параметра μ .

Прежде всего выделим на плоскости x, y некоторую ограниченную односвязную замкнутую область (D), которая содержит внутри себя разрывный предельный цикл (C_0) и в которой функции $F(x, y)$, $G(x, y)$ и их производные непрерывны и, следовательно, ограничены. В частности, существуют такие положительные числа M и N , что в области (D)

$$|G(x, y)| < M \text{ и } |G'_y(x, y)| < N. \quad (10)$$

Ниже мы будем полагать параметр μ выбранным настолько малым, чтобы строящаяся нами область (ε) лежала целиком внутри области (D).

Далее, для построения области (ε) проведем на плоскости x, y [в области (D)] линии (E^+) и (E^-), определяемые соответственно уравнениями:

$$F(x, y) = +\sqrt{\mu}M \text{ и } F(x, y) = -\sqrt{\mu}M, \quad (11)$$

и притом такие, что в открытой области (α), заключенной между ними и содержащей линию (F),

$$|F(x, y)| < \sqrt{\mu}M \quad (12)$$

и в остальной части области (D) —

$$|F(x, y)| > \sqrt{\mu}M*. \quad (13)$$

Проведем также линии (H^+) и (H^-):

$$\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \pm \sqrt{\mu}, \quad (14)$$

на которых угловой коэффициент касательной к линии (F) обращается в $\pm \sqrt{\mu}$ и которые выделяют в области (α) такие (открытые) области (β_k), заключенные между ними и содержащие точки A_k , что в областях (β_k)

$$\left| \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right| < \sqrt{\mu} \quad (15)$$

и в остальной части области (α)

$$\left| \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right| > \sqrt{\mu}. \quad (16)$$

Линии (E^+), (E^-), (H^+) и (H^-) с указанными свойствами можно построить [по крайней мере, в пределах области (D)], выбрав достаточно малое значение положительного параметра μ .

* Заметим, что линия (E^+) лежит слева от участков «медленных» движений $B_k A_{k+1}$ разрывного предельного цикла (C_0) и линия (E^-) — справа от них, так как на участках $B_k A_{k+1}$ $F(x, y) = 0$ и $F'_x(x, y) < 0$.

При этом область (α) будет лежать внутри некоторой $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности линии (F) , а области (β_k) — внутри некоторых $0(\sqrt{\mu})$ -окрестностей точек A_k ^{*}. Отметим, наконец, точки P_k и Q_k — точки пересечения [в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестностях точек A] линий

$$F'_x(x, y) = -\sqrt{\mu} |F'_y(x, y)|,$$

являющейся одной из линий (H^+) и (H^-) , с линиями (E^+) и (E^-) , причем точкой P_k мы будем называть ту из двух точек пересечения, которая имеет меньшую ординату, если $G(x, y) > 0$ — на отрезке $B_{k-1}A_k$,

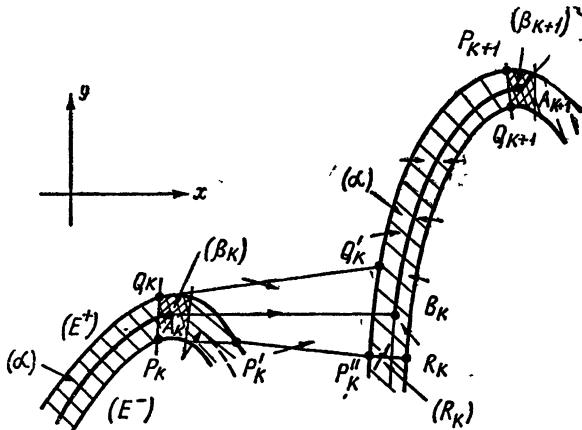


Рис. 3

и большую ординату, если $G(x, y) < 0$ — на том же отрезке.

Построение трапеции области (ϵ) в малой $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности участка $A_k B_k A_{k+1}$ разрывного предельного цикла мы проведем сначала для случая, изображенного на рис. 3, когда $G(x, y) > 0$ — на отрезках $B_{k-1}A_k$ и $B_k A_{k+1}$ и $F(x, y) > 0$ — на интервале $A_k B_k$ (затем мы укажем, как это построение проводится в других случаях).

1. Проведем горизонтальный прямолинейный отрезок $P_k P'_k$ из точки P_k в точку P'_k , лежащую на линии (E^+) в области $F'_x(x, y) > 0$ и в

* Мы пользуемся здесь следующей простой леммой: пусть в некоторой ограниченной области (A) имеется линия $\Phi(x, y) = 0$, в точках которой существуют непрерывные производные Φ'_x и Φ'_y , не обращающиеся в нуль одновременно; тогда имеется такое положительное число δ_0 , что при любом $0 \leq \delta < \delta_0$: 1) в области (A) существуют линии $\Phi(x, y) = +\delta$ и $\Phi(x, y) = -\delta$, лежащие в некоторой $0(\delta)$ -окрестности линии $\Phi(x, y) = 0$, и 2) в открытой области, заключенной между этими линиями и содержащей линию $\Phi(x, y) = 0$.

$$|\Phi(x, y)| < \delta$$

и в остальной части области (A)

$$|\Phi(x, y)| > \delta.$$

Очевидно, область α будет лежать внутри некоторой $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности функции $F(x, y)$ [в области (D)] и $\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ [в области (α)] удовлетворяют условиям этой леммы. Доказательства леммы, в силу его элементарности, мы не приводим.

$0(\mu^{1/4})$ -окрестности точки A_k *. Так как в точке A_k функция $G(x, y) > 0$ и непрерывна, то путем выбора достаточно малого значения параметра μ мы всегда сможем добиться, чтобы на построенном отрезке $P_k P'_k$ функция $G(x, y)$ была также положительной. Тогда траектории системы (1) при выбранном достаточно малом μ , пересекающие этот отрезок, будут проходить через него снизу вверх ($y > 0$ на отрезке $P_k P'_k$).

2. Проведем отрезок прямой $P'_k P''_k$ с угловым коэффициентом $-\sqrt{\mu}$ и отрезок прямой $Q_k Q'_k$ с угловым коэффициентом $+\sqrt{\mu}$ из точек P'_k и Q_k вправо до пересечения с левой границей области (α) в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки B_k . Если μ выбрать достаточно малым, то оба отрезка будут лежать вне области (α) и знак функции $F(x, y)$ на них будет совпадать со знаком той же функции на интервале $A_k B_k$; тогда [в силу неравенств (13) и (10)] на этих отрезках

$$F(x, y) > \sqrt{\mu} M > \sqrt{\mu} |G(x, y)|. \quad (17)$$

Рассматривая пересечение фазовых траекторий системы (1) с прямыми:

$$\sqrt{\mu}x \pm y = \text{const} \quad (18)$$

(на двух из этих прямых лежат построенные нами отрезки $P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$), нетрудно видеть, что траектории системы (1), при выбранном малом μ пересекающие отрезки $P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$, входят (при возрастании t) в нутрь полосы, заключенной между этими отрезками и содержащей участок $A_k B_k$ разрывного предельного цикла (C_0) . Это следует из того, что при движении изображающей точки по траектории системы (1)

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{\mu}x \pm y) = \frac{F(x, y)}{\sqrt{\mu}} \pm G(x, y) > 0 \quad (19)$$

в точках отрезков $P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$ [в силу неравенства (17)].

3. Пересечем область (α) [в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки B_k] горизонтальным отрезком (R_k) , проведенным из точки P''_k в точку P_k правой границы области (α) . Так как этот отрезок лежит в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки B_k , в которой непрерывная функция $G(x, y) > 0$, то при достаточно малом μ $G(x, y) > 0$ и на отрезке (R_k) ; тогда траектории системы (1), пересекающие этот отрезок, проходят через него снизу вверх.

4. Соединим точки Q_k и R_k с точками P_{k+1} и Q_{k+1} дугами линий (E^+) и (E^-) , лежащими вне областей β_l . На них [согласно неравенству (16)]:

* Такая точка P_k существует в $0(\mu^{1/4})$ -окрестности точки A_k , так как в точке A_k $F''_{xx} \neq 0$. Действительно, разложим функцию $F = F(x, y)$ в степенной ряд в окрестности точки A_k (x_k^*, y_k^*) :

$$F = F'_y \cdot \eta + F''_{xx} \cdot \xi^2 + 2F''_{xy} \cdot \xi \eta + F''_{yy} \cdot \eta^2 + \dots,$$

где $\xi = x - x_k^*$, $\eta = y - y_k^*$ и F'_y , F''_{xx} , F''_{xy} , \dots — значения соответствующих производных в точке A_k . Так как точки P_k и P'_k имеют одинаковые ординаты, а точка P_k лежит в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_k , то для точки P'_k $|\eta| \leq 0(\sqrt{\mu})$, а ее абсцисса ξ определяется уравнением

$$F''_{xx} \cdot \xi^2 + b\xi + c + \dots = 0,$$

где b и c — величины порядка $\sqrt{\mu}$. Так как $F''_{xx} \neq 0$ в точке A_k , то $|\xi| \leq 0(\mu^{1/4})$, т. е. точка P'_k действительно лежит в $0(\mu^{1/4})$ -окрестности точки A_k .

$$-F'_x(\dot{x}, y) \geq V\sqrt{\mu} \cdot |F'_y(x, y)|, \quad (20)$$

поэтому при движении изображающей точки по траекториям системы (1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{F(x, y)\}^2 &= F \{F'_x \dot{x} + F'_y \dot{y}\} = F \left\{ F'_x \frac{F}{\mu} + F'_y G \right\} = \\ &= M^2 \left\{ F'_x + V\sqrt{\mu} F'_y \frac{G}{M} \right\} < 0 \end{aligned} \quad (21)$$

в точках этих дуг, т. е. фазовые траектории системы (1), пересекающие дуги $Q'_k Q_{k+1}$ и $R_k P_{k+1}$, входят (при возрастании t) внутрь области (α).

Построенные нами линии, соединяющие точки P_k и Q_k с точками P_{k+1} и Q_{k+1} , ограничивают полосу — часть области (ε), которая лежит в некоторой $0(V\sqrt{\mu})$ -окрестности участка $A_k B_k A_{k+1}$ разрывного предельного цикла и в которую фазовые траектории системы (1) входят при возрастании t . Аналогичным образом производится построение границ области (ε) в $0(V\sqrt{\mu})$ -окрестностях участков разрывного предельного цикла и при знаках функций $F(x, y)$ и $G(x, y)$, отличных от принятых на рис. 3. Именно, построение участков $P_k P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$ границ области (ε) сводится к изложенному заменой переменного x на $-x$, если $F(x, y) < 0$ — на интервале $A_k B_k$, и переменного y на $-y$, если $G(x, y) < 0$ — на отрезке $B_{k-1} A_k$; горизонтальный отрезок R_k , пересекающий область (α) в $0(V\sqrt{\mu})$ -окрестности точки B_k , проводится через нижнюю из точек P''_k и Q_k , если $G(x, y) > 0$ — на отрезке $B_k A_{k+1}$, и через верхнюю из них, если $G(x, y) < 0$ — на отрезке $B_k A_{k+1}$; затем верхняя из точек P''_k и Q'_k , если $G(x, y) > 0$ — на отрезке $B_k A_{k+1}$, или нижняя из них, если $G(x, y) < 0$ — на том же отрезке, и точка R_k , т. е. правая граничная точка отрезка (R_k), если $F(x, y) > 0$ — на интервале $A_k B_k$, или левая граничная точка этого отрезка, если $F(x, y) < 0$ — на $A_k B_k$ — соединяются дугами линий (E^+) и (E^-)

$$F(x, y) = \pm V\sqrt{\mu} M$$

с точками P_{k+1} и Q_{k+1} .

Построив указанным способом при достаточно малом значении параметра μ границы области (ε) около каждого из участков разрывного предельного цикла C_0 , мы получим двусвязную область (ε), которая содержит внутри себя разрывный предельный цикл (C_0), лежит в некоторой его $0(V\sqrt{\mu})$ -окрестности и в которую фазовые траектории системы (1) входят при возрастании времени t (для примера, область (ε) построена на рис. 2). При достаточно малых μ эта область не будет содержать и состояний равновесия системы (1), т. е. таких точек, в которых одновременно $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$, поскольку таких точек нет на разрывном предельном цикле, а функции $F(x, y)$ и $G(x, y)$ суть функции непрерывные. Тогда построенная (при достаточно малом значении параметра μ) область (ε) будет содержать внутри себя по крайней мере один устойчивый предельный цикл системы (1) с выбранным малым $\mu > 0$.

3 ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА СИСТЕМЫ (1), ЛЕЖАЩЕГО В $0(V\sqrt{\mu})$ -ОКРЕСТНОСТИ РАЗРЫВНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

Докажем теперь, что всякий предельный цикл (C) системы (1), лежащий в построенной области (ε), является при достаточно малых μ устойчивым. Тем самым мы докажем, что при достаточно малых

в области (ε) существует только один предельный цикл системы (1), так как если бы там существовало несколько предельных циклов, то среди них обязательно были бы неустойчивые. С этой целью рассмотрим характеристический показатель предельного цикла (C) — интеграл

$$I = \int_{(C)} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt, \quad (22)$$

взятый по предельному циклу, и покажем, что при достаточно малых μ $I < 0$ (условие $I < 0$, как известно [5], является достаточным условием устойчивости предельного цикла). Разобьем предельный цикл (C) точками C_k — точками его пересечения с границей области (α) в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестностях точек B_{k-1} — на участки $C_k C_{k+1}$. Тогда

$$I = \sum I_k, \quad \text{где } I_k = \int_{(C_k C_{k+1})} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt \quad (23)$$

— интеграл, взятый по участку $C_k C_{k+1}$ предельного цикла (C) . Для определения знака интеграла I_k (при достаточно малых μ) разобьем дополнительно участок $C_k C_{k+1}$ предельного цикла на три участка точками его пересечения с линией:

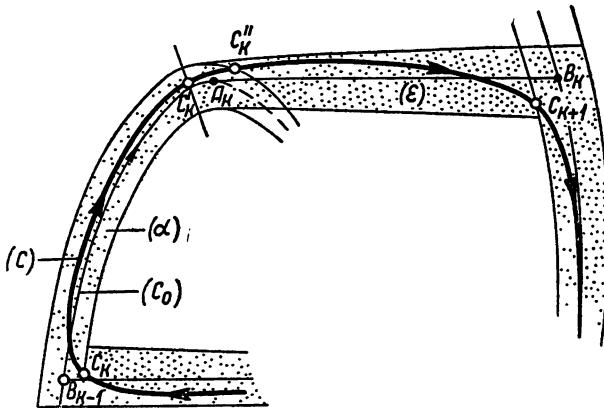


Рис. 4

$$F'_x(x, y) = -\mu N, \quad (24)$$

где N — число, входящее в неравенство (10), и с границей области (α) в малой окрестности точки A_k (рис. 4). Первая из них — точка C_k лежит в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_k , вторая — C_k'' — в $0(\mu^{1/4})$ -окрестности той же точки*. Соответственно

* Линия (24) лежит в $0(\mu)$ -окрестности линии $F'_x(x, y) = 0$, отрезок которой в пределах области (α) заключен в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки $A_k(x_k^*, y_k^*)$. Поэтому и точка C_k' лежит в $0(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_k , т. е.

$$|y_k' - y_k^*| \leq 0(\sqrt{\mu}),$$

где y_k' — ордината точки C_k' .

Для точки C_k'' (ее координаты обозначим через x_k'', y_k'')

имеем

$$|y_k'' - y_k^*| \leq 0(\sqrt{\mu})$$

и, следовательно,

$$|x_k'' - x_k^*| \leq 0(\mu^{1/4})$$

(доказательство последнего неравенства аналогично приведенному на стр. 73).

$$I_k = I_k^{(1)} + I_k^{(2)} + I_k^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned} I_k^{(1)} &= \int_{(C_k C'_k)}^{\cdot} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{y_k}^{y'_k} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} \frac{dy}{G}, \\ I_k^{(2)} &= \int_{(C'_k C''_k)}^{\cdot} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{y'_k}^{y''_k} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} \frac{dy}{G}, \\ I_k^{(3)} &= \int_{(C''_k C_{k+1})}^{\cdot} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{x''_k}^{x_{k+1}} \{ F'_x + \mu G'_y \} \frac{dx}{F} \end{aligned} \quad (25)$$

здесь $x_k, y_k, x'_k, y'_k, x''_k, y''_k$ и x_{k+1}, y_{k+1} — координаты точек C_k, C'_k, C''_k и C_{k+1} .

Так как при достаточно малых μ на участке $C_k C'_k$ предельного цикла

$$F'_x(x, y) \ll -\mu N < -\mu |G'_y(x, y)|$$

и

$$|G(x, y)| > a \quad (26)$$

(a — некоторое положительное число), то $I_k^{(1)} < 0$, причем, поскольку на этом участке можно выделить отрезок, на котором

$$F'_x(x, y) < -b \quad (27)$$

(b — также некоторое положительное число), то

$$I_k^{(1)} = 0 \left(\frac{1}{\mu} \right) < 0. \quad (28)$$

На участке $C'_k C''_k$, лежащем внутри некоторой $0(\mu^{1/4})$ -окрестности точки A_k ,

$$|x - x_k^*| \ll 0(\mu^{1/4}), |y - y_k^*| \ll 0(\mu^{1/4}),$$

$$|F'_x(x, y)| \ll 0(\mu^{1/4}) \text{ и } |G(x, y)| > a,$$

$$(29)$$

поэтому согласно теореме о среднем

$$|I_k^{(2)}| \ll 0(\mu^{-3/4}) |y''_k - y'_k| \ll 0(\mu^{-1/4}), \quad (30)$$

поскольку

$$|y''_k - y'_k| \ll 0(\sqrt{\mu}).$$

Наконец, на участке $C''_k C_{k+1}$, лежащем вне области (α),

$$|F(x, y)| \geq \sqrt{\mu} M = 0(\sqrt{\mu}) \quad (31)$$

[см. неравенство (13)], вследствие чего

$$|I_k^{(3)}| \ll 0(\mu^{-1/4}). *$$

Таким образом, каждый интеграл $I_k = \int_{(C_k C_{k+1})}^{\cdot} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt$ равен

* Нетрудно получить более точную оценку: $|I_k^{(3)}| \ll 0(\ln \frac{1}{\mu})$.

сумме отрицательной величины $I_k^{(1)}$ порядка $1/\mu$ и величин $I_k^{(2)}$ и $I_k^{(3)}$, которые, если $\dot{\gamma}$ стремится к бесконечности при $\mu \rightarrow +0$, то во всяком случае медленнее, чем $1/\mu$; поэтому при достаточно малых μ $I_k < 0$ на всех участках $C_k C_{k+1}$, следовательно, и характеристический показатель предельного цикла (C)

$$I = \int_{(C)} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \Sigma I_k < 0, \quad (32)$$

т. е. предельный цикл (C), лежащий в области (ε), является устойчивым. Как уже указывалось выше, мы доказали одновременно и единственность предельного цикла системы (1) при достаточно малых μ , лежащего в области (ε), т. е. в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности разрывного предельного цикла (C_0). В итоге мы доказали следующую теорему.

Пусть $F(x, y)$, $G(x, y)$ и их производные $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ и $G'_y(x, y)$ суть непрерывные функции и пусть система уравнений (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases},$$

где μ — малый положительный параметр, имеет разрывный предельный цикл (C_0), в точках «смыкания» которого $F'_y \neq 0$ и $F''_{xx} \neq 0$.

Тогда система (1) при достаточно малых значениях параметра μ имеет единственный и устойчивый предельный цикл, лежащий в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности разрывного предельного цикла (C_0).

Доказанная теорема, очевидно, позволяет использовать разрывный предельный цикл системы уравнений (1) в качестве исходного (нулевого) приближения для вычисления тех или иных характеристик разрывных автоколебаний в системе, описываемой уравнениями (1) с небольшими значениями параметра μ , например, для вычисления периода и амплитуды этих автоколебаний.

В заключение автор считает необходимым выразить благодарность Е. А. Андроновой-Леонович за ряд ценных советов и указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. La Salle Quart. of Appl. Math. 7, 1949, № 1, 1—19.
2. Н. А. Железцов, Л. В. Родыгин. ДАН СССР, 1951, 81, 3, 391.
3. Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понtryagin. ДАН СССР, 1955, 102, 5, 889.
4. А. А. Андронов, С. Э. Хайкин. Теория колебаний, ч. 1, М—Л., ОНТИ, 1937, 294—321.
5. А. А. Андронов, С. Э. Хайкин. Теория колебаний, ч. 1, М—Л., ОНТИ, 1937, 285—292.

Исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июня 1957 г